

Biofizika za medicino

Zapiski s predavanj iz biofizike
za študente medicine in dentalne medicine

Prvi del: uvod, mehanika in termodinamika

Jure Derganc

Verzija 4. 10. 2019. Popravki se zbirajo na [tem naslovu](#).

Kazalo

I	Uvod	5
1	Kvantitativno opisovanje narave	6
1.1	Kvalitativno ali kvantitativno?	6
1.2	Zapisovanje količin, enote	8
1.3	Osnovne matematične funkcije	10
1.3.1	Premo sorazmerje in linearna odvisnost	10
1.3.2	Obratno sorazmerje	12
1.3.3	Potenčne odvisnost	12
1.3.4	Eksponentna odvisnost	13
1.3.5	Logaritemska funkcija	14
1.3.6	Kotne funkcije	14
1.3.7	Enote v enačbah in matematičnih funkcijah	15
1.4	Grafi, logaritemska skala in linearizacija	17
1.5	Še več matematike	23
1.5.1	Vektorji	23
1.5.2	Stopnje prostosti	25
1.5.3	Odvod in integral	25
II	Mehanika	30
2	Gibanje	31
2.1	Opisovanje gibanja	31
2.2	Vrtenje	33
3	Vzroki gibanja in ravnovesje: sile in navori	40
3.1	Sile	40
3.2	Navori	42
3.3	Gibalna in vrtilna količina	45

3.4	Ravnovesje, sile v telesu in težišče	46
4	Energija	51
4.1	Delo, energija in moč	51
4.2	Ravnovesje in potencialna energija	58
5	Nihanje	62
5.1	Harmonično nihanje	63
5.2	Dušenje, vzbujanje in resonanca	66
5.3	Nihanje molekul in spektroskopija	68
6	Sile in tlaki v snovi	70
6.1	Tri osnovne vrste snovi	70
6.2	Sile, tlaki, napetosti, stisljivost	71
6.3	Hidrostatski tlak, vzgon	73
7	Deformacije trdnih snovi	77
8	Površinska napetost	83
8.1	Laplace-ov zakon za napetost ukrivljenih površin	86
8.2	Močenje površin in kapilarni efekt	88
9	Gibanje tekočin	91
9.1	Opisovanje tekočin v gibanju, viskoznost	91
9.2	Gibanje v tekočini	94
9.3	Tok v ceveh in žilah	96
9.4	Idealne tekočine in Bernoullijeva enačba	100
9.5	Krvni obtok	101
10	Viskoelastičnost	104
III	Termodinamika	106
11	Uvod v termodinamiko	107
12	Termično gibanje in temperatura	109
12.1	Termično gibanje v plinih in plinska enačba	109
12.2	Difuzija	112

12.3 Merjenje temperature	114
13 Notranja energija in prvi zakon termodinamike	118
13.1 Notranja energija	118
13.2 Notranja energija idealnega plina	120
13.3 Delo, toplota in prvi zakon termodinamike	121
13.4 Kalorimetrija	124
13.5 Stiskanje in razpenjanje plinov	128
13.6 Entalpija	129
14 Entropija in drugi zakon termodinamike	135
14.1 Spontanost procesov in preprost pogled na entropijo	135
14.2 Izmenjevanje toplote in sprememba entropije	137
14.3 Drugi zakon termodinamike	139
15 Osnove termodinamike fizioloških procesov	144
15.1 Prosta entalpija in ravnovesje pri fizioloških pogojih	144
15.2 Kemijski potencial in prehajanje snovi med različnimi stanji	150
15.3 Kemijski potencial plinov in raztopin	151
15.4 Osmozni tlak	155
15.5 Fazni diagram vode in vlažnost zraka	157
15.6 Raztapljanje plinov	160
15.7 Barometrijska formula	164
16 Transport toplote in snovi	167
16.1 Prevajanje toplote	167
16.2 Transport snovi z difuzijo	169
16.3 Transport preko bioloških membran	170
16.4 Enoten pogled na transportne pojave, Ohmov zakon	171
16.5 Približevanje ravnovesju	172

Del I

Uvod

Poglavje 1

Kvantitativno opisovanje narave

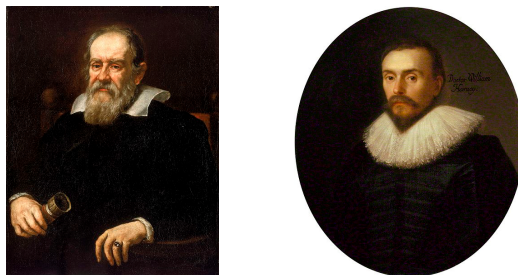
1.1 Kvalitativno ali kvantitativno?

Predstavljajmo si srednjeveškega zdravnika pri delu. Vse svoje pripomočke ima spravljene v eni sami torbi. Ko pristopi k bolniku, ga najprej pozorno pogleda v oči, mu z roko potipa čelo ter razišče, ali je bolnik *vroč*, *bled* ali morda *poten*. Nato se na osnovi teh *kvalitativnih* opažanj in svojih občutkov odloči o načinu zdravljenja. Od srednjega veka do danes se je marsikaj spremenilo. Ko danes bolnik pride k zdravniku, ga ta včasih niti v oči ne pogleda in ga takoj pošlje na laboratorijske preiskave. Po opravljenih preiskavah se bolnik k zdravniku vrne s šopom izvidov, na katerih je množica izmerjenih parametrov in grafov: vrednost krvnega tlaka, vrednost holesterola, saturacija krvi s kisikom, EKG... Zdravnikova izbira načina zdravljenja nato v veliki meri temelji prav na teh izmerjenih številkah. Z drugimi besedami, sodobna medicina postaja vse bolj *kvantitativna* znanost.

Pogosto na prvo mesto med kvantitativnimi znanostmi postavljamo fiziko, ki je tesno povezana z natančnimi opazovanjem in ponovljivimi meritvami ter matematično analizo eksperimentalnih rezultatov. S takim preprostim pogledom pa delamo krivico ostalim znanostim, saj se je znanost vedno razvijala kot celota in so bili fiziki od nekdanj le eni izmed »filozofov narave¹«. Tako ni presenetljivo, da začetke kvantitativne medicine najdemo hkrati z začetki kvantitativne fizike, t.j. v severni Italiji, ob koncu 16. stoletja. V času, ko je v Padovi služboval Galileo Galilei, je tam študiral tudi angleški zdravnik Wil-

¹Spomnimo se naslova znamenite Newtonove knjige, v kateri je prvič objavil tri zakone narave, ki jih danes imenujemo Newtonovi zakoni: *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* oz. *Matematične osnove naravne filozofije*.

liam Harvey, ki je kasneje odkril princip delovanja krvnega obtoka. Njegova knjiga *De motu cordis* (1628), v kateri je predstavil svoje raziskave, predstavlja enega od začetkov uporabe kvantitativnih metod v medicini. Zdravniki v



Slika 1.1: Sodobnika Galileo Galilei (1564–1642) in William Harvey (1578–1657). Prvi je bil eden od začetnikov uporabe kvantitativnih metod v fiziki, drugi v medicini (sliki povzeti po [1]).

16. stoletju so bili dobri anatomi in so se dobro zavedali pomena srca, žil in krvi, vendar še niso imeli dobrih mikroskopov in zato niso poznali mikroskopsko tankih kapilar, ki povezujejo arterijski in venski obtok. Pri razumevanju krvožilja so se tako naslanjali na antično razlago, da kri neprestano nastaja v jetrih ter ponika v ostalih organih. Harveyev razmislek in račun, ki sta antično razlago postavila pod vprašaj, sta bila z današnjega stališča preprosta, v tistih časih pa nič manj kot revolucionarna: iz anatomije srca je ocenil, da srce ob vsakem utripu prečrpa približno 60 cm^3 krvi. Ko je to številko pomnožil s številom srčnih utripov v eni uri, je izračunal, da srce v eni uri prečrpa več kot 200 litrov krvi oziroma približno trikratnik celotne človekove teže! Ker si je težko predstavljati, da toliko snovi vsako uro nastane v jetrih in hkrati ponikne v organih, je sklepal, da kri ne nastaja in ponika, temveč kroži. Preprosta kvantitativna meritev in izračun sta torej sprožila novo medicinsko odkritje in nakazala začetek novega obdobja v medicini.

Pogled v oči in pogovor s pacientom bosta vedno ostala najboljša osnovna medicinska metoda, vseeno pa so danes tudi številke nedeljiv del medicine. Dobra medicina je tista, ki je podprta z dokazi, in ravno kvantitativna analiza je eden od temeljev sodobnega znanstvenega dokaza, saj omogoča objektivnost in primerljivost različnih meritev. Številke in grafe vsakodnevno srečujemo tako v kliniki, kot tudi v osnovnih raziskavah, npr. v znanstvenih člankih, ki opisujejo delovanje novih zdravil. Eden od predpogojev za uspešno razumevanje sodobne medicine je torej dobro poznavanje osnovnih orodji kvantitativne znanosti. V prvem poglavju bomo zato osvežili naše znanje o nume-

ričnem zapisovanju količin in risanja grafov, ponovili osnovne matematične funkcije in enačbe ipd. Pozorni bralec bo ugotovil, da je vsebina tega poglavja pravzaprav bolj matematika kot fizika. To ni naključje, saj je matematika pač abeceda sodobnih kvantitativnih znanosti.

1.2 Zapisovanje količin, enote

Pri zapisovanju količin s številkami ni pomembna le številka ampak tudi *enota*, v kateri količino zapišemo. Višina 5 metrov in volumen 5 litrov sta oba »5«, pa hkrati dve povsem različni količini in ju ne moremo seštevati kot navadnih števil. V Sloveniji so pacienti s temperaturo 36 zdravi, v ZDA pa pri isti vrednosti ne bi bili več med živimi, saj tam telesno temperaturo merijo v stopinjah Fahrenheitov in 36 °F ustreza približno našim 2 °C. Da se izognemo neprijetnim nesporazumom ali celo usodnim napakam, moramo biti torej pri zapisu količin pozorni na oboje, na številko in enoto.

Isto količino lahko zapišemo z različnimi enotami. Dolžino mezinca na roki avtorja tega teksta lahko npr. povsem ekvivalentno zapišemo na več načinov:

$$7,62 \text{ cm} = 0,0762 \text{ m} = 7,62 \cdot 10^4 \mu\text{m} = 3 \text{ palce} ,$$

pri čemer smo upoštevali, da je starinska enota »palec« (inča) enaka 2,54 cm. Katerega od zgornjih zapisov uporabimo, je odvisno od situacije — v ZDA bi verjetno uporabili zadnjega, saj tam kratke dolžine pogosto merijo v palcih.

Velikostni red uporabljene enote lahko prilagodimo s pomočjo standardnih predpon: centimeter npr. pomeni stotina metra. Seznam najbolj pogostih predpon je prikazan v tabeli 16.2 v dodatku na strani 176. Poleg tega pri matematičnem opisovanju pride prav tudi grška abeceda, ki je prikazana v tabeli 16.3 v dodatku na strani 177. Opozorimo naj še, da v nekaterih državah namesto decimalne vejice uporabljajo decimalno piko, kar lahko povzroči dodatne nesporazume. Npr.: **huda zmeda lahko nastane, če številke z decimalno vejico vnašamo v osebni računalnik, ki je nastavljen na ameriške nastavitve.**

Po dogovoru naj bi vsi uporabljali standardizirane enote, določene v *mednarodnem sistemu enot* z okrajšavo SI (iz francoščine, *Système International d'Unités*), v katerem so osnovne enote za maso (kg), dolžino (m), čas (s), električni tok (A), temperaturo (K), množino snovi (mol), in svetilnost (cd). Ker pa je navada železna srajca, v mnogih primerih še vedno uporabljamo stare

enote. Za merjenje krvnega tlaka tako ponavadi ne uporabljamo SI enote paskal ($\text{Pa} = \text{kg}/\text{ms}^2$) ampak enoto »milimeter živega srebra« ($1 \text{ mmHg} \approx 133 \text{ Pa}$), pa še to enoto v pogovoru pogosto izpustimo in se zanašamo na to, da bomo enoto ugotovili iz konteksta. Podobnih primerov je še več in ne preostane nam drugega, kot da smo na enote vseskozi pozorni in jih nikoli ne privzamemo brez razmisleka.

Da je pazljivost pri uporabi enot izjemno pomembna, priča tudi naslednja zgodba. Leta 1999 je ameriška vesoljska agencija NASA na planet Mars poslala dragocen raziskovalni satelit Mars Climate Orbiter, ki pa je ob vstopu v Marsovo atmosfero nesrečno zgorel in razpadel. In kaj je povzročilo to nesrečo? Preprosto: program v računalniku na satelitu je narobe izračunal parametre pristanka, saj je bil napisan za podatke v SI enotah, inženirji pa so mu jih vpisali v miljah. V medicini je pazljivost pri enotah še posebej pomembna, saj je razlika med mg ali μg zdravila lahko razlika med življenjem in smrtjo pacienta.

Pogosto moramo enote iz enega zapisa pretvarjati v drugega. To najlažje naredimo tako, da v računu staro enoto nadomestimo z ustrezno količino nove enote, pri čemer pridno uporabljamo ulomkovo črto. Spodaj navajamo štiri tipične primere pretvarjanja enot.

Primer 1.1: pretvarjanje enot

Hitrost 60 km/h pretvorimo v m/s :

$$\frac{60 \text{ km}}{\text{h}} = \frac{60 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{600 \text{ m}}{36 \text{ s}} = 16,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Primer 1.2: včasih pretvarjanje v SI enote ni potrebno

Izračunajmo, kolikšno pot v pol ure naredi avtomobil, ki se vozi s hitrostjo 60 km/h . Je v tem primeru sploh potrebno enote iz km in h pretvarjati v SI enoti m in s ? Seveda ne, saj lahko kar brez pretvarjanja enot na pamet izračunamo, da je prevožena pot enaka 30 km . Pri računanju torej ravnamo po pameti in enot po nepotrebnem ne pretvarjamo v SI enote.

Primer 1.3: enote v imenovalcu zahtevajo pazljivost

Še posebej moramo biti pazljivi, če je enota v imenovalcu. Čeprav npr. brez razmišljanja vemo, da je 1 m enak 100 cm , pa moramo biti pri pretvorbi iz m^{-1} v cm^{-1} zelo pozorni:

$$1 \text{ m}^{-1} = \frac{1}{\text{m}} = \frac{1}{100 \text{ cm}} = 0,01 \text{ cm}^{-1}.$$

Če bi na hitro napisali, da je 1 m^{-1} enako 100 cm^{-1} , bi se torej zmotili kar za faktor 10000!

Primer 1.4: enote za kote

Enoto imajo tudi koti, na kar moramo biti pazljivi pri vnosu kotov v kalkulator. Najpogostejši enoti za opisovanje kotov sta stopinje (ang. okrajšava *deg*) ter radiani (ang. okrajšava *rad*). Pravemu kotu ustreza 90° oz. $\pi/2$ radianov, polnemu krogu pa 360° oz. 2π radianov, pri čemer besedo »radian« največkrat izpustimo in rečemo npr. kar »pravi kot je enak $\pi/2$ «. Če je kalkulator nastavljen na »deg«, vrednost pravega kota torej vtipkamo kot številko 90, če pa je nastavljen na »rad« pa kot številko 1,57 ($= \pi/2$).

1.3 Osnovne matematične funkcije

V tem razdelku bomo ponovili lastnosti najosnovnejših matematičnih funkcij, ki jih pogosto srečamo pri opisovanju pojavov v naravi. Grafi teh funkcij so predstavljeni na sliki 1.2.

1.3.1 Premo sorazmerje in linearna odvisnost

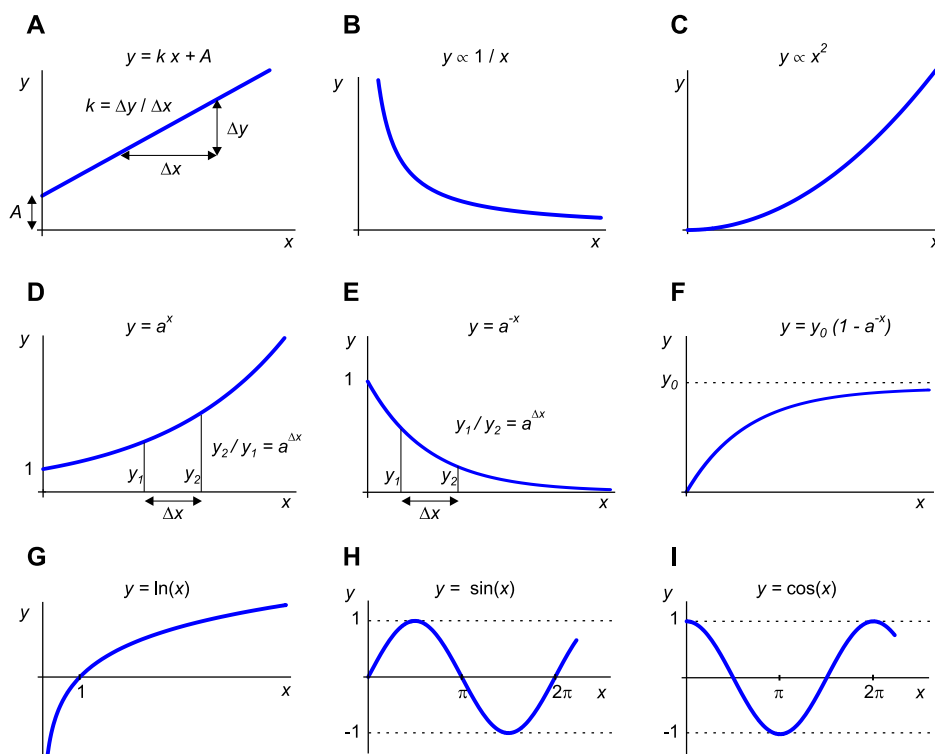
Najpreprostejša zveza med dvema količinama je premo sorazmerje. Izraz » y je sorazmeren x « v splošnem zapišemo z $y \propto x$, če pa smo še bolj natančni, pa z enačbo $y = kx$, pri čemer konstanto k imenujemo *naklonski koeficient*.

Reševanju problemov s sorazmernimi odvisnostmi je enostavno, saj pri njih deluje sklepni (križni) račun. Zavedati pa se moramo, da to preprosto orodje tudi hitro odpove: npr. že pri linearni funkciji, ki se od premege sorazmerja loči le po konstanti A in se zapiše kot

$$y = kx + A. \quad (1.1)$$

Graf linearne funkcije je prikazan na sliki 1.2A, prikaz njene uporabe v praksi pa v primeru 1.5.

Tako pri premem sorazmerju kot pri linearni funkciji velja: če se x poveča za Δx , se y spremeni za Δy ne glede na vrednost x . Naklonski koeficient je lahko pozitiven, nič ali negativen, vendar je povsod enak in ga lahko izračunamo kot $k = \Delta y / \Delta x$.



Slika 1.2: Matematične funkcije, ki jih najpogosteje srečamo pri opisovanju povezav med količinami v naravi. A) Linearna funkcija. B) Obratno sorazmerje. C) Kvadratna funkcija. D) Naraščajoča eksponentna funkcija. E) Padajoča eksponentna funkcija. F) Eksponentno približevanje od nič proti končni vrednosti. G) Logaritemska funkcija. H) Sinusna funkcija. I) Kosinusna funkcija.

Primer 1.5: linearna funkcija in pretvarjanje iz °C v °F

Izračunajmo, koliko stopinj Fahrenheita ustreza temperaturama 37 °C in 42 °C! Temperaturni lestvici sta definirani tako, da med stopinjami Fahrenheita in stopinjami Celzija velja linearna odvisnost, pri čemer je ledišče (0 °C) pri 32 °F, vrelišče vode (100 °C) pa pri 212 °F.

Če se naloge lotimo s sklepnim računom (križnim računom), hitro ugotovimo, da ne pridemo daleč, saj pridemo do deljenja z 0:

$$\begin{array}{ccc} 0^\circ\text{C} & \dots & 32^\circ\text{F} \\ 37^\circ\text{C} & \dots & x \end{array}$$

In tako smo se naučili prve lekcije: **sklepni račun (križni račun) deluje le v primeru, če sta količini premo sorazmerni, t.j. če sta linearno odvisni in obe hkrati enaki**

nič.

V našem primeru temperatura pri 0 °C ni enaka 0 °F, zato sklepni račun odpove. Naloga se zato lotimo počasi. Če temperaturo v Fahrenheitih označimo s T_F , temperaturo v stopinjah Celzija pa s T_C , lahko linearno odvisnost med obema zapišemo kot

$$T_F = k T_C + A .$$

Če si to odvisnost narišemo, hitro vidimo, da je vrednost konstante A enaka 32°F, vrednost naklonskega koeficienta k pa je

$$k = \frac{212\text{ °F} - 32\text{ °F}}{100\text{ °C} - 0\text{ °C}} = 1,8 \frac{\text{°F}}{\text{°C}} .$$

Temperaturi 37 °C torej ustreza:

$$T_F = 1,8 \frac{\text{°F}}{\text{°C}} \cdot 37\text{ °C} + 32\text{ °F} = 98,6\text{ °F} .$$

Z enakim računom izračunamo še, da temperaturi 37 °C ustreza 107,6 °F.

1.3.2 Obratno sorazmerje

Bližnji sorodnik premega sorazmerja je obratno sorazmerje, $y = 1/x$, kar preberemo » y je obratno sorazmeren x « (slika 1.2B). Če je lahko linearna odvisnost naraščajoča ali padajoča, imamo pri obratnem sorazmerju ponavadi v mislih le padajoči del: če se x poveča za nek faktor, se bo y za isti faktor zmanjšal.

1.3.3 Potenčne odvisnosti

V splošnem tako odvisnost zapišemo kot $y = x^n$, kjer je n celo število (slika 1.2C). V praksi največkrat srečamo potenci 2 in 3, saj sta povezani z geometrijo: površina telesa je sorazmerna kvadratu njegovega premera ($S \propto d^2$), volumen pa tretji potenci ($V \propto d^3$). Značilnost teh potenčnih odvisnosti je, da naraščajo precej hitreje od linearne: če neka stvar ob nespremenjeni obliki zraste za faktor 1,5, se ji površina poveča za faktor $(1,5)^2 = 2,25$, volumen pa za faktor $(1,5)^3 \approx 3,4$.

Obratna funkcija potenčni je korenska: $y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}$.

1.3.4 Eksponentna odvisnost

V naravi se pogosto zgodi, da je hitrost spreminjanja neke količine sorazmerna velikosti količine same. V takem primeru se količina spreminja eksponentno. Nazoren primer naraščajoče eksponentne funkcije srečamo pri delitvi bakterij, ki imajo dovolj hrane in prostora. Ker iz vsake bakterije ob delitvi nastaneta dve novi, bo število na novo nastalih bakterij v neki časovni enoti sorazmerno številu obstoječih. Število bakterij se bo torej v tem primeru povečevalo eksponentno. Izločanje snovi iz telesa lahko po drugi strani pogosto opišemo s padajočo eksponentno funkcijo: število molekul neke snovi, ki se izločijo v določeni časovni enoti, je pogosto sorazmerno koncentraciji te snovi v telesu in zaradi tega tudi številu molekul te snovi v telesu.

Naraščajočo eksponentno odvisnost zapišemo kot $y = a^x$, padajočo eksponentno pa kot $y = a^{-x}$ (slika 1.2D in E), pri čemer se konstanta a imenuje osnova. Pri tem si je vredno zapomniti, da lahko isto eksponentno odvisnost zapišemo z različnimi osnovami, najpogosteje uporabimo osnovo 2, 10 ali pa »naravno osnovo« e (e je konstanta, katere vrednost je enaka približno 2,7182...). Uporaba različnih osnov za opisovanje iste eksponentne odvisnosti je prikazana v primeru 1.6.

Pri računanju z eksponenti si pomagamo z zvezami:

$$a^0 = 1 \quad (1.2)$$

$$a^1 = a \quad (1.3)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (1.4)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (1.5)$$

$$a^n b^n = (ab)^n \quad (1.6)$$

$$a^{m+n} = a^m a^n \quad (1.7)$$

Iz zadnje od zgornjih zvez lahko izpeljemo pomembno lastnost eksponentne odvisnosti: **če se x spremeni za Δx , se vrednost y spremeni za enak faktor, ne glede na vrednost x .** Vrednost tega faktorja je enaka $a^{\Delta x}$.

Vrednost naraščajoče eksponentne funkcije z večanjem x narašča vedno hitreje, vrednost padajoče eksponentne funkcije pa vse počasneje in se počasi bliža vrednosti 0. Pogosto pa eksponentno funkcijo srečamo tudi, ko količina najprej hitro narašča, nato pa se hitrost naraščanja zmanjšuje, vrednost pa se približuje neki končni vrednosti. Tako odvisnost z enačbo zapišemo kot $y = y_0(1 - a^{-x})$, prikazana pa je na sliki 1.2F.

1.3.5 Logaritemska funkcija

Logaritem je obratna funkcija eksponentne: če je $x = e^y$, potem je $y = \ln x$. Podobno kot pri eksponentni funkciji, so tudi pri logaritemski možne različne osnove, pri čemer naravni logaritem ponavadi zapišemo kot $\ln$, desetiškega kot $\log$, dvojiškega pa kot $\log_2$.

Pri računanju z logaritmi nam pomaga zveza

$$\ln 1 = 0 \quad (1.8)$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad (1.9)$$

$$\ln a^n = n \ln a \quad (1.10)$$

Iz zadnje od zgornjih zvez vidimo, da je vrednost logaritma sorazmerna vrednosti v eksponentu, zaradi česar logaritem pogosto uporabljamo pri opisovanju količin z velikim razponom možnih vrednosti. Lep primer uporabe logaritemske lestvice je vrednost pH, ki meri kislost oziroma bazičnost raztopine in je povezana s koncentracijo (aktivnostjo) H^+ ionov v raztopini. Koncentracije H^+ ionov v tipičnih raztopinah so lahko zelo različne, npr. od približno 10^{-11} mol/l v milnici do več kot 10^{-3} mol/l v želodčni kislini. Glavne razlike v koncentraciji se torej skrivajo v vrednostih v eksponentu, zato vrednost pH definiramo z logaritemsko lestvico:

$$\text{pH} = -\log[H^+] , \quad (1.11)$$

pri čemer koncentracijo po dogovoru podajamo v mol/l. Milnica ima pH torej 11, želodčna kislina pa 3, kar je za uporabo veliko bolj praktično od zapisa z eksponenti. Vrednost pH navadne vode je približno 7, kar pomeni da je koncentracija vodikovih ionov v vodi približno 10^{-7} mol/l.

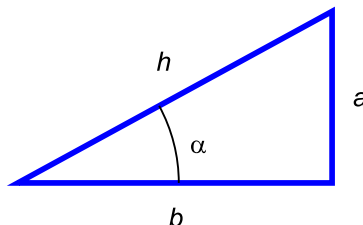
1.3.6 Kotne funkcije

Kotne funkcije $\sin$, $\cos$ in $\tan$ srečamo pri geometriji, ko računamo razmerja stranic v pravokotnem trikotniku:

$$\sin \alpha = \frac{a}{h} \quad (1.12)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{h} \quad (1.13)$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b} \quad (1.14)$$



Funkciji $y = \sin x$ in $y = \cos x$ sta prikazani na slikah 1.2H in 1.2I. Vidimo, da je njuna največja vrednost 1 najmanjša pa -1 . Pri kotu 0 je vrednost sinusa enaka 0, vrednost kosinusa pa 1.

Kotne funkcije so periodične, velja npr. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, zato jih v fiziki uporabljamo tudi za opisovanje periodičnih pojavov.

1.3.7 Enote v enačbah in matematičnih funkcijah

Enote so neločljiv del zapisa količin, zato imajo enačbe s količinami smisel le, če je na obeh straneh enačaja tudi ista enota. Zapis $y = x$ tako nima smisla, če je x enak 1 m, y pa je 1 s. Če količine v enačbah med seboj kombiniramo, se bo enako zgodilo tudi z enotami. Če npr. velja $k = \Delta x / \Delta t$ in je x podan v metrih, t pa v sekundah, bo imel tudi k enoto in sicer m/s.

Nekatere matematične funkcije (npr. eksponentna, logaritemska in kotne funkcije) delujejo na številih, zato moramo biti pri njihovi uporabi za opisovanje količin previdni. Vrednost 2^x lahko izračunamo, če je x številka in nima enote, ne pa tudi če je x količina z enoto, npr. $x = 1$ cm. Pri opisovanju naravnih pojavov zato zveze med količinami ponavadi srečamo v obliki, pri kateri se enote v argumentih funkcij pokrajšajo, npr.

$$y = y_0 \ln \frac{x}{x_0}, \quad y = y_0 e^{-t/\tau} \quad \text{ali} \quad y = y_0 \sin(\omega t),$$

kjer so konstante x_0 , τ in ω konstante podane v ustreznih enotah, da se enote v argumentih funkcij pokrajšajo (npr. x_0 v m, τ v s in ω v 1/s). Konstanta y_0 ima enako enoto kot količina y , zato je na obeh straneh enačaja enaka enota. Uporaba eksponente in logaritemske funkcije je podrobneje predstavljena še v primerih 1.6 in 1.8.

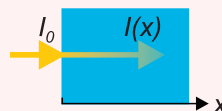
Čeprav naj bi se vedno držali matematično natančnega zapisa, pa kljub temu v matematičnih funkcijah včasih »pozabimo« na enoto, oz. jo pri računanju preprosto izpustimo. To lahko naredimo le, če se iz konteksta dobro razume, v kateri enoti je bila količina zapisana. En tak primer smo srečali pri definiciji vrednosti pH (En. 1.11), kjer je bilo po definiciji potrebno koncentracijo v enačbo vstaviti v enoti mol/l. Če bi koncentracijo vstavili npr. v mmol/l, bi seveda dobili napačen rezultat.

Primer 1.6: absorpcijski zakon in eksponentno padanje

Poglejmo si primer uporabe eksponentne funkcije v praksi. Zapisali bomo t.i. absorpcijski zakon, ki ga bomo kasneje podrobneje obravnavali v poglavju o prehajanju svetlobe skozi raztopine. Absorpcijski zakon pravi, da pri potovanju svetlobe skozi razto-

pino njena jakost pada eksponentno s prepotovano razdaljo. V literaturi absorpcijski zakon zapisujejo na več različnih, a ekvivalentnih načinov:

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x} = I_0 2^{-x/x_{1/2}} = I_0 10^{-\epsilon c x},$$



pri čemer jakost vpadne svetlobe označimo z I_0 . Zakon smo zapisali s tremi različnimi osnovami, v vsakem zapisu pa je tudi druga konstanta, s katero opišemo, kako močno se svetloba absorbira v izbrani raztopini:

- μ je absorpcijski koeficient raztopine,
- $x_{1/2}$ je razpolovna debelina v raztopini,
- ϵ je ekstinkcijski koeficient raztopine, c pa je njena koncentracija.

Vsi trije zapisi so povsem ekvivalentni in uporabljamo lahko katerega koli. V fiziki se npr. najpogosteje uporablja zapis z naravno osnovo, v kemiji pa z desetiško. Poglejmo si še nekaj lastnosti zgornjih zapisov.

- Ker morajo biti eksponenti brez enot, lahko iz zgornjih zapisov brez težav ugotovimo, v kakšnih enotah so podane konstante. Ker se razdalja x ponavadi meri v m, koncentracija pa v mol/l, mora biti enota μ enaka m^{-1} , enota $x_{1/2}$ enaka m, enota ϵ pa enaka $\text{l}/(\text{m} \cdot \text{mol})$.

- Kaj nam pove vrednost razpolovne debeline $x_{1/2}$?

To je ravno razdalja, na kateri se jakost svetlobe zmanjša za polovico. Če namreč v enačbo vstavimo $x = x_{1/2}$, dobimo

$$I = I_0 2^{-1} = \frac{1}{2} I_0.$$

- Za kolikšen faktor se spremeni jakost svetlobe po tem, ko v raztopini prepotuje razdaljo treh razpolovnih debelin?

Na tako vprašanje znamo odgovoriti kar brez uporabe enačb! Vsakič, ko svetloba po raztopini prepotuje razdaljo enako razpolovni debelini, se njena jakost prepolovi. Po prepotovanih treh razpolovnih debelinah se bo jakost svetlobe torej trikrat prepolovila. Ker velja $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, se torej po prepotovanih treh razpolovnih debelinah jakost svetlobe zmanjša za faktor 8.

- Izračunajmo še zvezo med absorpcijskim koeficientom in razpolovno debelino. Če v zvezi

$$I_0 e^{-\mu x} = I_0 2^{-x/x_{1/2}}$$

pokrajšamo I_0 , obe strani enačbe logaritmiramo ter ob tem upoštevamo $\ln a^m = m \ln a$, dobimo

$$\ln e^{-\mu x} = \ln 2^{-x/x_{1/2}} \Rightarrow -\mu x \ln e = -x/x_{1/2} \ln 2.$$

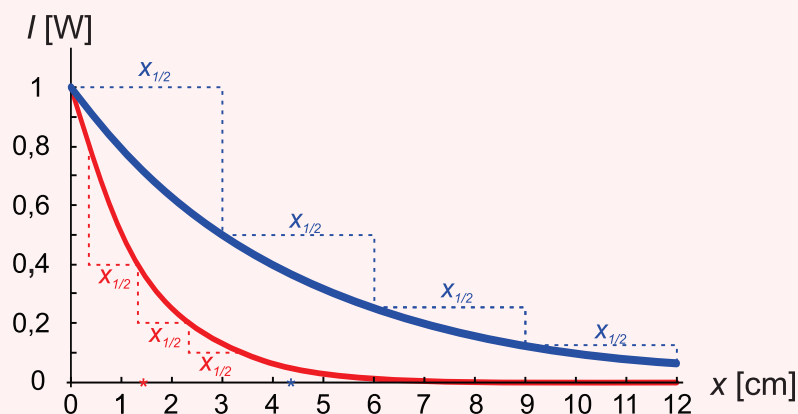
Ko na obeh straneh pokrajšamo x in upoštevamo $\ln e = 1$, dobimo zahtevano zvezo

$$\mu = \frac{\ln 2}{x_{1/2}}.$$

Absorpcijski koeficient in razpolovna debelina sta torej obratno sorazmerna. Večja kot je absorpcija v raztopini, večji je njen absorpcijski koeficient in krajša je razpolovna debelina.

- Poglejmo si še primer grafa, ki prikazuje pojevanje intenzitete žarka svetlobe, ki potuje po namišljeni raztopini. Začetna jakost svetlobe naj bo $I_0 = 1$ W.

Modra črta prikazuje primer za raztopino, v kateri je razpolovna debelina enaka $x_{1/2} = 3$ cm. Intenziteta se torej na vsake 3 cm prepolovi: pri 3 cm je $I = 0,5$ W, pri 6 cm je $I = 0,25$ W itd. Absorpcijski koeficient je v tem primeru enak $\mu = \frac{\ln 2}{x_{1/2}} = 0,23 \text{ cm}^{-1}$.



Rdeča črta prikazuje primer, ko se koncentracija raztopine trikrat poveča in je zato absorpcija v raztopini večja. Jakost o zato pada *hitreje*, razpolovna debelina se *zmanjša* na $x_{1/2} = 1$ cm, absorpcijski koeficient pa se *poveča* na $\mu = 0,69 \text{ cm}^{-1}$.

Zvezdici na vodoravni osi označujeta razdaljo, ki je enaka obratni vrednosti absorpcijskega koeficienta – na tej razdalji se jakost svetlobe zmanjša za faktor $e^{-1} = 1/2,718 \approx 0,37$.

1.4 Grafi, logaritemska skala in linearizacija

Grafi so eno najosnovnejših orodij kvantitativne analize, saj lahko z njimi nazorno prikažemo zveze med količinami. V tem razdelku si bomo ogledali trik, pri katerem graf s spretno spremembo skale na oseh naredimo preglednejši.

Najpogostejša sprememba skale na grafu je logaritemska, ki jo uporabimo za prikazovanje podatkov, katerih vrednosti se raztezajo čez nekaj redov velikosti (spomnimo se, da smo zaradi enakega razloga tudi za pH uporabili logaritemsko lestvico). Pri t.i. semi-log grafih je logaritemska le ena os, pri log-log grafih pa sta logaritemski obe osi.

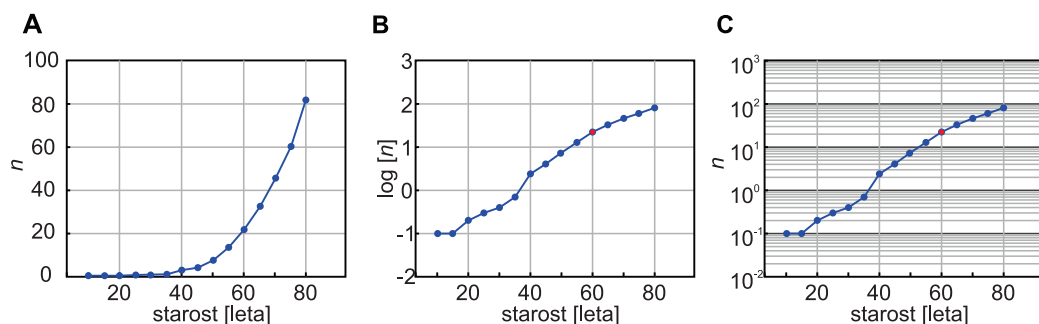
Uporabo logaritemske skale si bomo najboljše ogledali na konkretnem primeru. Na sliki 1.3 so trije različni prikazi pogostosti pojavljanja raka trebušne slinavke pri ženskah v Avstraliji. Izziv pri prikazu teh podatkov je, da se pogostost pojavljanja raka za različne starosti zelo razlikuje: do 40. leta je pogostost pod 1 primerom na 100.000 oseb, do 80. leta pa naraste na skoraj 100 primerov na 100.000. Če graf narišemo z navadno skalo (slika 1.3A), je iz njega zato nemogoče razlikovati vrednosti pod 40. letom, saj so si vse zelo blizu. Temu se izognemo, če na navpično os nanašamo logaritemsko skalo, kar lahko naredimo na dva načina: na navpično os nanašamo vrednosti $\log(n)$ in uporabimo linearno skalo (slika 1.3B), ali pa uporabimo kar logaritemsko skalo, pri kateri pomožne črte niso ekvidistantne (slika 1.3C). Drugi prikaz je celo bolj nazoren, saj je pri prvem za razbiranje vrednosti iz grafa potrebno nekaj možganske telovadbe.

Obstajajo še bolj zapletene spremembe skale, ki jih včasih uporabimo za nazoren prikaz ne-linearnih odvisnosti količin. Poglejmo npr. obratno sorazmerje in padajočo eksponentno funkcijo na sliki 1.2B oz. 1.2E. Obe funkciji sta padajoči in na pogled bi težko ločili, katera odvisnost je na katerem grafu. Edina funkcija, ki jo že na pogled ločimo od drugih je linearna funkcija. Pri ne-linearnih odvisnostih zato včasih spremenimo skalo na osi z namenom, da se nam na grafu prikaže premica. Postopek imenujemo *linearizacija*.

Pri linearizaciji funkcije izvedemo zamenjavo spremenljivk, ki nam omogoči, da tudi zapletene odvisnosti na grafih prikažemo kot linearne. Obratno sorazmerje $y = a/x$ npr. lineariziramo tako, da namesto y v odvisnosti od x narišemo y v odvisnosti od nove spremenljivke z , pri čemer je $z = 1/x$. Ko vlogo neodvisne spremenljivke prevzame z , dobi obratno sorazmerje natanko obliko linearne funkcije, pri čemer je vrednost konstante A enaka 0, vrednosti naklonskega koeficienta k pa ustreza konstanta a :

$$y = a \frac{1}{x} + 0$$
$$y = kz + A$$

Ne samo, da se bo na grafu na ta način izrisala premica, iz njenega naklona bomo torej lahko celo neposredno razbrali vrednost konstante a (slika 1.4A).



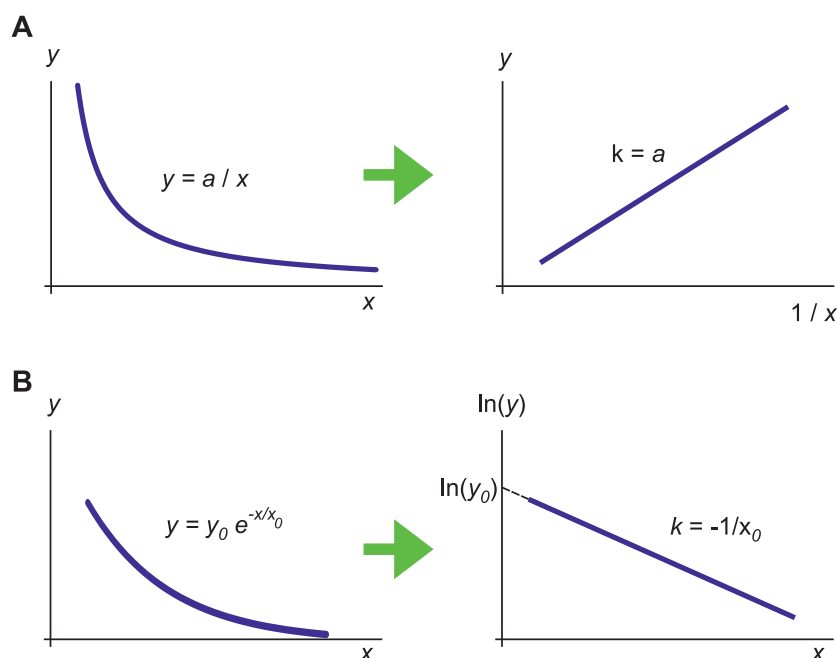
Slika 1.3: Primer uporabe logaritemske skale. Vsi trije grafi prikazujejo isto odvisnost: pogostost pojavljanja raka trebušne slinavke v odvisnosti od starosti (n označuje število primerov raka na 100.000 oseb, podatki so za ženske v Avstraliji in so povzeti po [2]). A) Graf z linearnima osema. Iz njega se lepo vidi, koliko primerov raka je pričakovati pri starostih nad 50 let, podatki za vse nižje starosti pa so tako blizu ničle, da razlik med njimi iz grafa ne moremo razbrati. B) Iste podatke narišemo z logaritmiranjem, t.j. na navpično os ne nanašamo vrednosti n ampak vrednost $\log(n)$. Na tem grafu lahko brez težav razlikujemo vrednosti podatkov na celotnem razponu, a se moramo malo potruditi, da vrednosti pravilno odčitamo. Kolikšna je npr. pogostost raka pri starosti 60 let? C) Graf lahko še lepše predstavimo z logaritemsko skalo in ustreznimi pomožnimi črtami. Glavne črte na takem grafu so pri potencah deset, pomožne pa pri ustreznih vmesnih vrednostih: med 1 in 10 so pomožne črte pri vrednostih 2,3,4,..., med 10 in 100 so pomožne črte pri 20, 30, 40 ... Na tem grafu brez težav razberemo, da je vrednost n pri 60 letih malo nad prvo pomožno črto nad 10^1 , t.j. malo nad 20. Tudi z vrednostmi pri nizkih starostih ni težav: vidimo, da pri 20 letih za rakom trebušne slinavke zboli 0.2 ženske od 100.000, pri 40 pa malo nad 2 od 100.000.

Iz eksponentne funkcije linearno dobimo z logaritmiranjem, t.j. izvedemo zamenjavo spremenljivke y v $z = \ln y$. Primerjajmo logaritem eksponentne funkcije $y = y_0 e^{-x/x_0}$ z linearno:

$$\ln y = -\frac{1}{x_0} x + \ln y_0$$

$$z = k x + A$$

Pri eksponentni funkciji torej namesto y v odvisnosti od x narišemo $z = \ln y$ v odvisnosti od x in spet se bo na grafu prikazala premica (slika 1.4B). Naklon premice k bo enak $-1/x_0$, če pa premico podaljšamo do izhodišča, pa iz njenega presečišča z navpično osjo razberemo še vrednost $\ln y_0$. Pravzaprav se



Slika 1.4: Dva primera linearizacije funkcij. A) Linearizacija obratnega sorazmerja $y = a/x$. Premico dobimo, če namesto y v odvisnosti od x narišemo y v odvisnosti od $1/x$. Naklon premice je enak a . B) Eksponentno funkcijo lineariziramo z logaritmiranjem: namesto y v odvisnosti od x narišemo $\ln y$ v odvisnosti od x . Spet lahko iz grafa neposredno razberemo vrednosti konstant eksponentne funkcije.

tudi z uporabo logaritemske skale, ki smo jo prikazali na sliki 1.3, eksponentne odvisnosti linearizirajo. Še več, če na grafu z logaritemsko lestvico vidimo premico, takoj vemo, da graf prikazuje eksponentno odvisnost. Ker je na sliki 1.3C približno premica, lahko torej sklepamo, da se prikazana pogostost raka z leti povečuje približno eksponentno. Če bi se pojavljanje raka z leti povečevalo drugače (npr. linearno, kvadratno ali kubično s časom), na logaritemskem grafu ne bi dobili premice.

Primer zapletene linearizacije je tudi znamenit Arrheniusov diagram, ki ga uporabljajo v kemiji in je predstavljen v primeru 1.7, primer 1.8 pa prikazuje uporabo log-log grafa.

Primer 1.7: Arrheniusov diagram

Arrheniusov diagram, ki ga v kemiji uporabljajo za določanje aktivacijske energije, je lep primer uporabe linearizacije grafa. Pri preprostih kemijskih reakcijah zvezo med konstanto reakcijske hitrosti k , aktivacijsko energijo W_a in temperaturo T opiše enačba

$$k = Ae^{-W_a/RT},$$

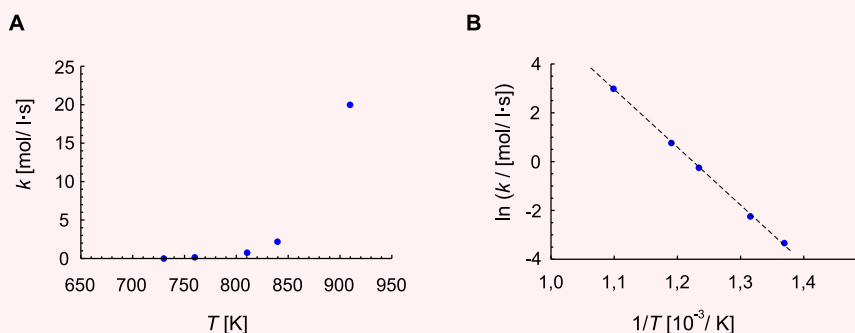
kjer je A neka konstanta, R pa plinska konstanta. V eksperimentu izmerijo k v odvisnosti od T . Če narišemo graf $k(T)$, dobimo hitro naraščajočo funkcijo iz katere bi težko kaj ugotovili (slika A, eksponent v zgornji enačbi je sicer negativen, a je tudi temperatura v imenovalcu in je zato celotna funkcija naraščajoča). Arrheniusovo enačbo lineariziramo tako, da narišemo $\ln k$ v odvisnosti od $1/T$ (slika B):

$$\ln k = -\frac{W_a}{R} \frac{1}{T} + \ln A.$$

Aktivacijsko energijo nato določimo iz grafa, saj je naklon dobljene premice enak $-W_a/R$.

Za ilustracijo si pogledjmo tipični kemijski primer: določanje aktivacijske energije za razpad etanala (povzeto po [3]). V tabeli sta najprej zapisana izmerjena k in T , za linearizacijo pa moramo izračunati še $\ln k$ in $1/T$ ter nato v graf narisati prvega v odvisnosti od drugega.

T [K]	730	760	810	840	910
k [mol/l·s]	0,035	0,105	0,789	2,17	20
$1/T$ [10^{-3} / K]	1,37	1,32	1,23	1,19	1,10
$\ln(k/(\text{mol/l} \cdot \text{s}))$	-3,4	-2,3	-0,23	0,77	3,0



A) Graf odvisnosti k od T – krivulja je naraščajoča, kaj več pa o njej na prvi pogled težko rečemo. B) Linearizirana krivulja, na kateri prikazujemo $\ln k$ v odvisnosti od $1/T$ (točke z višjo temperaturo so na tem grafu na levi strani). Na tem grafu takoj vidimo, da meritve zares ustrezajo Arrheniusovi enačbi, saj ležijo na premici. Poleg tega lahko iz naklona premice brez težav določimo aktivacijsko energijo, saj je naklon enak $-W_a/R$.

Primer 1.8: alometrija

Zanimive primere uporabe matematične analize v živem svetu najdemo v alometriji. Alometrija je veda, ki preučuje spreminjanje fizioloških značilnosti organizmov v odvisnosti od njihove velikosti. Tipično vprašanje alometrije je npr.: ali je med hitrostjo bitja srca miši in slona kakšna povezava? Izkaže se, da take povezave pogosto zares obstajajo in jih lahko v splošnem opišemo z enačbo:

$$f = am^{\alpha}, \quad (1.15)$$

kjer je f neka telesna značilnost, m je masa organizma v kg, a in α pa sta alometrični konstanti, ki definirata odvisnost med f in m .

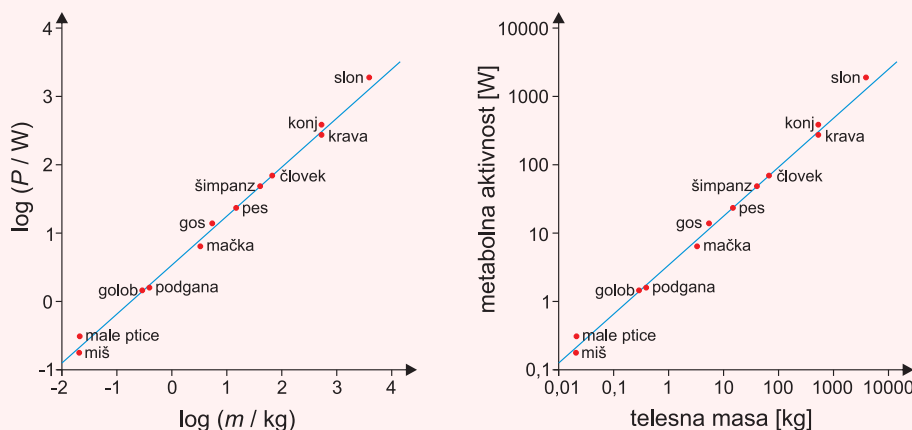
Enostaven primer alometričnih povezav so povezave med velikostjo, površino in prostornino telesa. Ker se gostota telesa z velikostjo ne spreminja bistveno, lahko predpostavimo, da je prostornina telesa kar približno sorazmerna masi, $V \propto m$. Če predpostavimo, da oblika telesa ni bistveno odvisna od višine, velja, da je prostornina telesa sorazmerna tretji potenci višine ($V \propto h^3$), površina pa drugi ($S \propto h^2$). Za površino telesa torej velja alometrična zveza $S \propto m^{2/3}$.

Alometrične zveze najlepše prikažemo v log-log grafih, saj z logaritmiranjem En. 1.15 dobimo:

$$\ln f = \alpha \ln m + \ln a. \quad (1.16)$$

Če torej narišemo $\ln f$ v odvisnosti od $\ln m$, dobimo v grafu premico, katere naklon je enak alometrični konstanti α .

Ena bolj znanih alometričnih zakonitosti je t.i. Kleiberjev zakon, ki povezuje metabolno aktivnost organizma z njegovo maso in velja za živali od miši do slona. Spodnja slika prikazuje log-log graf Kleiberjevega zakona (povzeto po [4]; za vajo navajamo dva različna, a ekvivalentna prikaza):



Vse točke v log-log grafu padejo na premico, kar pomeni, da zveze med metabolno aktivnostjo in maso telesa niso naključne, ampak so podvržene alometrični zvezi. Dobljena premica ima naklon približno 0,75 (če po x osi premaknemo za štiri enote, se po y osi premaknemo približno za tri enote, pri čemer ena enota na log-grafu seveda

pomeni faktor 10). Od miši do slona torej velja, da je metabolna aktivnost organizma sorazmerna masi na potenco 0,75.

Zakaj je alometrični eksponent α za metabolno aktivnost ravno 0,75? Če bi predpostavili, da so vse celice v telesu živali približno enako velike in porabijo približno enako energije, bi bila energijska poraba organizma sorazmerna številu celic in posledično njegovi masi in vrednost α bi bila približno 1. Druga možnost bi bila, da je poraba energije sorazmerna sposobnosti telesa, da odvečno energijo oddaja s toploto. Po tem scenariju bi bila energijska poraba sorazmerna površini telesa, in bi bil α enak $2/3$. Dejanska vrednost je med obema ocenama in znanstveniki zadovoljive razlage Kleiberjevega zakona pravzaprav še ne poznajo.

Za vajo odčitavanja z logaritemskih lestvic poskusimo iz zgornjega grafa odčitati metabolno aktivnost konja. Iz grafa razberemo, da je ta ravno na sredini med 100 W in 1000 W. Vendar to ni 550 W, saj je skala logaritemska. Upoštevati moramo, da je konj pol enote nad 100 W in je njegova metabolna aktivnost torej $10^{2,5}$ W $\approx$ 300 W. Na srečo pa isti faktorji veljajo tudi na drugih koncih lestvice: na sredini med 1 in 10 je približno vrednost 3, med 10 in 100 približno 30 itd.

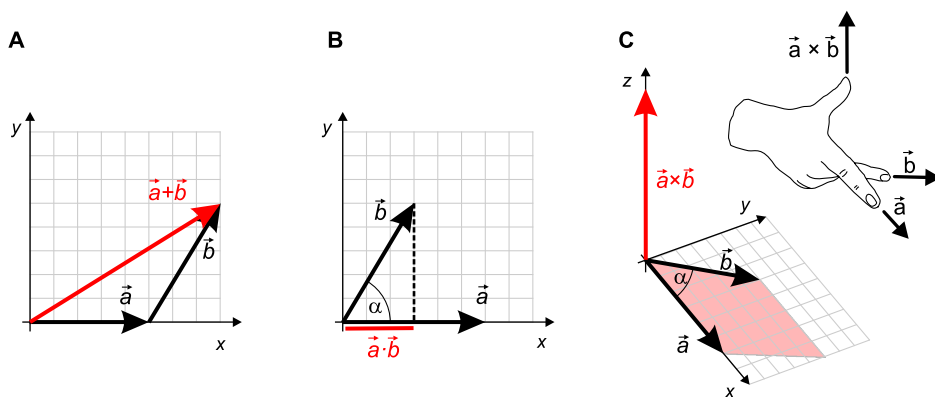
1.5 Še več matematike

Z napredkom znanosti je tudi matematika postajala vse bolj napredna in zapletena. Za obvladovanje črede ovc sta zadostovala štetje in seštevanje. Za določanje površine njiv in travnikov smo se morali naučiti množenja in geometrije. Pri opisovanju obnašanja ionov v možganih pri slikanju z magnetno resonanco, pa ne moremo brez matematične operacije, ki se jih reče vektorski produkt. Nekaterih pojavov v naravi pač ne moremo zadovoljivo opisati brez določenih naprednih matematičnih pojmov. V tem razdelku bomo zato ponovili nekaj matematike, ki je zaradi zapletenosti v kliniki sicer ne bomo srečevali prav pogosto, kljub temu pa je nepogrešljivo orodje pri razumevanju nekaterih pojavov v naravi. Najprej bomo opisali osnovne operacije z vektorji, nato pa še operaciji odvod in integral.

1.5.1 Vektorji

Nekatere količine imajo le velikost, druge pa imajo tudi smer. Prvim rečemo *skalarji* in drugim *vektorji*. Lep primer skalarne količine je temperatura, ki seveda nima smeri, primer vektorske količine pa je hitrost, saj npr. ni enako, če teče kri po aorti s hitrostjo 5 cm/s v smeri stran od srca ali proti srcu. Če lahko vrednost skalarnih količin opišemo le z eno številko, pa za vektorje potrebujemo v splošnem kar tri, saj jih zapišemo po komponentah, ki povedo

velikosti količine v smeri danih koordinatnih osi v prostoru. Vektor hitrosti v prostoru npr. zapišemo kot $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, kjer so v_x, v_y in v_z velikosti hitrosti v smereh osi x, y in z . Vektor v prostoru si najlažje predstavljamo kot puščico, katere smer je enaka smeri količine, dolžina pa njeni velikosti.



Slika 1.5: Prikaz treh najpogostejših matematičnih operacij z vektorji. A) Seštevanje vektorjev. Vektorja lahko seštejemo grafically, tako da začetek drugega vektorja postavimo na konec prvega, lahko pa jih seštevamo po komponentah. V zgornjem primeru je $\vec{a} = (5,0)$ in $\vec{b} = (3,5)$, zato je vsota enaka $\vec{a} + \vec{b} = (8,5)$. B) Skalarni produkt predstavlja dolžino projekcije enega vektorja na drugega. Izračunamo ga lahko kot $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$. C) Vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vektor, ki je pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Njegova velikost je enaka ploščini paralelograma med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ter jo izračunamo kot $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha$. Smer vektorskega produkta lahko določimo s prikazanim »pravilom desne roke«: s kazalcem *desne* roke pokažemo v smer prvega vektorja v produktu, s sredincem v smer drugega vektorja v produktu in palec nam bo pokazal v smer vektorskega produkta. Če vrstni red vektorjev zamenjamo, bo vektorski produkt kazal ravno v nasprotno smer.

Seštevanje vektorjev je enostavno, saj jih lahko seštejemo grafically z zlaganjem vektorskih puščic ene za drugo, ali pa preprosto seštejemo vsako komponento posebej (slika 1.5A). Poleg seštevanja vektorjev bomo v nekaterih situacijah srečali tudi dve malo bolj abstraktni operaciji »množenja« vektorjev, to sta skalarni in vektorski produkt.

Skalarni produkt je matematična operacija, ki izračuna dolžino projekcije enega vektorja na drugega (slika 1.5B). Tako ime je dobil zato, ker je rezultat operacije dolžina projekcije, ki je skalar. Skalarni produkt je največji, če sta vektorja vzporedna in enak nič, če sta pravokotna. Zapišemo ga s piko med vektorjema (v angleščini se mu reče tudi »dot product«), izračunamo pa s po-

močjo kosinusa kota med njima: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$.

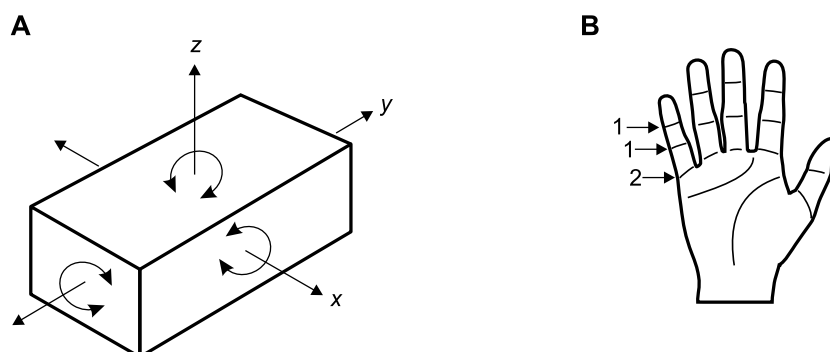
Vektorski produkt dveh vektorjev srečamo npr. pri opisu vrtenja in pa pri opisu pojavov v magnetnem polju. Rezultat vektorskega produkta je vektor, ki je pravokoten na oba vektorja v produktu, njegova velikost pa je enaka ploščini paralelograma, ki ga vektorja oklepata (slika 1.5C). Zapišemo ga s križcem med vektorjema (v angleščini se mu reče tudi »cross product«), njegovo velikost pa izračunamo s pomočjo sinusa kota med vektorjema $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha$. Vektorski produkt dveh vektorjev bo torej največji, če sta vektorja pravokotna in bo enak nič, če sta vektorja vzporedna. Za določanje smeri vektorskega produkta lahko uporabimo katero od mnogih pravil, ki so si jih izmislili v ta namen. Primer »pravila desne roke« je prikazan na sliki 1.5C. Da vektorski produkt ni najbolj običajna matematična operacija, vidimo tudi iz njegove antikomutativnosti, se pravi da je njegov rezultat odvisen od vrstnega reda vektorjev v produktu: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

1.5.2 Stopnje prostosti

Pri opisovanju gibanja pogosto srečamo pojem *prostostna stopnja*. Ta nam pove, koliko neodvisnih podatkov (koordinat) potrebujemo za opis nekega sistema. Za opis položaja točke na premici potrebujemo npr. en podatek (x), za opis položaja točke v ravnini potrebujemo dva podatka (x in y), v prostoru pa tri (x , y in z). Če opisujemo gibanje razsežnega predmeta, poleg treh podatkov o njegovem položaju v koordinatnem sistemu v splošnem potrebujemo še tri podatke o njegovi orientaciji v prostoru (slika 1.6A). O prostostnih stopnjah govorimo tudi pri opisovanju možnih premikov sklepov – gibanje dveh sklepov na prstu roke je omejeno le na eno prostostno stopnjo, najnižji sklep pa omogoča gibanje v dveh smereh (slika 1.6B).

1.5.3 Odvod in integral

Ko smo se v srednji šoli učili o odvodu in integralu (t.j. o diferencialnem računu), sta se nam zdela predvsem primera zelo abstraktne in neuporabne matematike. A v resnici je ravno obratno. Odvod in integral sta namreč nepogrešljiva pri natančnem opisovanju naravnih pojavov in ni naključje, da je bil eden njunih izumiteljev ravno Isaac Newton. Dejstvo je, da sta ti matematični operaciji malo zahtevnejši in ju zato v ordinaciji ne srečamo. Vseeno pa si bomo tu ogledali njune glavne značilnosti, saj nam bosta omogočala boljše razumevanje nekaterih izpeljav naravnih zakonov, pa tudi boljše razumevanje znanstvene literature.

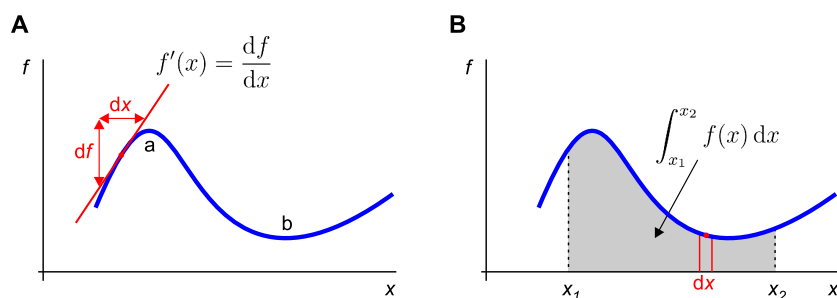


Slika 1.6: A) Za opis položaja predmeta v prostoru potrebujemo šest prostostnih stopenj, saj lahko predmet premikamo v treh neodvisnih smereh ter vrtimo okoli treh neodvisnih osti. B) Vsak od prstov na roki ima dva sklepa z eno stopnjo prostosti, enega pa z dvema. Slednjega lahko namreč premikamo v dveh neodvisnih smereh.

Odvod funkcije podaja njeno strmino, t.j. naklonski koeficient tangente na to funkcijo v izbrani točki (slika 1.7A). Z drugimi besedami, če je odvod funkcije $f(x)$ velik, se vrednost funkcije s spreminjanjem x zelo spremeni, če pa je odvod funkcije majhen, se njena vrednost s spreminjanjem x spremeni malo. Odvod funkcije $f(x)$ ponavadi označimo s črtico kot $f'(x)$, lahko pa tudi z ulomkom df/dx ali pa s piko $\dot{f}(x)$, pri čemer si diferencial dx lahko predstavljamo kot zelo kratek interval Δx . Ker je strmina funkcije $f(x)$ v splošnem odvisna od x , je seveda tudi odvod $f'(x)$ funkcija neodvisne spremenljivke x . V minimumih in maksimumih funkcije bo njen odvod enak nič, saj je tangenta na funkcijo tam vodoravna. Pri računanju odvodov najbolj pogostih funkcij si pomagamo s pravili, ki so navedena v tabeli 16.4 v dodatku na strani 178.

Določeni integral funkcije podaja ploščino med to funkcijo in vodoravno osjo na izbranem intervalu (slika 1.7B). Rezultat določenega integrala je torej številka. Določeni integral funkcije $f(x)$ na intervalu od x_1 do x_2 zapišemo kot $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$. Pri računanju določenih integralov si pomagamo z operacijo, ki je obrata odvajanju: $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1)$, kjer je $F(x)$ t.i. nedoločeni integral, ki je obratna funkcija odvoda: $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F(x) = \int f(x) dx$. Pri računanju integralov najbolj pogostih funkcij si torej pomagamo s obratnimi pravili, kot pri odvajanju (tabela 16.4 v dodatku na strani 178).

In zakaj sta odvod in integral pri opisovanju narave tako nepogrešljiva? Izkaže se, da so linearne zveze v fizikalnih zakonih, ki smo se jih učili v osnovni in srednji šoli, le približki dejanskih zvez, ki jih pravilno zapišemo z odvodom in integralom. Vsi npr. poznamo znano zvezo med potjo, hitrostjo in



Slika 1.7: A) Odvod funkcije $f(x)$ je enak njeni strmini, t.j. naklonskemu koeficientu tangente na funkcijo. Odvod funkcije v dani točki je torej enak spremembi vrednosti funkcije (df) na zelo kratkem intervalu (dx): $f'(x) = df/dx$. Če funkcija narašča, je odvod pozitiven, če pa pada, je negativen. V ekstremih funkcije je njen odvod enak nič (točki a in b). B) Določeni integral funkcije je enak ploščini pod to funkcijo na danem intervalu. Ta ploščina je enaka vsoti ploščin pravokotnikov z zelo kratkimi stranicami dx , pri čemer je ploščina enega takega pravokotnika pri izbranem x enaka $f(x) dx$.

časom: $v = s/t$ oziroma $s = vt$, vendar pa je ta zveza uporabna le, če je hitrost konstantna (kar se v praksi zgodi redko). Če se hitrost s časom spreminja, moramo njeno vrednost izračunati kot $v = ds/dt$, prepotovano pot pa s pomočjo integrala $s = \int_{t_1}^{t_2} v dt$. Podobno je tudi z mnogimi drugimi zvezami med količinami, ki jih bomo srečali pri medicini, npr. z zvezo med prostornino vdihanega zraka in hitrostjo dihanja (pretokom), ki jih v kliniki analiziramo s postopkom imenovanim *spirometrija* (primer 1.9).

Primer 1.9: zveza med prostornino in pretokom vdihanega zraka

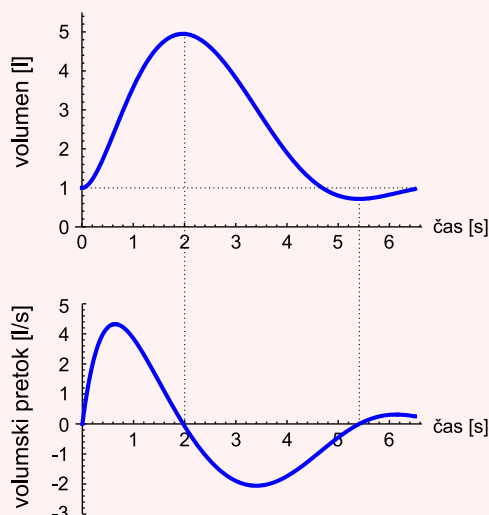
Za razumevanje dihanja moramo dobro razumeti zvezo med prostorninskim pretokom zraka v pljuča in prostornino vdihanega zraka, ki se v kliniki analizira pri postopku imenovanem *spirometrija*. Spoznali bomo, da te zveze ne moremo zadovoljivo opisati brez poznavanja odvoda in integrala.

Med spirometrijo pacient diha v napravo imenovano spirometer, ki določi prostornino vdihanega zraka (V , v litrih) in prostorninski pretok dihanja (Φ_V , v litrih na sekundo), na osnovi katerih nato zdravnik pulmolog sklepa o stanju pacientovih pljuč. Spirometer lahko izmeri le eno količino, drugo pa izračuna iz izmerjene, saj sta vdihnjena prostornina in pretok tesno povezana. Če bi npr. 2 s vdihavali s pretokom 2 l/s, bi se nam prostornina pljuč povečala za 4 l. Velja tudi obratno: če bi se nam prostornina pljuč v 2 s povečala za 4 l, bi lahko sklepali, da je bil pretok zraka med dihanjem 2 l/s. Sklepamo torej, da je med vdihnjeno prostornino zraka in njegovim pretokom

povezava:

$$\Phi_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} \text{ oz. } \Delta V = \Phi_V \Delta t. \quad (1.17)$$

Pri svojem razmisleku smo nehote predpostavili, da je prostorninski pretok *konstanten*. Pa je res? Spodnja slika prikazuje dejanske spirometrične meritve:



Vidimo, da prostorninski pretok v resnici sploh ni konstanten, ampak je funkcija časa $\Phi_V(t)$ in se med vdihom spreminja vse od 0 l/s do 4,5 l/s. Katero vrednost pretoka moramo torej pri izračunu povečanja prostornine pljuč vstaviti v En. 1.17?

Z enačbama 1.17 torej ne moremo dobro opisati zveze med vdihnjeno prostornino in pretokom, saj sta preveč poenostavljeni in predpostavljata, da je pretok zraka konstanten. V naravi pa so količine redko konstantne, zato naš preprost linearen opis odpove. Iz zagate nas seveda rešita odvod in integral: En. 1.17 velja tem bolje, čim krajši interval Δt dihanja opazujemo, saj se v zelo kratkem času prostorninski pretok pač ne bo veliko spremenil. Vidimo, da je v splošnem prostorninski pretok pravzaprav odvod prostornine po času, vdihnjena prostornina pa je integral prostorninskega pretoka. Zvezo med njima moramo torej napisati kot

$$\Phi_V = \frac{dV}{dt} \text{ oz. } \Delta V = \int_{t_1}^{t_2} \Phi_V dt, \quad (1.18)$$

kjer smo z ΔV označili prostornino, ki jo vdihnemo med časom t_1 in časom t_2 .

Naša razumevanje odvoda se seveda lepo sklada z zgornjo sliko: ko prostornina narašča, je pretok pozitiven, ko prostornina pada, je pretok negativen in ko je prostornina maksimalna ali minimalna, je pretok enak nič.

Opozorimo naj še, da znamo integrale in odvode enostavno izračunati le za najpreprostejše funkcije, ki so predstavljene v tabeli 16.4 v dodatku na strani 178. V resnici pa se pogosto zgodi, da količin v naravi s preprostimi funkci-

jami kot so e^x , $\sin x$, x^n ipd. sploh ne moremo opisati. Tudi v takih primerih zveze z odvodom in integralom veljajo, le računanje z njimi je težje. V primeru s spirometrijo enačba 1.18 velja, pa čeprav izmerjenih $\Phi_V(t)$ in $\Delta V(t)$ sploh ne znamo zapisati s pomočjo enostavnih funkcij. Računanje integralov in odvodov pa ne predstavlja težave za računalnik v spirometru, ki brez težav na osnovi izmerjenega $\Phi_V(t)$ izračuna $\Delta V(t)$ ali obratno.

Del II

Mehanika

Poglavje 2

Gibanje

Gibanje je osnova naravnih pojavov, zato ni naključje, da so se z vprašanji gibanja intenzivno ukvarjali že stari Grki. Brez gibanja se ne bi nikoli nič zgodilo, kemijske reakcije ne bi potekale, na svetu ne bi bilo življenja in tudi nas ne, da bi o njem razmišljali. Opisovanje narave bomo zato začeli prav z opisovanjem gibanja in njegovega nasprotja ravnovesja, kasneje pa se bomo spomnili še znamenite Newtonove ugotovitve, da so za spremembe gibanja odgovorne sile in navori.

2.1 Opisovanje gibanja

Telo se giblje, če se mu s časom spreminja *položaj* v prostoru. Kako hitro se spreminja položaj opišemo s *hitrostjo*, za opisovanje sprememb gibanja pa uporabimo *pospešek*, ki pove, kako hitro se spreminja hitrost. Če se telo giblje le v eni smeri, npr. v smeri osi x , hitrost gibanja izračunamo kot majhno spremembo položaja (dx) v kratkem času (dt):

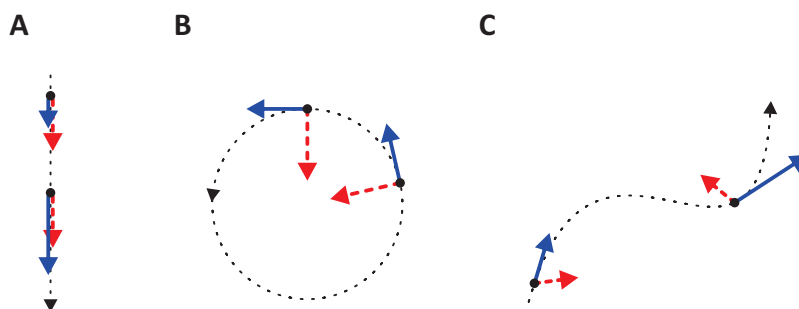
$$v = \frac{dx}{dt}, \quad (2.1)$$

pospešek pa določimo iz podatka, kolikšna je v kratkem času dt (majhna) sprememba hitrosti dv :

$$a = \frac{dv}{dt}. \quad (2.2)$$

Matematiki bi rekli, da je hitrost odvod poti po času, pospešek pa odvod hitrosti po času. Enota za hitrost je m/s , enota za pospešek pa m/s^2 . Nekaj tipičnih velikosti pospeškov iz vsakdanjega življenja je navedenih v primeru 2.1.

V treh dimenzijah so položaj, hitrost in pospešek vektorji. Položaj opišemo s krajevnim vektorjem $\vec{r}$, katerega koordinate so enake koordinatam položaja telesa v prostoru. Vektor hitrosti $\vec{v}$ kaže v smeri gibanja, vektor pospeška $\vec{a}$ pa kaže v smer spreminjanja hitrosti. Če je hitrost konstantna, pravimo, da je gibanje *enakomerno*, če pa je konstanten pospešek, pravimo, da je gibanje *enakomerno pospešeno*. Če gibanje poteka le v eni smeri, je gibanje *premo*. Posebej zanimivo gibanje je *vrtenje* oz. *kroženje*, saj se pri njem telo neprestano giblje, pa se kljub temu po določenem času spet znajde na začetku. Trije primeri gibanja so predstavljeni na sliki 2.1.



Slika 2.1: Shematični prikaz treh gibanj. Pikčasta črta prikazuje spreminjanje položaja s časom, moder vektor je hitrost, rdeč črtkan vektor pa je pospešek. A) Prosti pad. Prosti pad je premo enakomerno pospešeno gibanje, saj se pri njem telo giblje le vzdolž navpične smeri, hkrati pa je pospešek konstanten (enak je težnemu pospešku g). Ker je vektor hitrosti vedno vzporeden vektorju pospeška, se smer hitrosti ne spreminja, povečuje pa se njena velikost. B) Enakomerno kroženje. Velikost hitrosti se ne spreminja, zato pa se neprestano spreminja njena smer. Vektor pospeška je torej vedno pravokoten na vektor hitrosti; hitrost kaže v smeri gibanja, pospešek pa proti osi kroženja. C) V splošnem vektor hitrosti vedno kaže v smeri gibanja, vektor pospeška pa v smeri spreminjanja hitrosti. Pravokotna komponenta pospeška na hitrost skrbi za obračanje smeri hitrosti, vzporedna komponenta pospeška na hitrost pa za spreminjanje velikosti hitrosti. V prvi točki na sliki torej telo pospešuje in zavija v desno, v drugi pa zavira in zavija v levo.

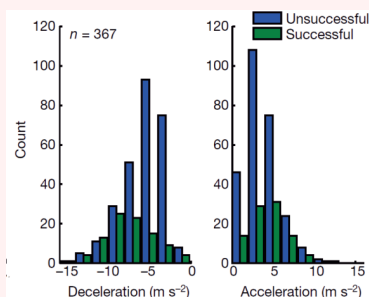
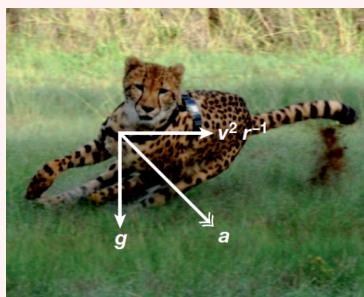
Primer 2.1: pospeški okoli nas

V vsakdanjem življenju smo si pridobili nekaj občutka za velikosti razdalj in časa (predstavljamo si, kaj sta 1 m in 1 s), o velikosti pospeškov pa moramo malo premisliti. Najbolj naraven pospešek na Zemlji je težni pospešek $g \approx 10 \text{ m/s}^2$, s katerim padamo pri prostem padu. Še bolj od prostega pada si verjetno predstavljamo pospeševanje avtomobila. Če pri tipičnem avtu pritisnemo do konca na plin, bo od 0 km/h do 100 km/h pospešil v približno 12 s. Pospešek, ki ga pri tem čutimo, je torej

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{100 \text{ km}}{\text{h} \cdot 12 \text{ s}} = \frac{100000 \text{ m}}{3600 \text{ s} \cdot 10 \text{ s}} = 2,3 \text{ m/s}^2.$$

Pospešek pospeševanja avtomobila je torej precej manjši od g . Človeško telo naj bi brez večjih težav preneslo pospeške do približno petkratnika težnega pospeška ($5g$), zato pri pospeševanju avtomobila ni nevarnosti, da bi se zaradi prevelikega pospeška onesvestili. Drugačna zgodba je pri nesreči. Če se z veliko hitrostjo zaletimo v oviro, se lahko ustavimo v zelo kratkem času in ob tem doživimo ogromen pospešek (pojemek).

Dobri atleti lahko ob začetku teka dosežejo celo nekaj večji pospešek kot navadni avtomobili. Še boljši tekač od ljudi je gepard in nedavna raziskava njegovega teka je pokazala zanimivo podrobnost: za uspešen lov gepard ne potrebuje le velike končne hitrosti teka, ampak predvsem velike pospeške pri pospeševanju, zavijanju in zaviranju (več kot $10g$, glej sliko). Ta ugotovitev niti ni tako presenetljiva, če se spomnimo taktike bega pri mnogih živalih, ki ni le doseganje velike hitrosti, ampak predvsem hitro in nepričakovano zavijanje sem ter tja.



Gepardu so za vrat pritrdili senzorje, ki so natančno beležili njegovo gibanje. Po analizi 367 lovskih tekov se je izkazalo, da je bila uspešnost lova bolj kot s samo hitrostjo teka povezana z doseganjem velikih pospeškov in pojemkov med lovom [5].

2.2 Vrtenje

Vrtenje oz. kroženje je posebna vrsta gibanja (slika 2.1B), ki ga pogosto srečamo, zato si ga oglejmo bolj natančno. Vrtenje je podobno kroženju, le da o

vrtenju ponavadi govorimo, če se telo vrti okoli osi, ki telo prebada, pri kroženju pa telo kroži okoli osi, ki ne gre skozi telo. Vrtiljak se vrti, otrok, ki sedi na vrtiljaku, pa kroži okoli osi vrtiljaka.

Čeprav gre pri vrtenju za gibanje v ravnini in se telesu torej hkrati spreminjata koordinati x in y , pa lahko položaj vrtečega se telesa enolično opišemo tudi le z enim samim parametrom, s kotom zasuka ϕ (tako gibanje ima torej le eno prostostno stopnjo). Vpeljemo lahko tudi *kotno hitrost* ω , ki opisuje, kako hitro se spreminja kot, ter *kotni pospešek* α , ki opisuje, kako hitro se spreminja kotna hitrost:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \quad \text{in} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} . \quad (2.3)$$

Če kote merimo vadianih, pri katerih enote ne pišemo, je enota za kotno hitrost s^{-1} (radian na sekundo), enota za kotni pospešek pa s^{-2} (radian na kvadratno sekundo).

Zveze med kotom, kotno hitrostjo in kotnim pospeškom (ϕ, ω in α) so enake, kot zveze med potjo, hitrostjo in pospeškom pri premem gibanju (x, v in a). Izkaže se, da je analogija med kotnimi in premimi količinami splošna, in da lahko vse enačbe za premo gibanje enostavno prepišemo v enačbe za vrtenje, pri čemer uporabimo analogije

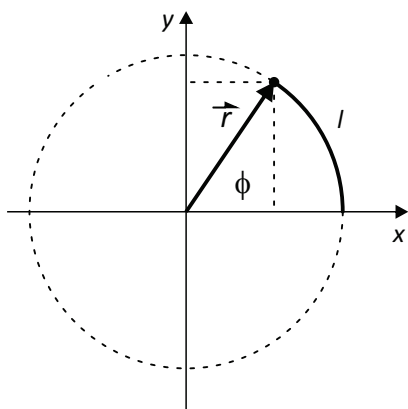
$$x \rightarrow \phi , \quad v \rightarrow \omega \quad \text{in} \quad a \rightarrow \alpha . \quad (2.4)$$

Če npr. pri enakomerno pospešenem gibanju prepotovano pot izračunamo kot povprečna hitrost krat čas, $x = \bar{v}t$, lahko pri enakomerno pospešenem vrtenju opravljen kot izračunamo iz povprečne kotne hitrosti: $\phi = \bar{\omega}t$. Drug primer: ker pri enakomerno pospešenem premem gibanju pot narašča po enačbi $x = \frac{1}{2}at^2$, pri enakomerno pospešenem vrtenju kot narašča po enačbi $\phi = \frac{1}{2}\alpha t^2$. Analogijo med vrtenjem in premim gibanjem bomo kasneje še večkrat srečali.

Pri enakomernem kroženju se velikost hitrosti ne spreminja, neprestano pa se spreminja njena smer (slika 2.1B). Strogo vzeto je torej enakomerno kroženje pospešeno gibanje. Pospešek, ki spreminja smer vektorja hitrosti, kaže proti osi vrtenja, zato ga imenujemo *radialni pospešek* a_r . Izkaže se, da je velikost radialnega pospeška sorazmerna kvadratu kotne hitrosti in radiju kroženja (glej MaFijski primer 2.1):

$$a_r = r\omega^2 . \quad (2.5)$$

Kot bomo videli kasneje, je ta rezultat zelo pomemben za razumevanje delovanja osnovnega laboratorijskega aparata, *centrifuge* (primer 2.3).



Slika 2.2: Pri kroženju je položaj telesa enoznačno določen z radijem kroženja r in s kotom ϕ . Kot po dogovoru merimo od osi x v obratni smeri urnega kazalca. Kotu ϕ ustreza dolžina loka $l = r\phi$ (kot moramo pri tem seveda meriti v radianih). Med kotom ϕ in koordinatama x in y veljata zvezi $x = r \cos \phi$ in $y = r \sin \phi$. Ker je radij konstanten, se pri gibanju spreminja le ϕ , zato je kroženje gibanje z eno prostostno stopnjo.

Pri kroženju lahko definiramo še obhodni čas t_0 , to je čas, ki ga telo potrebuje za en obrat, ter frekvenco vrtenja, ki pove koliko obratov naredi v časovni enoti. Frekvenca je obratna vrednost obhodnega časa, $\nu = 1/t_0$. Enota za frekvenco je ponavadi Hertz, $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$, pogosto pa srečamo tudi RPM, to je **r**otations **p**er **m**inute oz. obrati na minuto. Iz dejstva, da en obrat ustreza obratu za kot 2π , ugotovimo zvezo med frekvenco in kotno hitrostjo:

$$\omega = 2\pi\nu, \quad (2.6)$$

pri čemer je tako izračunana kotna hitrost izražena v radianih na sekundo oz. s^{-1} .

Bolj kot je neka točka oddaljena od osi vrtenja, večjo krožnico opisuje pri vrtenju. Pri dani kotni hitrosti vrtenja se torej bolj oddaljene točke gibljejo z večjo obodno hitrostjo kot točke bližje osi. S pomočjo geometrije (slika 2.2) lahko izpeljemo zveze med kotnimi in obodnimi količinami:

$$l = r\phi, \quad v = r\omega \quad \text{in} \quad a_t = r\alpha. \quad (2.7)$$

Tu je l dolžina loka na krožnici, ki ustreza kotu ϕ , r je radij krožnice, v pa obodna hitrost. Naj opozorimo, da moramo v zgornji enačbi kot ϕ meriti v radianih. Če se zavrtimo za en cel krog, opravimo kot $\phi = 2\pi$ in pot $l = 2\pi r$. Pospešek a_t je tangencialni pospešek, ki je prisoten pri neenakomernem kroženju. V takem primeru se namreč poleg smeri hitrosti spreminja tudi njena

velikost, za kar pa poskrbi ravno tangencialni pospešek, ki kaže v smeri gibanja, se pravi v smeri tangente na krožnico. Pri enakomernem kroženju je ω konstanta, $\alpha = 0$, zato velja tudi $a_t = 0$.

Primer 2.2: zobni sveder

Zobni sveder se lahko vrti s frekvenco več kot 250 000 RPM. Izračunajmo obodno hitrost površine svedra, če je radij svedra 0,5 mm?

Iz zvez med obodnimi in kotnimi količinami (en. 2.7) izračunamo

$$v = r\omega = r2\pi\nu = \frac{2\pi \cdot 0,0005 \text{ m} \cdot 250000}{60 \text{ s}} = 13 \text{ m/s} .$$

Za vajo izračunajmo še, koliko obratov naredi sveder med ustavljanjem, če se od polne hitrosti do mirovanja ustavi v dveh sekundah? Predpostavimo, da se ustavlja enakomerno pojemajoče.

Ker se sveder ustavlja enakomerno pojemajoče, je njegova povprečna kotna hitrost ravno polovica začetne, celotni kot, ki ga naredi pri ustavljanju, pa lahko po analogiji z enačbo $s = \bar{v}t$ izračunamo z $\varphi = \bar{\omega}t = 2\pi\bar{\nu}t$. Ker en obrat ustreza kotu 2π radianov, lahko število obratov med ustavljanjem izračunamo iz

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\bar{\omega}t}{2\pi} = \bar{\nu}t = \frac{125000 \cdot 2 \text{ s}}{60 \text{ s}} = 4167 .$$

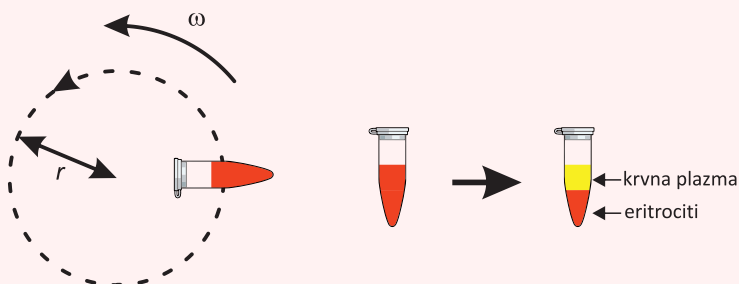
Če bi se sveder zares ustavljal tako dolgo, bi lahko torej med ustavljanjem izvrtal še kar precejšnjo luknjo.

Primer 2.3: centrifuga

Centrifuga je ena najosnovnejših laboratorijskih naprav. Uporabljamo jo za ločevanje delcev ali raztopin glede na gostoto: če epruveto z raztopino zavrtimo, jo izpostavimo radialnemu pospešku in gostejši deli raztopine bodo potonili proti dnu epruvete, redkejši pa ostali zgoraj. Podobno bi se zgodilo tudi zaradi teže, le da je lahko radialni pospešek veliko večji od težnega in zato ločevanje v centrifugi poteka veliko hitreje.



Različni postopki zahtevajo različno velike radialne pospeške. Za ločevanje rdečih krvničk od krvne plazme je ponavadi dovolj nekaj minut vrtenja pri nekaj tisoč g (rdeče krvničke so gostejše od plazme, zato končajo na dnu epruvete), pri delu s proteini pa uporabljamo ultracentrifuge, ki dosežejo več kot 100 000 RPM oziroma več kot 1 000 000 g !



Pri uporabi centrifug moramo biti pazljivi, saj imajo različne centrifuge različne radije rotorja, zato je pri različnih centrifugah za določen pospešek potrebno nastaviti različne hitrosti vrtenja. Če ima centrifuga npr. radij rotorja 25 cm in jo želimo nastaviti na radialni pospešek 2000 g , ji moramo frekvenco vrtenja nastaviti na

$$a_r = r\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_r}{r}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a_r}{r}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2000 \cdot 10 \text{ m}}{\text{s}^2 \cdot 0,25 \text{ m}}} = 45 \text{ Hz} ,$$

kar ustreza frekvenci 2700 RPM. Pri zgornjem računu smo uporabili izraz za radialni pospešek (en. 2.5) in zvezo med frekvenco in kotno hitrostjo (en. 2.6). Če bi bil radij rotorja manjši, bi morali za enak radialni pospešek nastaviti ustrezno večjo hitrost vrtenja.

Centrifuge uporabljajo tudi pri raziskavah vplivov velikih pospeškov na človeško telo, le da so take centrifuge veliko večje in se zato lahko vrtijo počasi (ameriška vesoljska agencija NASA ima npr. centrifugo s premerom več kot 15 m).

MaFijski primer 2.1: izpeljava radialnega pospeška

Za izpeljavo izraza za radialni pospešek bomo morali uporabiti vse svoje znanje matematike! Izraz bomo izpeljali za enakomerno kroženje ($\alpha = d\omega/dt = 0$), vendar velja tudi v splošnem primeru.

Radialni pospešek bomo izpeljali iz osnovnih definicij. Če hočemo izračunati pospešek gibanja, moramo vedeti, kako se pri gibanju spreminja hitrost, slednjo pa lahko izračunamo, če poznamo spreminjanje položaja. Iz slike 2.2 razberemo, da lahko položaj točke, ki v ravnini (x, y) kroži po krožnici z radijem r , zapišemo s krajevnim vektorjem

$$\vec{r} = (x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi) = r(\cos \phi, \sin \phi). \quad (2.8)$$

Vektor $(\cos \phi, \sin \phi)$ je enotski vektor, ki kaže od osi proti točki na krožnici (za vajo lahko s pomočjo Pitagorovega izreka preverite, da je dolžina tega vektorja zares enaka 1). Kot ϕ se med kroženjem spreminja s časom in sicer kot $\phi = \omega t$.

Vektor hitrosti dobimo, če krajevni vektor odvajamo po času:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\omega(-\sin \phi, \cos \phi). \quad (2.9)$$

Pri odvajanju smo upoštevali naslednje:

- vsako komponento vektorja odvajamo neodvisno
- radij kroga r je konstanta
- kot ϕ je funkcija časa, zato moramo $\cos \phi$ in $\sin \phi$ odvajati posredno, upoštevamo pa tudi $\omega = d\phi/dt$:

$$\frac{d}{dt} \cos \phi = -\sin \phi \cdot \frac{d\phi}{dt} = -\sin \phi \cdot \omega. \quad (2.10)$$

Iz dobljenega izraza za hitrost vidimo, da je velikost vektorja hitrosti enaka ωr , njegova smer pa je pravokotna na krajevni vektor $\vec{r}$. Tudi vektor $(-\sin \phi, \cos \phi)$ ima namreč dolžino 1, njegova smer pa je pravokotna smeri vektorja $(\cos \phi, \sin \phi)$. O pravokotnosti $\vec{r}$ in $\vec{v}$ se lahko prepričate tako, da vektorja skalarno pomnožite in rezultat bo enak 0.

Izračunati moramo še pospešek. Dobimo ga z odvajanjem vektorja hitrosti, pri čemer upoštevamo ista pravila kot zgoraj:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r\omega^2(-\cos \phi, -\sin \phi). \quad (2.11)$$

Z enakim razmislekom kot prej ugotovimo, da je velikost vektorja pospeška enaka $r\omega^2$, njegova smer pa je nasprotna smeri krajevnega vektorja $\vec{r}$ in torej kaže proti osi vrtenja. Pospešek je torej res »radialni« pospešek.

Poglavje 3

Vzroki gibanja in ravnovesje: sile in navori

3.1 Sile

Vprašanje o vzrokih gibanja, s katerim so se stari Grki neuspešno ubadali, je uspelo dokončno razrešiti šele Isaacu Newtonu ob koncu 17. stoletja. Newton je ugotovil, da so vzrok za spremembe gibanja *sile*, njegove ugotovitve pa še danes povzamemo v treh Newtonovih zakonih:

1. Če je rezultanta sil na telo enaka nič, se telo giblje premo enakomerno ali pa miruje.
2. Pospešek telesa a je sorazmeren rezultanti sil na telo F , sorazmernostni koeficient pa je masa telesa m :

$$\vec{F} = m\vec{a} . \quad (3.1)$$

3. Če telo 1 deluje na telo 2 s silo $\vec{F}_{12}$, potem telo 2 deluje na telo 1 z nasprotno enako silo, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

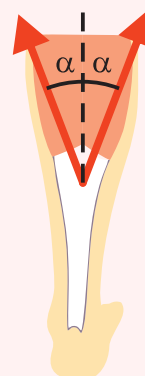
Enota za silo je newton, pri čemer iz 2. Newtonovega zakona (en. 3.1) razberemo, da velja $N = \text{kg m/s}^2$. Ne pozabimo, da rezultanto sil izračunamo kot vektorsko vsoto vseh sil na telo. Čeprav so sile definirane preko Newtonovih zakonov in je njihova glavna lastnost spreminjanje gibanja teles, pa s silami v splošnem opisujemo vsakršno mehansko delovanje telesa na telo in lahko npr. povzročajo tudi deformacije telesa (glej primera 3.3 in 3.4).

Primer 3.1: teža in masa

V vsakdanjem pogovoru pojma *teža* in *masa* pogosto uporabljamo enakovredno, vendar pa je s pojmom *teža* pri fiziki v resnici mišljena *sila teže*, do katere pride zaradi gravitacijskega privlaka. Strogo vzeto se torej masa meri v kilogramih, teža pa v newtonih. Na površini Zemlje je teža človeka z maso 100 kg enaka 981 N. Če bi ta človek potoval na Luno, bi bila njegova masa še vedno 100 kg, teža pa le še 162 N, saj je gravitacijski pospešek na površini Lune približno šest krat manjši, kot na Zemlji.

Primer 3.2: seštevanje sil mišic

V zelo poenostavljenem anatomskem modelu noge je ahilova tetiva napeta z dvoglavo mečno mišico (gastrocnemius). Kolikšna je celotna sila te mišice na ahilovo tetivo, če je vsak od krakov mišice napet s silo $F_M = 300$ N, kot med navpičnico in silama pa je $\alpha = 17^\circ$? Sili mišice kažeta vsaka v svojo smer, zato ju moramo sešteti vektorsko. V našem primeru sta sili simetrični, zato se bosta vodoravni komponenti sil odšteli, navpični pa sešteli. Iz slike razberemo, da je navpična komponenta vsake od sil $F_M \cos \alpha$ in je zato skupna sila na tetivo



$$F_{tetiva} = 2F_M \cos \alpha = 2 \cdot 300 \text{ N} \cos 17^\circ = 574 \text{ N} . \quad (3.2)$$

Primer 3.3: sila trenja

Če se telesi v stiku medsebojno gibljeta, se med njima pojavi *sila trenja*, ki nasprotuje gibanju. Do tega pride, ker na molekularni ravni površina teles ni popolnoma gladka in se med gibanjem molekule enega telesa zatikajo v molekule drugega telesa. Natančen opis trenja je izjemno zapleten, v prvem približku pa se pogosto privzame, da sila trenja ni odvisna od hitrosti gibanja ter da je sorazmerna sili, ki telesi pritiska skupaj:

$$F_t = \mu F_{\perp} , \quad (3.3)$$

kjer je $F_{\perp}$ sila pravokotna komponenta sile med telesi (sila, ki telesi pritiska skupaj), μ pa je koeficient trenja, ki je odvisen od snovi, iz katerih sta telesi, ter gladkosti njunih površin. Tipične velikosti koeficienta trenja za les na les ali jeklo na jeklo so približno 0,5, za led na led 0,05, na hrustancu kolenskega sklepa pa je koeficient trenja celo le reda velikosti 0,001. V primerjavi z lesom ali jeklom ima hrustanec mnogo bolj zapleteno strukturo in je sestavljen iz posebnih proteinov (kolagen, lubricin ...), lipidov in hialuronske kisline, ki omogočajo dobro hidracijo in s tem eno najboljših lubrikacij, kar jih najdemo naravi. Čeprav so ortopedi že zelo uspešni pri izdelovanju umetnih kostnih protez, pa je še zelo daleč do umetnega hrustanca, ki bi bil po lastnostih primerljiv z naravnim. Zato si je vredno zapomniti posledico zgornje enačbe: z naraščanjem telesne teže naraščajo sile trenje v kolenskem sklepu in s tem tudi njegova obraba.

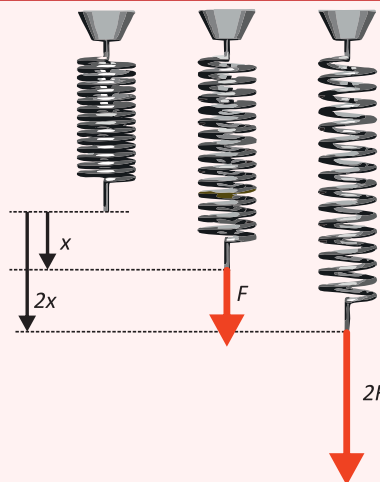
V splošnem je sila trenja lahko odvisna tudi od hitrosti gibanja (če telesi mirujeta pravimo tej sili sila *lepenja*, ki po velikosti ni enaka sili trenja), pa tudi odvisnost od gladkosti površine ni vedno intuitivna. Koeficient trenja med dvema kovinama se npr. s poliranjem površine kovine na začetku res zmanjšuje, a ko kovini spoliramo tako dobro, da na njunih površinah ni več oksidov ali kakšnih drugih atomov, se kovini ob dotiku stakneta in postaneta enotna snov zaradi česar ena mimo druge sploh ne moreta več drseti!

Primer 3.4: Hookov zakon

Zaradi delovanja sil se telesa lahko tudi deformirajo. Pri *elastičnih telesih* je velikost deformacije sorazmerna sili, kar imenujemo Hookov zakon. Šolski primer elastične deformacije je deformacija vzmeti, pri kateri se Hookov zakon zapiše kot

$$F = kx, \quad (3.4)$$

kjer je k konstanta vzmeti, x odmik vzmeti od njenega ravnovesnega stanja, F pa sila, s katero delujemo na vzmet. Bolj kot je vzmet trda, večji ima k in večja sila je potrebna za določeno deformacijo x . Kasneje bomo videli, da Hookov zakon velja tudi za bolj zapletene deformacije: npr. za upogib ali za vzvoj (torzijo) kosti.



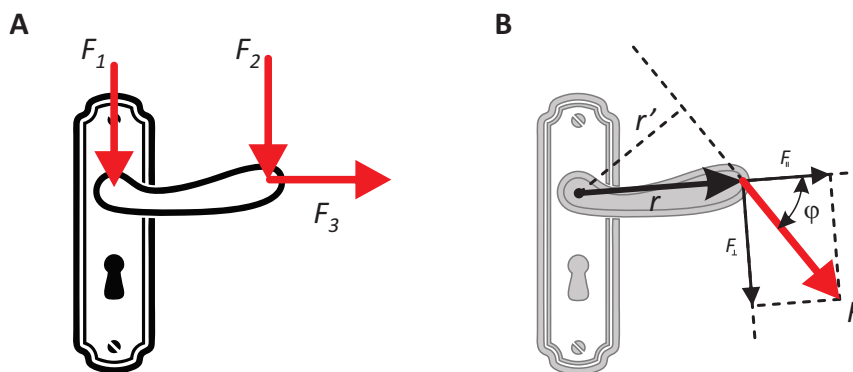
3.2 Navori

Sile torej telesa premikajo, masa pa se premikanju upira. Kako pa je s tem pri vrtenju? Iz vsakdanje izkušnje z odpiranjem kljuke na vratih vemo, da kljuke ne moremo zavrteti le z delovanjem sile, ampak mora biti ta sila tudi pravilno usmerjena (slika 3.1A). Podrobnejši razmislek nas pripelje do zaključka, da je pri vrtenju pomemben *navor*, ki je kombinacija sile, oddaljenosti prijemališča sile od osi vrtenja in njene smeri (slika 3.1B). Z enačbo navor opišemo kot

$$M = Fr \sin \varphi = Fr' = F_{\perp} r, \quad (3.5)$$

kjer smo z M označili navor, F je velikost sile, r razdalja med osjo vrtenja in prijemališčem sile (to razdaljo imenujemo tudi *ročica*), φ pa je kot med silo in vektorjem razdalje. V enačbi 3.5 smo navor zapisali tudi s pomočjo pravokotne razdalje med osjo in nosilko sile (r') ali pa s pravokotno komponento sile

($F_{\perp}$). Enota za navor je Nm. Podobno kot sile so v splošnem tudi navori vektorji (MaFijski primer 3.1), predznak navora pa je odvisen od smeri, v katero navor vrti - navora z nasprotnim predznakom telo vrtita v nasprotnih smereh.



Slika 3.1: . A) Vse tri sile na sliki so enako velike, pa vendar bo lahko le ena od njih zavrtela kljuko na vratih. Katera? B) Za vrtenje telesa je potreben *navor*, ki je odvisen od velikosti sile F , oddaljenosti njenega prijemališča od osi r ter od kota φ (En. 3.5).

V prejšnjem razdelku smo zapisali analogijo med premim gibanjem in vrtenjem. Analogija velja tudi za 2. Newtonov zakon, ki se za vrtenje glasi:

$$M = J\alpha . \quad (3.6)$$

Kotni pospešek telesa α je torej sorazmeren rezultanti navorov na telo M . Masi analogna lastnost telesa pri vrtenju je *vztrajnostni moment* telesa J , za katerega se izkaže, da je odvisen od porazdelitve mase telesa glede na os vrtenja. Čim bliže osi je masa, manjši je vztrajnostni moment in tem lažje lahko telo zavrtimo. Vztrajnostni moment v nasprotju z maso ni »notranja« lastnost telesa, ampak je odvisen od položaja osi vrtenja. Natančnejša analiza pokaže, da je vztrajnostni moment odvisen od kvadrata oddaljenosti od osi vrtenja, in da ga lahko izračunamo po enačbi

$$J = mr^2 \quad \text{oziroma} \quad J = \sum m_i r_i^2 , \quad (3.7)$$

pri čemer levi zapis velja le, če je vsa masa telesa zbrana na enaki razdalji od osi. V splošnem to ne velja in moramo uporabiti desni zapis ter pri določanju vztrajnostnega momenta telesa sešteti prispevke vseh masnih delov, ki so na

različnih razdaljah. Podobno kot masa je tudi vztrajnostni moment aditivna lastnost (primer 3.5).

Primer 3.5: polnjenje centrifuge

Ko centrifugo napolnimo z epruvetami, ji povečamo vztrajnostni moment, zato je polno centrifugo težje zavrteti kot prazno. Izračunajmo, za koliko se spremeni vztrajnostni moment centrifuge, ki jo napolnimo z 12 epruvetami z maso $m = 200 \text{ g}$? Epruvete so na radiju $r = 25 \text{ cm}$, vztrajnostni moment prazne centrifuge pa je $J_c = 0,4 \text{ kgm}^2$. Vztrajnostni moment je aditivna količina, zato lahko vztrajnostni moment epruvet izračunamo kot

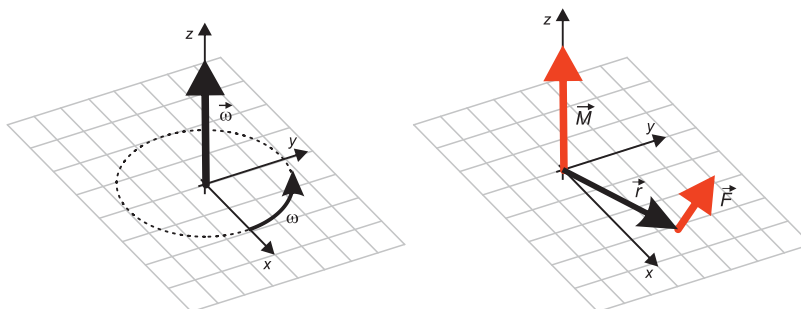
$$J_e = 12mr^2 = 12 \cdot 0,2 \text{ kg} \cdot 0,25^2 \text{ kg}^2 = 0,15 \text{ kgm}^2.$$

Vztrajnostni moment polne centrifuge je torej $J = J_c + J_e = 0,55 \text{ kgm}^2$. Če ima motor centrifuge konstanten navor, bo torej polna centrifuga na končno hitrost pospeševala $0,55/0,4 = 1,375$ krat več časa kot prazna.

MaFijski primer 3.1: kotna hitrost in navor sta v splošnem vektorja

Pri kroženju smo do sedaj govorili le o kroženju okoli ene osi. V praksi pa sile v telesu delujejo v vseh mogočih smereh, zato tudi vse ne vrtijo okoli iste osi. V takih primerih je potrebno tudi količine pri kroženju obravnavati kot vektorje. Spodnja leva slika prikazuje, kako je definiran vektor kotne hitrosti: je pravokoten na ravnino kroženja, njegova velikost pa je sorazmerna velikosti kotne hitrosti. Podobno je pri navoru: navor je vektor, katerega smer kaže v smeri vektorja kotne hitrosti, ki bi jo ta navor povzročal (spodnja desna slika). V vektorskem zapisu lahko tako navor (en. 3.5) izrazimo kar z vektorskim produktom:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (3.8)$$



Vektor pozitivne kotne hitrosti pri kroženju v ravnini $x - y$ kaže v smeri osi z . Če vektorja $\vec{r}$ in $\vec{F}$ ležita v ravnini $x - y$, bo vektor navora $\vec{M}$ v smeri osi z .

3.3 Gibalna in vrtilna količina

Newton svojih zakonov ni zapisal s pomočjo pospeškov (En. 3.1), ampak je uporabil pojma *gibalna* oz. *vrtilna* količina. Taka formulacija Newtonovih zakonov ima svoje prednosti, zato si jo je vredno ogledati.

Izračunajmo spremembo hitrosti telesa, če nanj delujemo s silo (odvodom in integralom se bomo izognili s predpostavko, da je sila konstantna). Spremembo hitrosti lahko izrazimo s pomočjo pospeška, ki pa ga lahko izračunamo iz 2. Newtonovega zakona (En. 3.1). Če sila na telo deluje čas Δt , bo sprememba hitrosti enaka:

$$\Delta \vec{v} = \vec{a} \Delta t = \frac{\vec{F}}{m} \Delta t . \quad (3.9)$$

Če v zgornji enačbi maso prestavimo k hitrosti in vpeljemo *gibalno količino* telesa

$$\vec{G} = m \vec{v} , \quad (3.10)$$

dobimo alternativni zapis 2. Newtonovega zakona:

$$\Delta \vec{G} = \vec{F} \Delta t . \quad (3.11)$$

Izraz $\vec{F} \Delta t$ imenujemo tudi *sunek sile*. Zgornjo enačbo lahko z besedami povzamemo v t.i. *zakon o ohranitvi gibalne količine*: **Sprememba gibalne količine telesa je enaka sunku sile na telo. Če je rezultanta zunanjih sil na telo enaka nič, se njegova gibalna količina ohranja.**

Analogno gibalni količini lahko vpeljemo tudi *vrtilno količino*:

$$\Gamma = J \omega \quad (3.12)$$

in 2. Newtonov zakon za vrtenje povzamemo v *zakonu o ohranitvi vrtilne količine*: **Sprememba vrtilne količine telesa je enaka sunku navora na telo. Če na telo ne delujejo zunanji navori, se mu vrtilna količina ohranja.**

Vztrajnostni moment v nasprotju z maso ni »notranja« lastnost telesa, zato se lahko med vrtenjem spreminja. To dejstvo s pridom uporabljajo drsalci med vrtenjem v pirueti: zaradi majhnega trenja na ledu med vrtenjem na telo deluje le zanemarljivo majhen zunanji navor, zato se mora vrtilna količina

ohranjati. Če drsalec med vrtenjem skrči roke, si zmanjša vztrajnostni moment, zaradi česar se mu zaradi zakona o ohranitvi vrtilne količine poveča hitrost vrtenja.

3.4 Ravnovesje, sile v telesu in težišče

V ravnovesju telo miruje, zato bo v ravnovesju pospešek telesa enak nič. Iz 2. Newtonovega zakona torej sledi, da bosta v ravnovesju vsoti vseh sil in vseh navorov na telo enaki nič:

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad (3.13)$$

in

$$\sum \vec{M}_i = 0 . \quad (3.14)$$

Enačbe za ravnovesje intuitivno pozna vsak, ki se je že kdaj usedel na prevesno gugalnico – za ravnovesje na prevesni gugalnici mora težja oseba sedeti bližje osi kot lažja, saj bo le v takem primeru navor sile teže težje osebe nasprotno enak navoru sile teže lažje osebe. Ravnovesje gugalnice je podrobneje predstavljeno na sliki 3.2, ki prikazuje vse sile, ki delujejo na gugalnico. Najprej sta tu sili, s katerima na gugalnico s silo svoje teže pritiskata navpično navzdol obe osebi (F_L in F_D). Na gugalnico mora delovati tudi neka sila navzgor, saj bo lahko le tako vsota vseh sil na gugalnico enaka nič. V našem primeru je to sila v osi (F_O), ki jo pozna vsak, ki je tja že kdaj po pomoti zatlačil prste. Ker so vse tri sile vzporedne, lahko vektorski zapis v enačbi za ravnovesje (en. 3.13) izpustimo in jo napišemo tako, da so na eni strani enačaja sile, ki kažejo v eno smer, na drugi strani enačaja pa sile v nasprotno smer:

$$F_O = F_L + F_D . \quad (3.15)$$

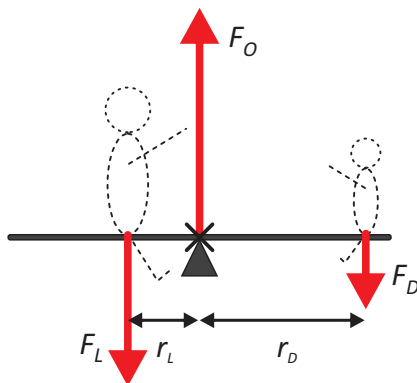
Velikost sile v osi je torej natanko vsota bremen na obeh koncih gugalnice.

Zapišimo še enačbo za ravnovesje navorov na gugalnico (en. 3.14):

$$r_L F_L = r_D F_D . \quad (3.16)$$

Navori, ki gugalnico vrtijo v desno, morajo biti torej po velikosti enaki navorom, ki gugalnico vrtijo v levo. Dolžina ročice sile v osi je nič, zato je tudi navor

sile v osi enak nič ($r_O F_O = 0$) in ta sila v enačbi za navore sploh ne nastopa. Sili teže oseb sta sorazmerni njunima masama ($F_L = m_L g$ in $F_D = m_D g$), zato lahko iz zgornje enačbe potrdimo našo gugalniško intuicijo: v ravnovesju bo razmerje oddaljenosti oseb do osi nasprotno enako njunima masam: $r_L/r_D = m_D/m_L$.



Slika 3.2: Ravnovesje gugalnice. Razmislek o silah in navorih začnemo tako, da si najprej predstavljamo vse sile, ki delujejo na gugalnico. Obe osebi na gugalnico očitno pritiskata navzdol s svojo silo teže (F_L in F_D), iz pogoja za ravnovesje pa lahko nato ugotovimo, da je sila v osi gugalnice (F_O) po nasprotno enaka vsoti sile teže obeh oseb ($F_O = F_L + F_D$). Po drugi strani mora biti zaradi ravnovesja navorov produkt razdalje od osi in teže enak pri obeh osebah ($r_L F_L = r_D F_D$).

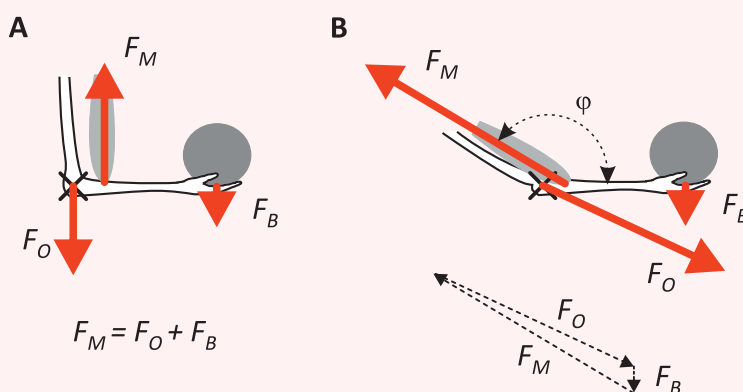
Izkaže se, da za opisovanje ravnovesja velja uporabno pravilo: navore lahko računamo glede na katerokoli os (sistem tako ali tako miruje in se ne vrti okoli nobene osi). Bralec lahko sam preveri, da bi bili rezultati za sile v ravnovesju gugalnice enaki, če bi navore računali glede na namišljeno os, ki bi jo postavili v prijemališče leve ali desne sile. Računanje ravnovesja bo ponavadi najlažje, če os postavimo v prijemališče sile, katere vrednost nas ne zanima ali je ne poznamo. Navor te sile v enačbah tako ne bo nastopal in enačbe bodo lažje za reševanje.

Povezavo med silami in navori je v tretjem stoletju pred našim štetjem poznal že Arhimed, ki je se je veliko ukvarjal z vzvodi in je dejal »Dajte mi primerno oporno točko ter dovolj dolg vzvod in premaknil bom Zemljo!« Nam bo razumevanje sil in navorov zelo pomagalo pri računanju obremenitev mišic in kosti v telesu. Skelet je namreč zelo zapleten sistem vzvodov (kosti), ki so med seboj povezani s sklepi, kitami in mišicami – v človeškem telesu je več kot 200 kosti in več kot 600 skeletnih mišic.

Četudi je največja zunanja sila na skelet sila teže, pa se izkaže, da so pri vzdrževanju ravnovesja nekateri deli telesa obremenjeni z bistveno večjimi silami. Enostaven primer računanja obremenitev v telesu je predstavljen v Primeru 3.6 in prikazuje obremenitve med ravnovesjem v roki. Čeprav so realni klinični primeri lahko mnogo bolj zapleteni, saj morajo upoštevati vse mišice in vse kosti, ponavadi pa tudi vektorsko naravo sil in navorov, je osnovni princip računanja enak kot pri gugalnici in izhaja iz pogoja za ravnovesje sil in navorov (en. 3.13 in 3.14).

Primer 3.6: ravnovesje v roki

Poglejmo si zelo poenostavljen primer analize obremenitve roke, v kateri držimo breme. Predpostavimo, da roko drži le ena mišica ter da lahko težo roke zanemarimo. Razdalja med komolcem in mišico je $r_M = 4$ cm, razdalja med komolcem in bremenom je $r_B = 40$ cm, masa bremena pa je 5 kg. S kolikšno silo je napeta mišica?



Če je roka skrčena (slika A), bosta sila bremena na roko in sila mišice na roko navpični. Če pri računanju navorov os postavimo v komolec, lahko takoj zapišemo

$$F_M r_M = F_B r_B .$$

iz česar sledi, da je razmerje velikosti sil v ravnovesju nasprotno enako razmerju oddaljenosti njunih prijemališč od komolca. Sila mišice bo torej 10 krat večja od teže bremena!

Poleg sile bremena in sile mišice na roko deluje še tretja sila! To je sila v komolcu (na sliki je označena z F_O). Njena smer in velikost sta manj intuitivni, a iz pogojev za ravnovesje lahko hitro ugotovimo, da bo morala biti v našem primeru ta sila tudi navpična (če ne bi bila, vodoravna rezultanta sil ne bi mogla biti enaka nič) in da bo po velikosti enaka razliki sile mišice in sile bremena. Sila v komolcu je torej v tem primeru 9 krat večja od teže bremena.

Situacija postane bolj zapletena, če roko iztegnemo ter je kot med mišico in roko enak $\varphi = 140^\circ$ (slika B). Sila bremena bo nespremenjena, zato pa se bo spremenil kot, pod

katerim na roko deluje sila mišice. Le-ta torej na roko ne bo delovala le v navpični ampak tudi v vodoravni smeri. Ker k navoru prispeva le navpična komponenta sile mišice (roka - ročica - je vodoravna), moramo ravnovesje navorov zapisati kot

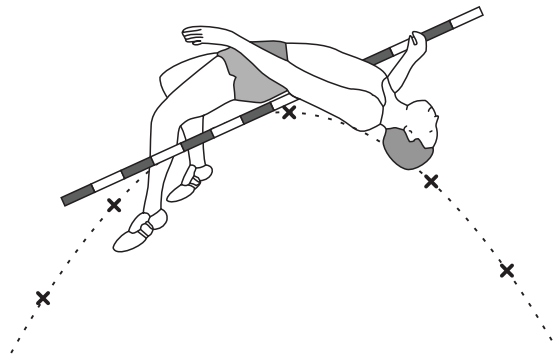
$$F_M r_M \sin \varphi = F_B r_B .$$

Ker je $\sin 140^\circ = 0,64$ bo torej sila mišice pri iztegnjeni roki še za faktor $1/0,64$ večja kot prej, oziroma bo 15,6 krat večja od sile teže bremena! Iz ravnovesja vseh treh sil sledi, da bo vodoravno komponento dobila tudi sila v komolcu, za izračun njene velikosti pa bo potrebno uporabiti znanje iz seštevanja vektorjev.

Z ravnovesjem je tesno povezan pojem *težišča* telesa, ki je definirano kot točka, v kateri bi morali podpreti telo, da se zaradi vpliva teže ne bi prekucnilo. Pri preprostih homogenih telesih si znamo položaj težišča dobro predstavljati: težišče homogene ravne palice je npr. v njenem središču. Pri zapletenejših telesih pa je pri določanju težišča potrebno malo razmisleka. V primeru gugalnice težišče ni na sredi med osebama, ampak je pomaknjeno bližje težji osebi (težišče gugalnice v ravnovesju je namreč ravno tam, kjer je podprta, v osi). Položaj težišča zapletenega telesa, ki je sestavljeno iz delov z masami m_i , lahko izračunamo s pomočjo podobnega razmisleka kot pri gugalnici. Sila podpore v težišču na telo deluje navpično navzgor in je po velikosti enaka sili teže celotnega telesa (masa celotnega telesa je $\sum m_i$). Po drugi strani iz enačbe za ravnovesje navorov sledi, da mora biti navor te sile nasprotno enak navorom sile teže vseh sestavnih delov, ne glede na to, kam postavimo izhodišče koordinatnega sistema: $\vec{r}_t \sum m_i g = \sum m_i \vec{r}_i g$ (z $\vec{r}_t$ smo označili položaj težišča, z $\vec{r}_i$ pa položaje posameznih delov telesa). Ko pokrajšamo težni pospešek, lahko izrazimo enačbo za izračun položaja težišča za poljubno zapleteno telo:

$$\vec{r}_t = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} . \quad (3.17)$$

Težišče je lahko tudi v točki izven telesa, kar dobro poznajo skakalci v višino, ki se med skokom upognejo in s tem svoje težišče postavijo čim nižje (slika 3.3). Poleg tega je težišče uporabno pri opisovanju gibanja zapletenih teles, ki ga lahko opišemo kot gibanje težišča in gibanje delov telesa glede na težišče. Pri skoku v višino se bo tako težišče skakalca, ne glede na njegove gibe, premikalo po paraboli (slika 3.3).



Slika 3.3: . Skakalec se pri skoku v višino upogne nazaj in tako zniža svoje težišče. Težišče je lahko celo izven telesa in se niti ne dvigne preko prečke. Ne glede na skakalčeve gibe med skokom se težišče giblje po paraboli, enako kot kamen pri poševnem metu.

Poglavje 4

Energija

Energija je eden najpomembnejših konceptov sodobne znanosti. Čeprav ima veliko obrazov in jo je težko na enostaven način definirati, je eden redkih pojmov, ki so našli osrednje mesto tako v fiziki, kot tudi v biologiji in kemiji. Energija je količina, ki se neprestano spreminja iz ene oblike v drugo, hkrati pa se njena skupna količina pri vseh znanih naravnih pojavi ohranja. Zakon o ohranitvi energije je torej eden najbolj temeljnih zakonov naše narave. V tem poglavju bomo naredili prve korake v svet energije in njene povezave s silami, v celoti pa bomo zakon o ohranitvi energije spoznali šele v poglavju termodinamika.

4.1 Delo, energija in moč

Iz vsakdanjega življenja vemo, da se pri opravljanju »dela« slej ko prej utrudimo in nam »zmanjka energije«. Ta preprost pogled na delo in energijo ni daleč od natančnega fizikalnega, ki pravi, da se s premagovanjem sile opravi *delo* ter da pri tem energija prehaja iz enega sistema v drugega oziroma se ena vrsta energije spreminja v drugo. Če sila F premaga razdaljo s , pri tem opravi delo A , ki ga v primeru konstantne sile izračunamo iz zveze

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}. \quad (4.1)$$

Vektorski zapis je pomemben, saj je opravljeno delo odvisno od smeri gibanja glede na smer sile. To odvisnost poznamo iz izkušenj pri premagovanju sile teže: če se vzpenjamo (se gibljemo proti sili teže), porabimo največ energije, če se gibljemo vodoravno (pravokotno na silo teže), nam sila teže ne dela

težav, po klancu navzdol (v smeri sile teže) pa nam sila teže celo pomaga pri gibanju. Pogosto se zgodi, da sila med delovanjem ni konstantna in v takem primeru moramo delo izračunati s pomočjo integrala $A = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

Delo je tesno povezano s spreminjanjem energije. Za začetek naštejmo tri osnovne vrste energije:

- *Kinetična energija* je energija, ki jo imajo telesa zaradi svojega gibanja. Telo z maso m in hitrostjo v ima kinetično energijo

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 . \quad (4.2)$$

Sprememba kinetične energije je enaka delu sile, ki povzroči spremembo hitrosti. V primeru konstantne sile lahko to zvezo izpeljemo, če upoštevamo, da je $s = \bar{v}t$, sila pa je $F = ma = m\Delta v/t$.

- *Gravitacijska potencialna energija* je energija, ki jo imajo telesa zaradi svojega položaja gravitacijskem polju Zemlje. Pri majhnih spremembah višine je težni pospešek (g) konstanten in je gravitacijska potenciala energija telesa odvisna le od njegove mase (m) in višine, na kateri je telo (h):

$$W_p = mgh . \quad (4.3)$$

Sprememba gravitacijske energije telesa je po velikosti enaka delu sile teže pri spremembi položaja telesa.

- Energija je lahko spravljena tudi v elastični deformaciji telesa. Najbolj preprost primer take vrste energije je *prožnostna energija* vzmeti

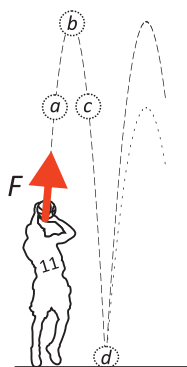
$$W_{el} = \frac{1}{2}kx^2 , \quad (4.4)$$

kjer je k konstanta vzmeti, x pa odmik od ravnovesne dolžine vzmeti. Za prožnostno energijo je vseeno ali vzmet stiskamo ali raztegujemo, saj je odvisna od kvadrata odmika. Sprememba prožnostne energije je enaka delu sile vzmeti pri njenem krčenju oz. raztegovanju (ker sila vzmeti med stiskanjem ni konstantna temveč je odvisna od x , moramo za izračun tega dela uporabiti integral!).

Zgoraj našteje energije spadajo med t.i. mehanske energije. Če med gibanjem v sistemu ni drugih sil razen tistih, ki so povezane z mehanskimi energijami, se celotna mehanska energija sistema ohranja:

$$W_k + W_p + W_{el} = konst. \quad (4.5)$$

V splošnem se med gibanjem težko izognemo drugim silam, saj je trenje praktično vedno prisotno. Prisotno ni le na stiku med trdimi telesi, temveč se *notranje trenje* v snovi pojavi vsakič, ko se molekule snovi gibljejo ena glede na drugo, npr. med gibanjem tekočin, ali med deformacijo trdnih snovi. Ohranitev mehanske energije (en. 4.5) je torej le približek, ki velja tem bolj, čim bolj lahko zanemarimo trenje. Sile, pri katerih se mehanska energija sistema ohranja, imenujemo tudi konservativne sile (pogosto so to sile, ki so odvisne le od položaja telesa, ne pa od njegovega gibanja).



Slika 4.1: Energetika meta žoge. Sila rok (F) opravi delo in žogi dovede energijo. Med letom navzgor se kinetična energija žoge pretvarja v potencialno, med padanjem pa se potencialna energija pretvarja nazaj v kinetično. Ko žoga pade na tla, se kinetična energija pretvori v njeno prožnostno energijo (točka d). Če lahko trenje z zrakom zanemarimo in je žoga idealno elastična, se mehanska energija ohrani in bo žoga odskočila na začetno višino (črtkana črta). V praksi to ni povsem res, zato bo odskočila do manjše višine (pikčasta črta).

Učinek dela in spreminjanje energije iz ene oblike v drugo si lahko nazorno predstavljamo pri navpičnem metu žoge (slika 4.1). Žogo vržemo tako, da nanjo delujemo s silo in ji torej s svojim delom dovedemo kinetično energijo. Med letom navzgor (točka a) se kinetična energija žogi zmanjšuje, hkrati pa se ji povečuje potencialna energija. V najvišji točki leta (točka b) se žoga ustavi, zato je tam kinetična energija enaka nič, potencialna energija pa je največja. Žoga nato pada nazaj proti tloraj (točka c) in kinetična energija se ji spet veča, potencialna pa manjša. Tik preden pade na tla je njena kinetična energija največja, potencialna pa enaka nič. Ko žoga pade na tla, se elastično deformira (točka d) in kinetična energija se pretvori v elastično energijo deformacije žoge. Če je žoga zelo dobra, se vsa elastična energija spremeni nazaj v kinetično in se žoga od tal odbije na enako višino (črtkana črta). V praksi ponavadi to ne

drži in je po odboju na voljo nekaj manj energije kot pred odbojem (pikčasta črta), saj se ob deformaciji nekaj energije spremeni v notranjo energijo žoge. Več o notranji energiji bomo slišali v poglavju termodinamika.

Enota za energijo in delo je *joule*, pri čemer velja $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$. Ko maso 1 kg dvignemo 1 m visoko torej opravimo delo 10 J . Poleg enote joule se v določenih situacijah uporablja tudi stara enota za energijo *kalorija* ($1 \text{ cal} \approx 4,2 \text{ J}$), energije na molekularni skali pa pogosto merimo v enoti *elektronvolt* ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

Pogosto nas zanima, kako hitro se pri opravljanju dela porablja energija. To opisuje količina *moč* (P)

$$P = \frac{A}{t} = Fv, \quad (4.6)$$

katere enota je vat, $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$. Drugi izraz v zgornji enačbi dobimo ob upoštevanju, da je delo sila krat pot, hitrost pa je pot deljeno s časom. Moč sile pri opravljanju dela je torej odvisna od hitrosti, pri kateri ta sila deluje.

Človeško telo v mirovanju troši približno toliko energije kot 100 W žarnica, med fizično aktivnostjo pa se moč telesa lahko poveča tudi za več kot 10 krat (tabela 4.1).

aktivnost	moč [W]
spanje	83
sedenje	120
počasna hoja	265
kolesarjenje s 15 km/h	400
igranje košarke	800

Tabela 4.1: Poraba energije pri različnih aktivnostih (povzeto po [6]).

V zgornjih izrazih smo predpostavili premo gibanje, seveda pa lahko delo in energijo definiramo tudi za vrtenje. S pomočjo analogije med premim

gibanjem in vrtenjem, ki smo jo spoznali v prejšnjem poglavju, lahko takoj zapišemo, da je delo pri vrtenju produkt navora in kota vrtenja:

$$A = M\varphi , \quad (4.7)$$

kinetična energija pri vrtenju pa je odvisna od vztrajnostnega momenta telesa in kotne hitrosti vrtenja:

$$W_k = \frac{1}{2} J\omega^2 . \quad (4.8)$$

Primer 4.1: energetika meta žoge

Za vajo si pogledjmo tri enostavne primere spreminjanja energije pri metu žoge (slika 4.1). a) Najmanj koliko kalorij porabimo za met košarkarske žoge navpično navzgor za $h_0 = 3$ m nad začetni položaj naših rok? Masa žoge je 624 g.

Med metom na žogo delujemo s silo, zato opravljamo delo in z njim žogi dovedemo energijo (kinetično in potencialno), nato pa se med letom mehanska energija (en. 4.5) žoge ne spreminja več (upor zraka zanemarimo). Med letom navzgor se torej kinetična energija žoge manjša, potencialna večja, njuna vsota pa se ne spreminja. V najvišji točki leta se žoga ustavi, zato bo tam $W_k = 0$ in bo vsa energija v potencialni. Delo, ki smo ga opravili pri metu, lahko torej izračunamo iz potencialne energije, ki jo ima žoga v najvišji točki leta:

$$A = W_{celotna} = W_p(max) = mgh = 0,624 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 3 \text{ m} = 19 \text{ J} .$$

Ker velja $1 \text{ cal} \approx 4,2 \text{ J}$, lahko torej zaključimo, da za en met žoge porabimo vsaj 4,5 cal.

b) Kolikšna je bila hitrost žoge, ko smo jo izpustili iz rok, če so se roke med opravljanjem dela iz začetnega položaja iztegnile za $h_r = 20 \text{ cm}$?

Ko žogo izpustimo, se začne njena kinetična energija spreminjati v potencialno. Ker prosto leti le še 2,8 m visoko ($h - h_r$), lahko zapišemo:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - h_r) \Rightarrow v = \sqrt{2g(h - h_r)} .$$

Ko v izraz vstavimo vrednosti, dobimo: $v = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 2,8 \text{ m}} = 7,5 \text{ m/s}$.

c) S kolikšno silo med metom roke delujejo na žogo? Predpostavimo, da je bila sila vseskozi konstantna.

Čeprav bi nalogo lahko rešili le z uporabo sil in pospeškov, si jo pogledjmo s stališča dela in energije. V prejšnji nalogi smo izračunali delo rok, vemo pa tudi na kolikšni razdalji je bilo to telo opravljeno (h_r). Če je bila sila rok konstantna, jo lahko torej izračunamo kot

$$F = \frac{A}{h_r} = \frac{mgh}{h_r} = 94 \text{ N} .$$

d) Kolikšno moč so med opravljanjem dela porabljale mišice?

Moč mišic je odvisna od njihove sile in hitrosti, pri kateri delujejo (en. 4.6). Ker smo v naši nalogi predpostavili, da je sila konstantna (in da gre torej za enakomerno pospešeno gibanje), bo hitrost linearno naraščala in bo največja v trenutku, ko izpustimo žogo. Takrat bo moč mišic enaka

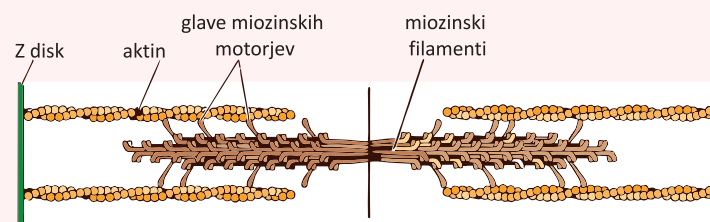
$$P = Fv = 94 \text{ N} \cdot 7,5 \text{ m/s} = 700 \text{ W} ,$$

povprečna moč, s katero so delovale mišice, pa je pol manjša.

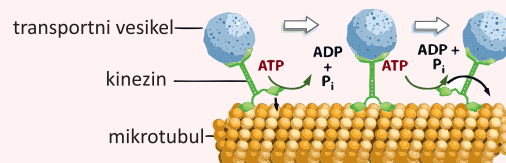
Primer 4.2: molekularni motorji

Čeprav smo do sedaj o delu in energiji govorili na nivoju našega makroskopskega sveta, pa iste zakonitosti veljajo v tudi svetu molekul. Tako je usmerjeno gibanje molekul pogosto povezano z porabo kemične energije (npr. hidrolizo ATP), ki povzroči konformacijsko spremembo proteina. Proteine, ki se pri tem usmerjeno gibljejo, imenujemo *molekularni motorji*. Tak primer srečamo npr. pri krčenju progastih mišic, pri katerih zaradi konformacijskih sprememb v glavah proteina miozina filamenti miozina drsijo po filamentih aktina (slika A). Podoben primer je hoja proteina kinezina, ki pri znotrajceličnem transportu po mikrotubulih prenaša vezikle (slika B). Velikost sile, ki jo pri tem ustvarja, je približno 5 pN, hitrost gibanja pa do 800 nm/s. Poleg molekularnih motorjev, ki povzročajo premo gibanje, obstajajo tudi rotacijski motorji, npr. motorji, ki vrtijo bičke bakterij, ali motorji, ki navijajo DNK v bakteriofage. Rotacijsko gibanje srečamo tudi pri ATP sintazah, proteinih, ki izkoriščajo prekomembranski gradient protonov za produkcijo ATPja (slika C).

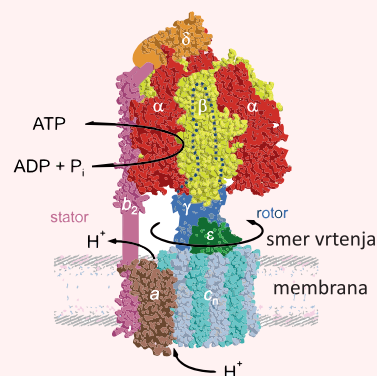
A



B



C

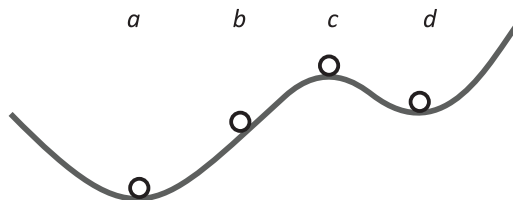


4.2 Ravnovesje in potencialna energija

V prejšnjem poglavju smo ravnovesje opisovali s stališča sil in navorov ter spoznali, da v ravnovesju telo miruje, saj je rezultanta sil in navorov nanj enaka nič. Sedaj bomo naredili še korak naprej ter ravnovesje raziskali tudi s stališča potencialne energije, pri čemer se nam bo na razumevanje narave odprl nov zanimiv pogled.

Začeli bomo s preprostim razmislekom o stabilnosti različnih položajev žoge na hribu (slika 4.2). Na pobočju je žoga v *neravnovesnem stanju* in se odkotali po klancu navzdol (položaj *b*). Ravnovesje lahko dosežemo le na ravni podlagi, ki jo najdemo ali v dolini ali na vrhu hriba. Pri tem s stališča stabilnosti ravnovesja razlikujemo tri možnosti

- Če je žoga na dnu najnižje doline (položaj *a*), je v *stabilnem ravnovesju*.
- Če je žoga na vrhu (položaj *c*), je sicer v ravnovesju, a jo bo že najmanjša zunanja sila spravila iz ravnovesja in žoga se bo odkotalila v dolino. Takemu ravnovesju pravimo *nestabilno ravnovesje*.
- Če je žoga v dolinici pod vrhom (položaj *d*), pa se po majhni zunanji motnji sicer vrne v isti položaj, če pa je motnja večja, se lahko odkotali v kakšno nižjo dolino, npr. v položaj *a*. Položaj *d* se imenuje *lokalno stabilno* ali *metastabilno stanje*.



Slika 4.2: . Različna stanja žoge na hribu: stabilno ravnovesje (lega *a*), neravnovesno stanje (lega *b*), nestabilno ravnovesje (lega *c*) in lokalno stabilno ravnovesje (*d*). V splošnem velja, da je sistem v ravnovesju, če se s časom ne spreminja, pa ni v ravnovesju, se spreminja tako, da se ravnovesju približuje.

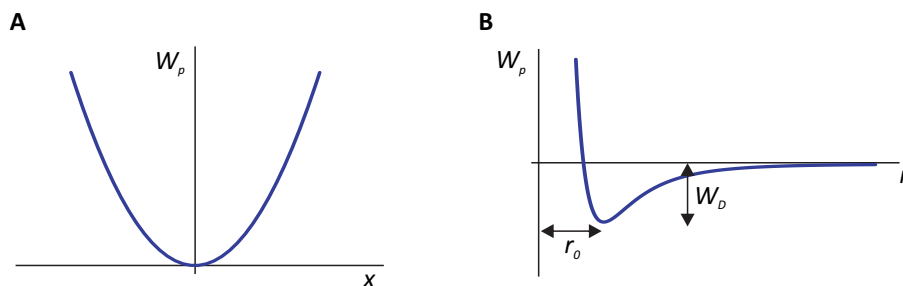
Če na sliko 4.2 pogledamo s stališča potencialne energije, odkrijemo zanimivo pravilo: stabilno ravnovesje je stanje z globalno najnižjo potencialno energijo, nestabilno ravnovesje je stanje z lokalnim maksimumom energije, metastabilno stanje pa je stanje pri katerem ima potencialna energija le lokalni minimum. Matematično bi rekli, da je v ravnovesnih stanjih odvod potencialne

energije po spremembi položaja enak nič. V neravnovesnih stanjih odvod ni enak nič in žogo vleče vleče proti nižji potencialni energiji, pri čemer je velikost sile sorazmerna strmini klanca. Pravimo tudi, da da sila kaže v nasprotni smeri od *gradienta* potencialne energije (matematično obravnavo navajamo v MaFijskem primeru 4.1).

Gornji razmislek je temeljil na preprostem primeru žoge in gravitacijske potencialne energije, vendar pa se za njim skriva ena od globljih zakonitosti narave:

Če mehanski sistem ni v ravnovesju in ga prepustimo samemu sebi, se bo spreminjal proti nižji potencialni energiji. Ravnovesje bo dosegel, ko bo potencialna energija najnižja.

Poleg gravitacijske potencialne energije obstajajo namreč tudi druge vrste potencialne energije, ki imajo podobne lastnosti, v splošnem so vse odvisne le od položaja sistema (in ne od gibanja), in z vsako od njih je povezana ustrezna konzervativna sila. Lastnost potencialne energije imata npr. prožnostna energija vzmeti (en. 4.4 in slika 4.3A) in pa interakcijska energija med dvema molekulama (slika 4.3B). V biokemiji ravnovesje definira vrsta energije z imenom *prosta entalpija*, ki ima podobne lastnosti kot mehanske potencialne energije in jo bomo zato v poglavju termodinamika imenovali *termodinamski potencial*.



Slika 4.3: . Dva primera potencialnih energij. A) Energija vzmeti (en. 4.4) je odvisna le od odmika vzmeti od ravnovesja (x) in ima vse lastnosti potencialne energije. Najmanjša je v ravnovesju, sila vzmeti pa vedno kaže proti ravnovesju. B) Primer interakcijske energije med dvema molekulama, ki se privlačita, v odvisnosti od razdalje med molekulama (izvor privlačne sile oz. interakcijske energije je v električnem naboju na molekulah, več o tem bomo slišali v poglavju o elektriki). Če sta molekuli zelo daleč stran, se interakcijska energija praktično ne spreminja z razdaljo, kar po drugi strani pomeni, da med molekulama ni sile. Ko se molekuli približujeta, se energija zmanjšuje in med njima torej deluje privlačna sila. Razdalja r_D označuje ravnovesno razdaljo med molekulama, t.j. razdaljo, pri kateri je energija najmanjša in pri kateri je rezultanta sil na molekuli enaka nič (molekuli se niti ne privlačita niti odbijata). Če molekuli potisnemo skupaj na razdaljo, ki je manjša od ravnovesne, se elektroni njunih zunanjih orbital začnejo prekrivati in molekuli se začneta odbijati. Globlja kot je dolina, močnejša je vez med molekulama. Če hočemo molekuli ločiti (ju iz ravnovesne razdalje oddaljiti daleč narazen), porabimo disociacijsko energijo W_D . Če pogledamo interakcijsko energijo v bližini ravnovesja, vidimo, da je njena oblika podobna paraboli, ki smo jo srečali pri vzmeti. **Zato si lahko za majhne odmike od ravnovesja molekule predstavljamo kot atome, ki so med seboj povezani z majhnimi vzmetmi.**

MaFijski primer 4.1: sila in potencialna energija

Konservativna sila in ustrezna potencialna energija sta dve plati istega kovanca. Če poznamo eno, lahko izračunamo drugo in obratno. Konservativna sila vedno kaže v smer, v kateri bo potencialna energija čim manjša. Matematično zvezo med njima zapišemo kot

$$\vec{F} = -\nabla W_p = -\left(\frac{dW_p}{dx}, \frac{dW_p}{dy}, \frac{dW_p}{dz}\right), \quad (4.9)$$

pri čemer smo uporabili matematično operacijo ∇ , ki jo imenujemo *gradient* in je posplošitev odvoda. Odvod smo do sedaj srečali pri funkcijah ene spremenljivke $f(x)$, če pa imamo opraviti s funkcijo več spremenljivk (potencialne energije so v splošnem lahko odvisne od več koordinat), njen naklon izračunamo tako, da odvajamo po vsaki spremenljivki posebej in rezultate združimo v vektor.

Kot preprost primer zveze med silo in energijo lahko služi izračun Hookovega zakona (en. 3.4) iz izraza za prožnostno energijo vzmeti. Energija vzmeti je odvisna le od ene koordinate, zato gradienta pravzaprav ne bomo potrebovali in bo dovolj navadno odvajanje:

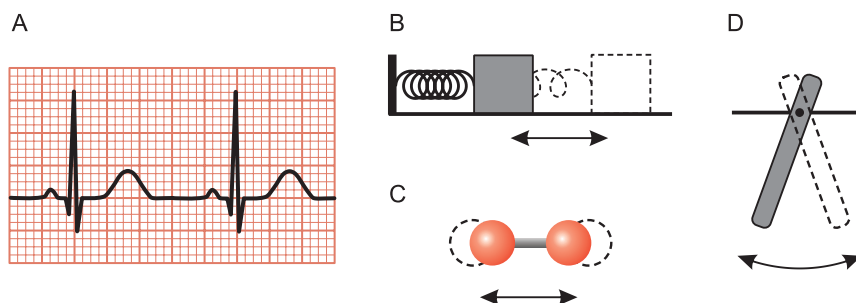
$$F = -\frac{dW_p}{dx} = -\frac{dkx^2}{dx} = -kx. \quad (4.10)$$

Negativni predznak pomeni, da sila vzmeti vedno kaže proti ravnovesju (pri pozitivnih vrednostih x bo sila kazala proti negativnim vrednostim x ter obratno). Če predznak $-$ v Hookovem zakonu izpustimo, z njim opišemo silo, s katero vlečemo vzmet, ki je nasprotno enaka sili vzmeti.

Poglavje 5

Nihanje

Veliko naravnih pojavov se periodično ponavlja. Dan se izmenjuje z nočjo, plima se izmenjuje z oseko, pri kroženju se kljub neprestanemu gibanju vedno znova znajdemo na začetku poti. Tudi srce nam, dokler smo živi, periodično bije. Periodično nihajo tudi vse molekule, ki sestavljajo naš svet. V tem poglavju se bomo spoznali z osnovnimi značilnostmi preprostega nihanja (slika 5.1), kasneje pa nam bo to znanje pomagalo tudi pri razumevanju bolj zapletenih periodičnih pojavov.

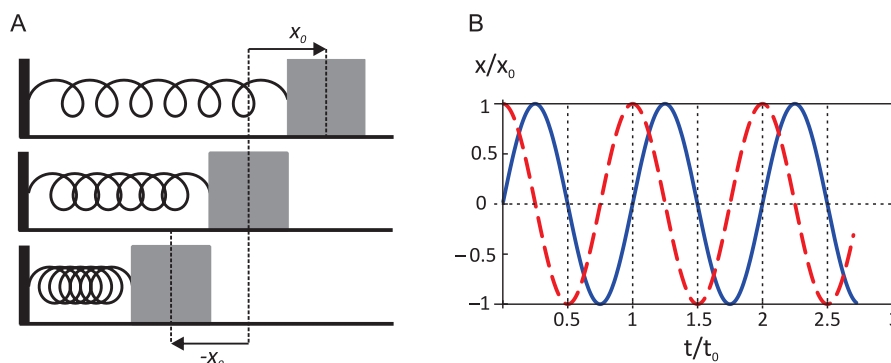


Slika 5.1: Nekaj primerov periodičnih pojavov. (A) Periodično bitje srca se lepo vidi na elektrokardiogramu, na katerem prikažemo spreminjanje električne napetosti na površini telesa v odvisnosti od časa. En majhen kvadratak mreže je ponavadi velik $1\text{ mm} \times 1\text{ mm}$ in v vodoravni smeri predstavlja 40 ms, v navpični pa 0,1 mV. (B) Vzmetno nihalo, pri katerem niha na vzmet pritrjena masa. (C) Nihanje molekule O_2 . Atoma nista toga vezana eden na drugega, zato lahko nihata okoli ravnovesne lege. Tako nihanje si lahko v prvem približku predstavljamo kot nihanje majhnega vzmetnega nihala. (D) Težno nihalo (včasih ga imenujejo tudi fizično nihalo), pri katerem niha na os obešeno togo telo.

5.1 Harmonično nihanje

Harmonično nihanje je tisto, ki ga lahko opišemo s funkcijo sinusne oblike. Najpreprostejši primer harmoničnega nihanja je nihanje vzmetnega nihala na podlagi brez trenja (slika 5.2B). Kot smo spoznali v prejšnjem poglavju, nam lahko z vzmetjo povezane mase služijo kot dober približek za opisovanje atomov v molekuli, zato si bomo tudi nihanje molekul predstavljali kot nihanje majhnih vzmetnih nihalc.

Če vzmet vzmetnega nihala raztegnemo in spustimo, bo nihalo sinusno zanihala okoli ravnovesja, pri čemer se bo energija pretvarjala iz kinetične energije mase v prožnostno energijo vzmeti ter nazaj. Brez prisotnosti trenja se bo celotna energija ohranjala in gibanje se bo periodično ponavljalo. Čas ene periode t_0 imenujemo *nihajni čas*, *frekvenca nihanja* ν_0 pa nam pove, koliko nihajev naredi nihalo v eni sekundi in je obratna vrednost nihajnega časa, $\nu_0 = 1/t_0$ (podobno definicijo smo srečali že pri opisovanju kroženja).



Slika 5.2: A) Nihanje vzmetnega nihala na podlagi brez trenja je najpreprostejši primer harmoničnega nihanja. B) Graf, ki prikazuje odmik vzmetnega nihala od časa, je sinusne oblike. Modra črta prikazuje nihanje nihala, ki je bilo ob času $t = 0$ ravno v ravnovesni legi, črtkana rdeča črta pa prikazuje nihanje nihala, ki je bilo ob času $t = 0$ v skrajni desni legi. Maksimalni odmik nihanja x_0 imenujemo amplituda nihanja, čas enega nihaja t_0 pa nihajni čas.

Poznavanje lastnosti sinusne funkcije nam pomaga, da uganemo enačbo, ki pri harmoničnem nihanju opisuje odvisnost odmika nihala od časa:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t) . \quad (5.1)$$

Maksimalni odmik od ravnovesja v obe smeri x_0 imenujemo *amplituda* nihanja. Vpeljali smo tudi *lastno krožno frekvenco* nihanja, ki jo definiramo z zahtevo, da en nihajni čas ustreza eni periodi sinusne funkcije 2π . Podobno kot pri kroženju (en. 2.6), tudi pri nihaju velja: $\omega_0 t_0 = 2\pi$ oziroma

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 . \quad (5.2)$$

V splošnem je harmonično nihanje vsako, pri katerem je sila, ki sistem vleče nazaj proti ravnovesju, sorazmerna odmiku od ravnovesja. Pomembna lastnost harmoničnega nihanja je, da je frekvenca nihanja *notranja lastnost nihala*, ki ni odvisna od začetnega odmika od ravnovesja ter se s časom ne spreminja. Za vzmetno nihalo tako velja, da je lastna frekvenca nihanja odvisna od njegove mase in trdote vzmeti (glej MaFijski primer 5.1):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} . \quad (5.3)$$

Atomi v molekuli prav tako nihajo s sebi lastnimi frekvencami, ki so odvisne od mase atomov in interakcij med njimi.

Oglejmo si še nihanje visečega togega telesa (slika 5.1D). Tako nihalo imenujemo težno ali fizično nihalo in je podobno matematičnemu, le da je pri slednjem vsa masa nihala zbrana v eni točki. Krajša izpeljava pokaže (MaFijski primer 5.1), da je pri majhnih odmikih od ravnovesja tudi to nihanje harmonično z lastno krožno frekvenco

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\ell_t m g}{J}} , \quad (5.4)$$

kjer je m masa težnega nihala, J njegov vztrajnostni moment ter ℓ_t razdalja težišča nihala od osi. Pri matematičnem nihalu je vsa masa zbrana na razdalji $\ell_t = l$, zato pri njem velja $J = ml^2$ oz. $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

MaFijski primer 5.1: izpeljava lastne frekvence nihanja

Pokažimo, da je lastna krožna frekvenca vzmetnega nihala enaka $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Začnemo pri 2. Newtonovem zakonu, ki pravi, da je sila na maso v vsakem trenutku sorazmerna pospešku mase. Za silo vzmeti velja Hookov zakon (en. 3.4), zato lahko zapišemo za silo na maso zapišemo $-kx(t) = ma(t)$ (negativni predznak smo zapisali, ker sila na maso pri pozitivnih x vleče proti negativnim vrednostim). Ker je pospešek drugi odvod odmika po času ($a = x''$), bo za vzmetno nihalo v vsakem trenutku veljala enačba

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t) . \quad (5.5)$$

Za sinusno nihanje poznamo odvisnost odmika od časa (en 5.1), zato lahko brez težav izračunamo prvi in drugi odvod odmika po času ter preverimo če ustreza zgornji enačbi. Prvi odvod je

$$x'(t) = x_0\omega_0 \cos(\omega_0 t) , \quad (5.6)$$

drugi odvod pa je torej

$$x''(t) = -x_0\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) . \quad (5.7)$$

Če primerjamo zadnjo enačbo z enačbo en. 5.1, ugotovimo, da pri sinusnem nihanju torej velja

$$x''(t) = -\omega_0^2 x(t) \quad (5.8)$$

Iz primerjave enačb 5.5 in 5.8 lahko torej zaključimo, da sinusno nihanje zares ustreza 2. Newtonovem zakonu za vzmetno nihalo, če je le $\omega_0^2 = k/m$. Podobno razmišljanje velja v vseh primerih, pri katerih je drugi odvod odmika po času sorazmeren negativni vrednosti odmika.

Raziščimo še nihanje težnega nihala. Če težno nihalo iz ravnovesja izmaknemo za kot ϕ , ga bo navor sile teže vlekel nazaj v ravnovesje, $M = -mg\ell_t \sin \phi$ (če bo kot pozitiven, bo navor negativen). Navor je po 2. Newtonovem zakonu sorazmeren kotnemu pospešku, $M = J\alpha = M\phi''$, zato lahko zapišemo:

$$\phi''(t) = -\frac{mg\ell_t}{J} \sin \phi(t) . \quad (5.9)$$

Vidimo torej, da fizično nihalo v splošnem ne niha harmonično, saj drugi odvod odmika po času ni sorazmeren odmiku ampak sinusu odmika. Če pa so odmiki majhni, je sinus kota kar približno enak kotu, $\sin \phi \approx \phi$, in velja:

$$\phi''(t) = -\frac{mg\ell_t}{J} \phi(t) . \quad (5.10)$$

Pri majhnih odmikih od ravnovesja zato tudi fizična nihala (in matematično nihalo) nihajo približno harmonično, krožno frekvenco takega nihanja pa razberemo iz zgornje enačbe $\omega_0 = \sqrt{mg\ell_t/J}$.

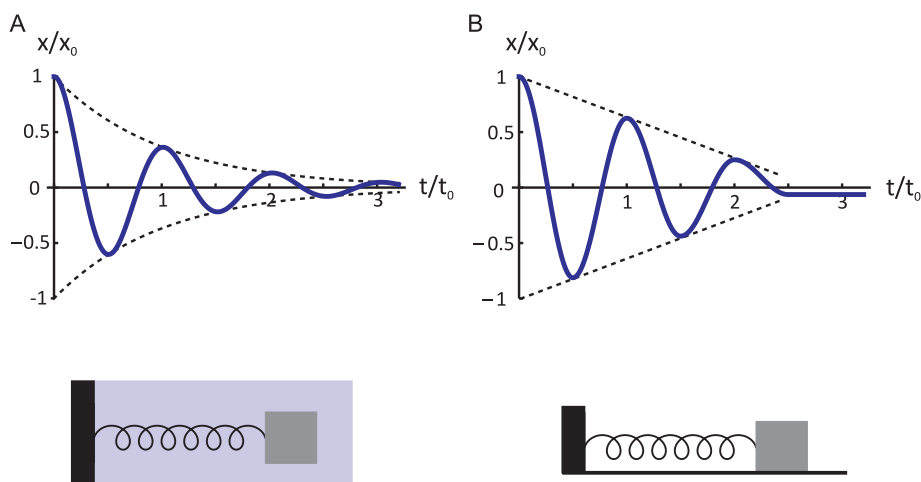
5.2 Dušenje, vzbujanje in resonanca

Pri nihanju realnih sistemov so pogosto prisotne sile trenja. Če takega nihanja dodatno ne vzbuja, se bo zaradi trenja energija nihanja počasi manjšala, dokler se nihanje ne bo povsem zadušilo. Izkaže pa se, da je tudi pri dušenem harmoničnem nihalu frekvenca nihanja lastnost sistema ter ni odvisna od amplitude nihanja in se s časom ne spreminja.

Dušeno nihanje je najbolj raziskano v sistemu, pri katerem je sila trenja sorazmerna hitrosti. Kasneje bomo v poglavju o viskoznosti videli, da sila trenja nastopa pri gibanju v tekočinah (slika 5.3C). Jakost dušenja v takem sistemu opišemo s *koeficientom dušenja* β . Daljša analiza pokaže, da pri takem nihanju amplituda nihanja zamira eksponentno s časom: $x_0 \propto e^{-\beta t}$ (večje kot je dušenje, hitreje nihanje zamira). Frekvenca dušenega nihanja se s časom ne spreminja, le malo manjša je kot v nedušenem primeru:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} . \quad (5.11)$$

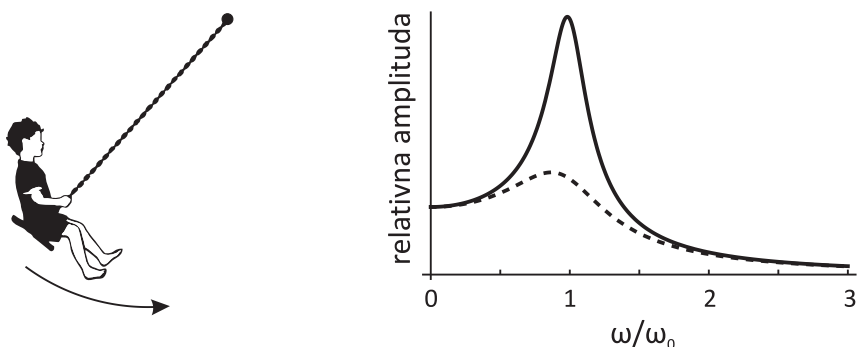
Če je sila trenja zelo velika in je $\beta > \omega_0$, nihalo sploh ne zanika, ampak se le eksponentno vrača proti ravnovesju.



Slika 5.3: Dva primera dušenega nihanja. (A) Pri gibanju v tekočinah je sila upora sorazmerna hitrosti gibanja. Pri takem dušenem nihanju se amplituda manjša eksponentno s časom. (B) Če je sila trenja konstantna, kot npr. pri trenju na podlagi, se amplituda nihanja duši linearno s časom. V obeh primerih se nihanji čas oz. frekvenca nihanja s časom ne spreminjata.

V splošnem sila trenja ni nujno sorazmerna hitrosti. Primer dušenega nihanja s takim trenjem je nihanje mase na vzmeti na podlagi s trenjem (slika 5.3B). V takem primeru se bo amplituda nihanja s časom manjšala kar linearno, frekvenca nihanja pa se zaradi dušenja ne spremeni. Tudi v tem primeru velja, da je lastna frekvenca nihanja lastnost nihala da je hitrost padanja amplitude tem večja, čim večje je dušenje.

Če želimo vzbuditi nihanje mirujočega nihala ali pa le ohranjati nihanje dušenega nihala, mu moramo dovajati energijo. Izkaže se, da za vzbujanje nihala ne potrebujemo velike sile, če le s silo delujemo v pravih trenutkih. To lastnost nihala spozna vsak otrok, ki se je uči gugalnice na gugalnici (slika 5.4). Za uspešno guganje mora težišče svojega telesa premikati z ravno pravo frekvenco, če pa bo noge premikal prehitro ali prepočasi, se gugalnica ne bo zagugala. Prava frekvenca za vzbujanje je ravno lastna frekvenca nihala. Pojav, ko nihalo vzbujamo z njegovo lastno frekvenco imenujemo *rezonanca*. Če nihalo vzbujamo z resonančno frekvenco, mu v vsakem nihaju dovedemo dodatno energijo, zato lahko amplituda nihanja zelo naraste. Pri tem velja, da bolj kot je sistem dušen, nižjo resonančno amplitudo doseže (slika 5.4B).

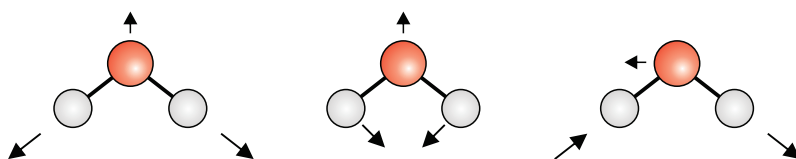


Slika 5.4: Iz izkušnje na gugalnici vemo, da je za vzbujanje nihala potrebna ravno prava frekvenca, ki jo imenujemo resonančna frekvenca. Če noge premikamo prehitro ali prepočasi, gugalnica ne bo zanihala. Diagram na desni prikazuje, kako je amplituda vzbujenega nihanja odvisna od frekvence vzbujanja ω , če je lastna frekvenca nihanja ω_0 . Če je frekvenca vzbujanja majhna, bo nihalo nihalo kar z amplitudo vzbujanja. Največjo amplitudo nihanja nihala dosežemo v resonanci, ko nihalo vzbujamo ravno z njegovo lastno frekvenco ($\omega/\omega_0 = 1$), če pa nihalo zbudimo s preveliko frekvenco, bo vzbujena amplituda nihanja zelo majhna. Polna črta prikazuje resonanco v sistemu z majhnim dušenjem, črtkana pa resonanco v sistemu z velikim dušenjem.

5.3 Nihanje molekul in spektroskopija

Interakcije med atomi v molekulah si lahko v predstavljamo kot drobne vzmeti, ki atome povezujejo med seboj (slika 4.3). Podobno, kot zaniha vzmetno nihalo, lahko zanihajo tudi atomi v molekuli, frekvenca njihovega nihanja pa je v skladu z enačbo 5.3 odvisna od mase atomov in jakosti interakcije med njimi (vrednost konstante vzmeti k v tem primeru razberemo iz strmine potencialne jame medatomske interakcije v okolici ravnovesja, slika 4.3B). Zaradi majhne mase atomov so lastne frekvence nihanja molekul zelo visoke, tipično nekaj 10 THz (10^{13} Hz), kar so frekvence, ki ustrezajo infrardečemu elektromagnetnemu valovanju.

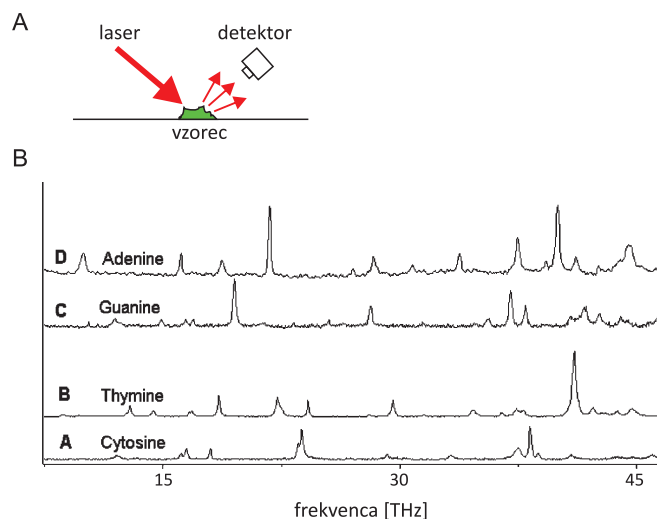
Preprosto vzmetno nihalo niha le v eni smeri in ima le eno lastno frekvenco, gibanje atomov v molekuli pa je lahko veliko bolj raznoliko, saj je število neodvisnih načinov nihanja molekule povezano s številom njenih prostostnih stopenj. V splošnem se vsak lahko atom v molekuli giblje neodvisno v vseh treh smereh, zato je v molekuli z N atomi število vseh prostostnih stopenj enako $3N$. Od teh jih je za nihanje na voljo toliko, kolikor se jih ne porabi za gibanje težišča molekule in njene rotacije okoli težišča. Nelinearne molekule imajo tri prostostne stopnje gibanja težišča in tri rotacije, zato bo pri njih število neodvisnih nihanj in lastnih frekvenc enako $3N - 6$. Linearne molekule imajo eno rotacijo manj, zato bo število neodvisnih nihanj pri njih $3N - 5$. Molekula kisika tako niha le na en način (slika 5.1C), katerega lastna frekvenca je 47 THz, molekula vode pa lahko niha na tri neodvisne načine in ima tri lastne frekvence: 48 THz, 110 THz in 113 THz (slika 5.5). Na lastne frekvence molekule lahko preko interakcij oziroma dušenja vpliva tudi kemijsko okolje molekule, zato ima npr. prosta molekula vode malo drugačne lastne frekvence od molekule vode v tekočem stanju.



Slika 5.5: Molekula vode lahko niha na tri neodvisne načine. V prvem primeru je lastna frekvenca nihanja 110 THz, v drugem 48 THz, v tretjem pa 113 THz.

Lastne frekvence molekule so neposredno povezane z njeno strukturo, zato je spekter lastnih frekvenc nihanja molekule njen »prstni odtis«. Z analizo lastnih frekvenc nihanja molekul v snovi lahko torej ugotovimo kemijsko se-

stavo snovi. S tako analizo se ukvarja široko področje znanosti, ki ga imenujemo *spektroskopija*. Poznamo veliko različnih spektroskopskih metod, ki se z razvojem tehnologije tudi neprestano razvijajo. V zadnjih letih se intenzivno raziskuje uporaba spektroskopskih tehnik za medicinsko diagnostiko, saj imajo bolezensko spremenjena tkiva nekoliko drugačno kemijsko sestavo od zdravih in jih z natančno spektroskopsko analizo lahko razločimo. Ena od obetajočih spektroskopskih tehnik je t.i. Ramanova spektroskopija, pri kateri nihanje molekul v vzorcu vzbudimo z laserjem in nato z detektorjem s strani »poslušamo« njihove resonančne frekvence (slika 5.6). To tehniko naj bi bilo v prihodnosti mogoče uporabiti tudi kot del endoskopskega pregleda, zaradi česar bo v marsikaterem primeru odpadla potreba po odvzemu in histološkem pregledu vzorca tkiva.



Slika 5.6: A) Shematski prikaz delovanja Ramanove spektroskopije. Vzorec vzbudimo z laserjem in analiziramo svetlobo, ki se z vzorca siplje v okolico in nosi informacijo o vibracijskem spektru molekul v vzorcu. Ker ima vsaka vrsta molekul svoj značilni vibracijski spekter, lahko na tak način določimo kemijsko sestavo vzorca. B) Primer vibracijskih spektrov dušikovih baz adenina, gvanina, timina in citozina. Zaradi različnih kemijskih struktur dušikovih baz so tudi resonančni vrhovi njihovega nihanja pri različnih frekvencah.

Poglavje 6

Sile in tlaki v snovi

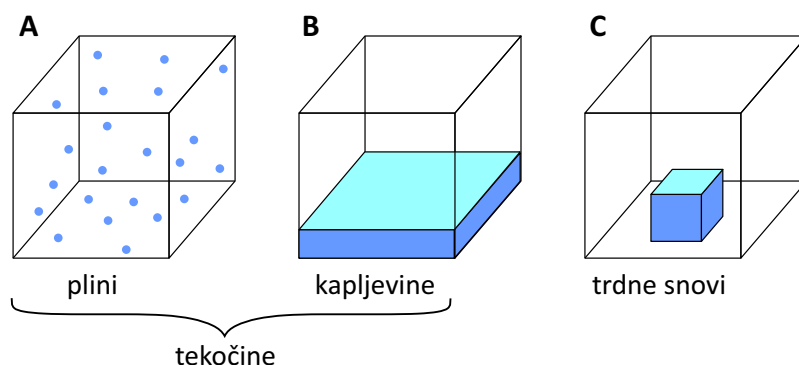
V dosedanjih poglavjih smo obravnavali predvsem vpliv sil na gibanje teles, v nadaljevanju pa si bomo ogledali še, kako lahko zunanje sile telesa deformirajo. Za začetek si oglejmo nekaj splošnih pojmov, s katerimi opisujemo obnašanje teles in snovi pod vplivom sil.

6.1 Tri osnovne vrste snovi

Snovi pogosto razdelimo na tri osnovne skupine: pline, kapljevine in trdne snovi. Glavne razlike njimi so ponazorjene na sliki 6.1, dodaten vpogled pa dobimo, če se spustimo na molekularni nivo. V plinih so interakcije med molekulami prešibke, da bi jih držale skupaj, zato se molekule plina gibljejo neodvisno druga od druge, plin pa napolni vso dostopno prostornino. V kapljevinah so privlačne interakcije med molekulami že dovolj močne, da jih držijo skupaj, a se molekule lahko vseeno gibljejo ena mimo druge. Kapljevine imajo zato svojo prostornino in površino (gladino), hkrati pa lahko tečejo ter svojo obliko prilagodijo okolici. V trdnih snoveh so interakcije med molekulami tako velike, da so molekule trdno vpete ena zraven druge in jih lahko premaknejo šele velike zunanje sile.

Kasneje bomo videli, da delitev na tri skupine snovi dobro velja le v preprostih primerih, veliko snovi (tudi mnoga biološka tkiva) pa ima npr. lastnosti tako trdnih kot tekočih snovi.

Ena najosnovnejših lastnosti snovi je *gostota*, ki pove, kolikšno maso ima določena prostornina snovi, $\rho = m/V$. Tako pri trdnih snoveh kot pri kapljevinah so si molekule blizu skupaj, zato je njihova gostota v prvi vrsti odvisna od molekulske mase atomov, ki snov sestavljajo in je za oboje približno istega



Slika 6.1: Tri osnovne vrste snovi: plini, kapljevine in trdne snovi. Plini napolnijo vso dostopno prostornino in nimajo svoje oblike. Molekule kapljevine se držijo skupaj, a se lahko premikajo ena mimo druge, zato imajo svojo prostornino in gladino. Molekule v trdnih snoveh so trdno vpete ena ob drugo, zato trdne snovi obdržijo svojo obliko. Plini in kapljevine lahko tečejo, zato jih imenujemo tudi tekočine.

reda velikosti. Gostota vode je npr. 1 kg na en liter, gostota aluminija je le 3 krat večja, gostota zlata, ki je ena najgostejših vsakdanjih snovi, pa je približno 20 krat večja. Pri plinih so molekule daleč narazen, zato so plini pri standardnih pogojih približno 1000 krat redkejši. Masa enega litra zraka pri standardnih pogojih je tako le nekaj več kot en gram.

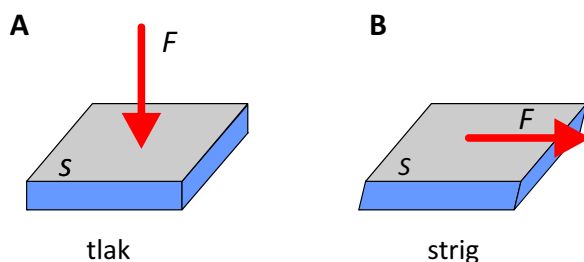
6.2 Sile, tlaki, napetosti, stisljivost

Sile med razsežnimi telesi delujejo preko njihovih površin in so v splošnem zelo zapletene, saj imajo lahko v vsaki točki površine drugačno velikost in smer. Za nas bo dovolj, da si ogledamo le dva najpreprostejša primera delovanja sile na telo: če sile delujejo pravokotno na njegovo površino ali vzporedno s površino. V obeh primerih je vpliv sile na telo odvisen od tega, na kako veliki površini je sila razporejena.

Če je sila pravokotna na površino govorimo o *tlaku*:

$$p = \frac{F}{S}, \quad (6.1)$$

kjer je p tlak, S pa površina, pravokotno na katero deluje sila F . SI enota za tlak je pascal, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$.



Slika 6.2: Dva osnovna načina delovanja sil na snovi. Če sila deluje pravokotno na površino in molekule snovi stiska ali razpenja, govorimo o tlaku (p), če pa je sila vzporedna s površino in molekule snovi potiska eno mimo druge, govorimo o strigu oz. strižni napetosti (τ). V obeh primerih je učinek odvisen od velikosti sile na velikost površine ($p = F/S$ oz. $\tau = F/S$), zato imata obe količini isto enoto pascal.

Če zunanja sila na telo deluje vzporedno s površino, govorimo o *strigu*. Če na trdne snovi delujemo s strižno silo, se deformirajo, plini in kapljevine pa se strižni sili ne morejo upirati in pod njenim vplivom stečejo. Plini in kapljevine se zato imenujejo tudi *tekočine*. Kot bomo videli kasneje, je tudi vpliv strižnih sil povezan s tem, na kako veliki površini delujejo, le da v tem primeru ne govorimo o tlaku, temveč o *strižni napetosti* $\tau = F/S$, ki pa ima enako enoto kot tlak.

V pomoč pri razumevanju razlik med tlakom in strigom nam je lahko naslednja primerjava. Tlak molekule snovi potiska skupaj (ali narazen), zato je njegova posledica sprememba prostornine snovi. Nasprotno strig molekule potiska eno mimo druge in zaradi tega ne povzroči spremembe prostornine. Od tod strigu tudi ime: strig "striže" enako kot rezili pri škarjah, ki zdrsita eno mimo drugega.

S tlakom lahko torej snovi stiskamo ali razpenjamo. Lastnost, ki pove, kako težko je neko snov stisniti, se imenuje *stisljivost* (χ) in je definirana z naslednjo enačbo

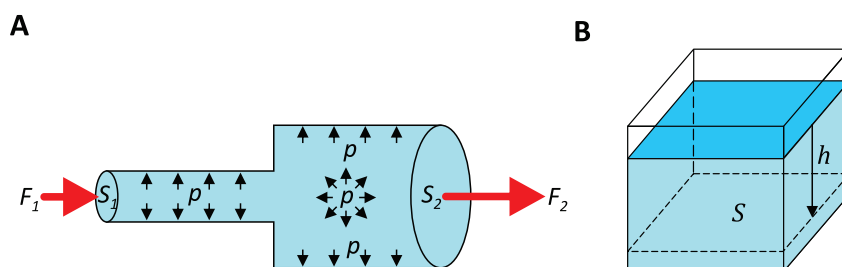
$$\frac{\Delta V}{V} = -\chi \Delta p . \quad (6.2)$$

Stisljivost snov torej povezuje relativno spremembo prostornine s spremembo tlaka na snov. Enota za stisljivost je Pa^{-1} . Večja kot je stisljivost snovi, lažje jo lahko stisnemo. Stisljivosti trdnih snovi in kapljev so ponavadi majhne, saj so njihove molekule že v normalnih pogojih blizu skupaj. Če želimo kapljevino ali trdno snov stisniti za 1 %, potrebujemo zelo velik tlak, tipično

reda velikosti 10^8 Pa oziroma približno 1000 barov (1 bar enak normalnemu zračnemu tlaku, $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$), kar je za normalne razmere zelo veliko. Veliko preprostih trdnih snovi in kapljev, tudi npr. voda, je torej praktično nestisljivih in njihova gostota ni odvisna od delovanja zunanjih sil. Stisljivost plinov pri standardnih pogojih je po drugi strani približno 10^5 krat večja in jih lahko stisnemo brez težav.

6.3 Hidrostatski tlak, vzgon

Molekule v tekočinah se lahko prosto gibljejo, zato se med stiskanjem tekočine preuredijo tako, da se tlak povsod v tekočini poveča enako (če se ne bi bil, bi se molekule gibale od večjega proti manjšemu tlaku). To lastnost je ob preučevanju hidravličnih sistemov prvi zapisal znameniti francoski znanstvenik Blaise Pascal, zato jo danes imenujemo Pascalov zakon (slika 6.3A). Tlak v tekočini ima zato enako vrednost v vseh smereh in je skalarna količina.



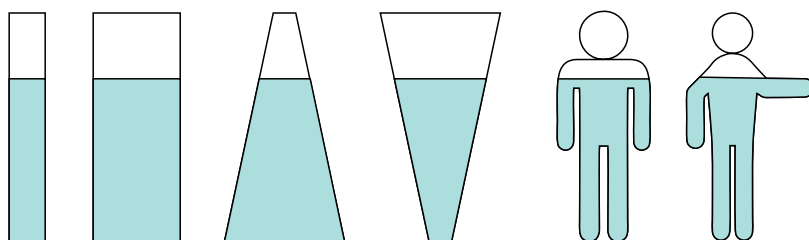
Slika 6.3: A) Pascalov zakon: če tekočino stiskamo, se tlak v njej enako poveča po vsej prostornini. Na osnovi tega principa deluje hidravlični prenos sile, pri katerem majhna sila na strani z majhno površino povzroči veliko silo na strani z veliko površino, $p = F_1/S_1 = F_2/S_2 \Rightarrow F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$. B) Hidrostatski tlak: zaradi sile teže tekočine tlak v njej narašča z globino.

S Pascalovim zakonom sta tesno povezani dve pomembni lastnosti tekočin: hidrostatski tlak in vzgon. Zaradi sile teže namreč vsak del tekočine s svojo težo enakomerno pritiska na površino pod seboj, kar povzroči naraščanje tlaka z globino oz. t.i. *hidrostatski tlak*. Pri nestisljivih kapljevah je gostota (ρ) neodvisna od tlaka, zato lahko hidrostatski tlak brez težav izračunamo (slika 6.3B): pri globini h na spodnjo ploskev s površino S pritiska teža kapljevine nad njo, ki je enaka $F_g = mg = \rho Vg = \rho Shg$. Tlak je sila na površino, zato se pri izračunu tlaka S pokrajša in je naraščanje tlaka odvisno le od globine in

gostote tekočine ($p = F_g/S = \rho gh$). Ponavadi na zgornjo površino kapljevine deluje še zunanji zračni tlak p_0 , zato tlak v tekočini z globino narašča kot

$$p = p_0 + \rho gh . \quad (6.3)$$

Hidrostatski tlak je torej odvisen le od globine v tekočini in je neodvisen od oblike in velikosti posode (slika 6.4).



Slika 6.4: V vseh šestih posodah je enaka višina vode, v kateri posodi pa je tlak na dnu največji? Če ni drugih zunanjih sil razen sile teže, je tlak v tekočini odvisen le od višine tekočine in je torej v vseh posodah enak! Tudi krvožilje je neke vrste "posoda", zato je krvni tlak v nogah večji kot v glavi.

Enačba 6.3 velja za vse nestisljive kapljevine, npr. za vodo, kri in živo srebro. Enačbo dobro poznajo potapljači, ki vedo, da se tlak v vodi na vsakih 10 m globine poveča za približno 1 bar ($1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ m} \approx 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$). Gostota živega srebra je približno 13,5 krat večja od gostote vode, zato bi bil tlak na isti globini v živem srebru 13,5 krat večji kot v vodi in so včasih živo srebro uporabljali pri merjenju tlaka. V medicini se za tlak tako še danes uporablja enota mmHg (milimeter živega srebra), ki je definirana kot tlak, ki ga pod seboj ustvarja stolpec živega srebra z višino 1 mm (primer 6.1). Plini so stisljivi, zato se pri njih z višino spreminja tudi gostota in je spreminjanje tlaka z višino eksponentno (več o tem še pri poglavju Termodinamika).

Primer 6.1: zakaj zdravniki krvni tlak merijo v enoti mmHg?

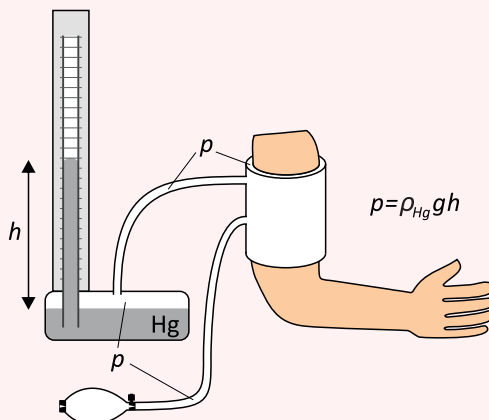
Zdravniki pri merjenju tlaka pogosto ne uporabljajo enote Pa, temveč enoto mmHg (milimeter živega srebra), ki je po velikosti enaka tlaku, ki ga pod seboj ustvarja 1 mm živega srebra. Z upoštevanjem enačbe 6.3 hitro izračunamo

$$1 \text{ mmHg} = \rho_{\text{Hg}} gh = 13534 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 133 \text{ Pa} .$$

Velja tudi, da je $760 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm}$. Enoti mmHg je približno enaka tudi stara enota

za tlak torr.

Enota mmHg izvira v prvih merilcih tlaka (manometrih oz. barometrih), ki so velikost tlaka določali preko hidrostatskega tlaka, ki ga pod seboj ustvarja stolpec živega srebra z določeno višino. Kot primer si lahko pogledamo delovanje kliničnega živosrebrnega sfigmomanometra (gr. sphygmōs pomeni pulz), ki je shematično prikazan na spodnji sliki:



V neprodušno zaprti posodi je živo srebro, v katerega je potopljena steklena cevka, zrak nad živim srebrom v posodi pa je po gumijasti cevki povezan z manšeto. Ko z gumijasto žogico načrpamo zrak v manšeto, povečamo tlak v manšeti, enako pa se poveča tudi tlak nad živim srebrom v posodi, zaradi česar se ustrezno dvigne živo srebro v cevki. Povečanje tlaka zraka v manšeti je torej enako tlaku, ki ga pod seboj ustvarja stolpec živega srebra v cevki, zato lahko velikost tlaka v manšeti odčitamo kar neposredno iz višine stolpca živega srebra v mm. Če je višina stolpca živega srebra npr. 110 mm, je torej tlak v manšeti 110 mmHg višji od zunanjega zračnega tlaka.

Ker je živo srebro strupeno, manometrov na živo srebro raje ne uporabljamo več, na njih pa nas bo vedno spominjala enota mmHg.

Podoben razmislek, kot smo ga imeli pri hidrostatskem tlaku nam pomaga razumeti tudi znameniti Arhimedov zakon vzgona. Če v tekočino potopimo telo, deluje tekočina na spodnjo površino telesa z višjim tlakom kot na zgornjo površino (spodnja površina telesa je na večji globini, kjer je tlak višji), stranske sile tlaka na telo pa so si iz nasprotnih strani telesa nasprotno enake in se medsebojno odštejejo. Rezultanta sil na telo torej deluje navpično navzgor in se imenuje *sila vzgona*. Če si predstavljamo, da ima telo preprosto kvadrato obliko, lahko z enakim računom, kot smo ga opravili za hidrostatski tlak, izračunamo, da je sila vzgona enaka teži izpodrinjene tekočine:

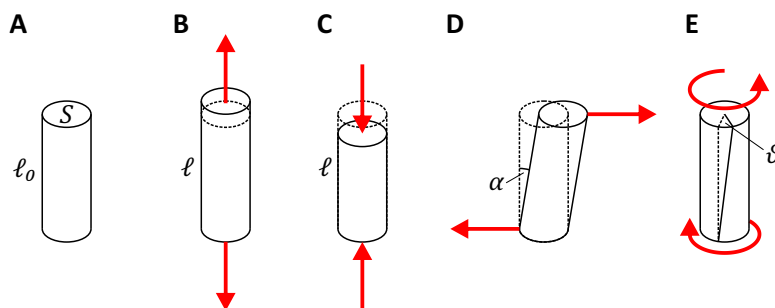
$$F_{\text{vzgon}} = V_{\text{telo}} \rho_{\text{tekocina}} g \cdot \quad (6.4)$$

Arhimedov zakon uporabljajo npr. fizioterapevti, ki računajo obremenitve gležnja ali kolena med telovadbo v bazenu – višje, kot nam sega voda v bazenu, večja je sila vzgona in manjša je sila v sklepu.

Poglavje 7

Deformacije trdnih snovi

V nasprotju s plini in tekočinami imajo trdna telesa svojo obliko, ki se spremeni šele ob delovanju močnih zunanjih sil. Slika 7.1 prikazuje nekaj najpogostejših načinov delovanja zunanjih sil in posledičnih deformacij: natezno, tlačno in strižno deformacijo že poznamo, za razumevanje zlomov kosti v medicini pa je pomembna tudi vzvojna (torzijska), ki je podobna strižni, le da je telo obremenjeno z navorom in ne s silo.

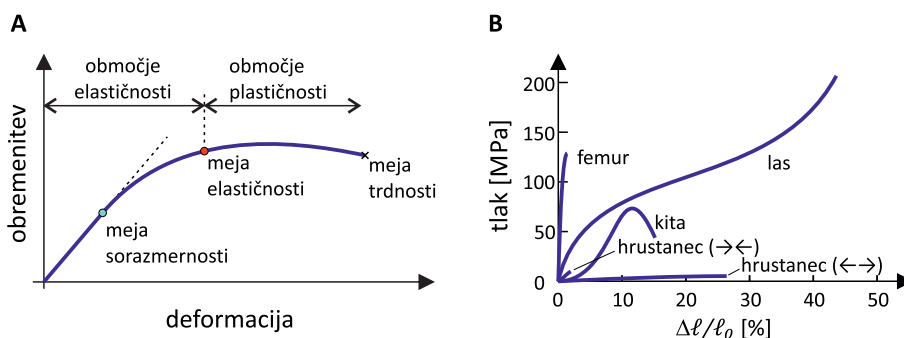


Slika 7.1: Shematični prikaz osnovnih tipov obremenitve in posledičnih deformacij trdnih teles. A) V ravnovesju ima telo dolžino ℓ_0 in površino preseka S . B) Natezna obremenitev. C) Tlačna obremenitev. D) Strižna obremenitev. Pri njej je mera za velikost deformacije kot nagiba α . E) Vzvojna oz. torzijska obremenitev. Mera za velikost deformacije pri njej je kot zasuka ϑ .

Poglejmo si nekaj osnovnih pojmov, s katerimi opisujemo deformacijo trdnih snovi pod obremenitvijo. Prva pomembna lastnost je obrnljivost deformacije: če se telo po prenehanju obremenitve vrne v začetno obliko, gre za *elastično* oz. *prožno* deformacijo, v nasprotnem primeru pa za *plastično* de-

formacijo. Guma je primer zelo prožne snovi, ki se lahko vrne v prvotno obliko tudi po velikih deformacijah, gnetenje plastelina pa je lep primer plastične deformacije.

Mehanske lastnosti nekega telesa pogosto prikažemo na diagramu, na katerem je prikazana odvisnost obremenitve od deformacije (slika 7.2). Za mnoge snovi velja, da je pri dovolj majhni obremenitvi velikost deformacije kar sorazmerna obremenitvi. Sorazmernost med deformacijo in obremenitvijo imenujemo Hookov zakon, ki smo ga že srečali pri idealni vzmeti (primer 3.4). Če se obremenitev poveča preko meje sorazmernosti, je za nadaljnje povečevanje deformacije potrebna vedno manjša obremenitev, deformacija pa je še vedno v območju elastičnosti in je reverzibilna. Šele ko prekoračimo t.i. mejo elastičnosti in preidemo v območje plastičnosti, se telo preoblikuje trajno in se po prenehanju obremenitve ne vrne več v začetno obliko. Ko deformacija doseže mejo trdnosti, se snov zlomi oz. pretrga.



Slika 7.2: A) Shematični prikaz tipičnega obnašanja trdnih teles pod obremenitvijo. Z večanjem obremenitve se večja deformacija - pri majhnih deformacijah je zveza linearna, pri večjih pa za povečanje deformacije potrebujemo vedno manjšo povečanje obremenitve. Če obremenitev ni prevelika, je deformacija v območju elastičnosti in telo se po prenehanju obremenitve vrne v začetno obliko. Pri večjih obremenitvah pridemo v območje plastičnosti, pri dovolj veliki obremenitvi pa dosežemo mejo trdnosti in se telo zlomi oz. pretrga. B) Zveza med deformacijo in natezno obremenitvijo za femur, kito, hrustanec in las [7, 8]. Zveze za hrustanec in kito so tudi pri majhnih deformacijah nelinearne. Za hrustanec je prikazana tudi zveza za tlačno obremenitev ($\rightarrow\leftarrow$), pri kateri se deformira bistveno manj kot pri natezni ($\leftarrow\rightarrow$). Prikazane zveze so ilustrativne, saj so med ljudmi obstajajo velike variacije, poleg tega pa se zelo spreminjajo tudi s starostjo.

”Trdoto” snovi¹ v območju sorazmernosti pogosto opišemo z *elastičnimi konstantami* oz. *elastičnimi moduli* snovi. To so konstante, ki nastopajo v Hookovem zakonu in so za različne deformacije definirane različno. Najpreprostejši Hookov zakon smo srečali pri vzmeti, kjer silo in deformacijo povezuje konstanta vzmeti ($F = kx$). Hookov zakon za natezno in tlačno obremenitev elastične snovi zapišemo podobno:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta \ell}{\ell_0}, \quad (7.1)$$

kjer se konstanta E imenuje *Youngov modul* in ima enoto pascal, ℓ_0 je dolžina telesa brez obremenitve, $\Delta \ell$ sprememba dolžine telesa pod obremenitvijo, S pa je prečni presek telesa. Hookov zakon je v tem primeru torej zveza med nateznim tlakom in relativnim podaljšanjem telesa (vrednost $\Delta \ell / \ell_0$ predstavlja relativno spremembo dolžine) – če na snov delujemo s tlakom, ki je 1 % vrednosti Youngovega modula, se bo podaljšala za 1 % svoje dolžine (primer 7.1). Na grafu zveze med obremenitvijo in deformacijo (slika 7.2A) lahko vrednost Youngovega modula odčitamo kot naklon krivulje v območju sorazmernosti. ”Trša” kot je snov, večji ima Youngov modul in bolj strma je krivulja.

Strižno deformacijo opišemo s kotom nagiba α (slika 7.1D), Hookov zakon zanjo pa je sorazmernost med kotom nagiba in strižno napetostjo:

$$\tau = E_s \alpha, \quad (7.2)$$

kjer konstanto E_s imenujemo *strižni modul*.

Vzvojno deformacijo opišemo s kotom zasuka θ (slika 7.1E), obremenitev pa je kar navor, s katerim zvijamo telo. Sorazmernostni koeficient v tem primeru imenujemo *direkcijska konstanta* (D), Hookov zakon pa zapišemo kot:

$$M = D \theta \quad (7.3)$$

Opozorimo naj, da po zgornjih definicijah Youngov in strižni modul nista odvisna od oblike temveč le od vrste snovi. Direktijska konstanta in konstanta vzmeti sta po drugi strani odvisni tudi od oblike. Pri dani sestavi kosti je

¹V pogovornem jeziku trdne snovi niso tekoče, trde pa niso mehke. Strokovna definicija ”trdote” ni tako enostavna, a je tu ne bomo obravnavali.

npr. njena direkcijska konstanta odvisna od njene debeline (kako?), Youngov modul pa ne.

Pri enostavnih snoveh so velikosti modulov med seboj pogosto povezane in imajo npr. snovi z velikim Youngovim modulom tudi velik strižni modul. Preproste povezave med različnimi moduli pa ne držijo več pri zapletenejših telesih, še posebej pri takšnih, ki so sestavljena iz različnih strukturnih komponent in niso homogena in izotropna (t.j. nimajo enake sestave po vsej prostornini in ne enakih lastnosti v vseh smereh). Enostaven primer takega telesa je kup listov papirja, ki jih postavimo na ravno površino - tak kup ima relativno velik Youngov modul na tlačno obremenitev z zgornje strani, njegov strižni modul pa je majhen, saj ga lahko poruši že majhna vodoravna sila.

Mnoge biološke snovi niso enostavne, zato so njihove mehanske lastnosti pogosto bolj zapletene od lastnosti npr. kosa jekla. Slika 7.2B prikazuje zvezo med deformacijo in obremenitvijo za štiri biološke snovi. Hrustanec je npr. bistveno trši ob stiskanju kot ob raztezanju, natančna analiza pa pokaže, da zveza med obremenitvijo in deformacijo ni linearna niti pri majhnih deformacijah (takim snovem pravimo ne-Hookeve). Las na prvi pogled zgleda močnejši od femurja, a spomnimo se, da so lasje zelo tanki in je natezni tlak zelo velik že pri zelo majhnih silah. Izkaže se tudi, da imajo kosti zaradi svoje neizotropne sestave večji Youngov modul za longitudinalno obremenitev kot za transversalno obremenitev [8].

Poznavanje mehanskih lastnosti ni pomembno le za različne snovi in tkiva, ampak tudi za celotne organe. Za votle organe (npr. za pljuča ali žile) je tako zelo pomembna lastnost njihova *podajnost* oz. *komplianca* (C), ki pove, za koliko se organ raztegne, če se spremeni tlačna razlika med notranjostjo in zunanostjo organa. Definirana je preko enačbe

$$\Delta V = C \Delta p \quad (7.4)$$

Če ima organ veliko podajnost, se mu bo torej prostornina opazno spremenila že ob majhni spremembi tlaka. Vene so npr. mnogo bolj raztegljive od arterij in imajo torej tudi precej večjo podajnost. Iz definicije podajnosti sledi ($C = \Delta V / \Delta p$), da jo lahko razberemo tudi kot naklon krivulje, ki opisuje zvezo med prostornino in tlakom v organu. Ta odvisnost ponavadi ni linearna, zato tudi podajnost ni konstanta ampak je odvisna od prostornine organa. Včasih se uporablja tudi specifična podajnost, t.j. podajnost na enoto prostornine, $C_p = C/V$, ki je količina, analogna stisljivosti (enačba 6.2).

Primer 7.1: obremenjevanje kosti in las

1. Ocenimo, za koliko se skrajša femur, ko stojimo na eni nogi! Youngov modul kosti na longitudinalno tlačno obremenitev je približno 18 GPa, dolžina kosti je približno 0.5 m, polmer njenega prečnega preseka je približno 10 mm, naša masa pa je približno 70 kg.

Tlak, s katerim obremenjujemo femur je

$$p = \frac{F}{S} = \frac{mg}{\pi r^2} = \frac{700 \text{ N}}{\pi 0,01^2 \text{ m}^2} \approx 2,2 \text{ MPa} ,$$

kar je približno 0,01 % vrednosti Youngovega modula. S pomočjo enačbe 7.1 tako ugotovimo, da se bo kost skrčila za približno 0,01 % svoje dolžine, kar je 0,05 mm in je v primerjavi z dolžino hlač praktično zanemarljivo.

2. Za koliko pa se lahko femur raztegne preden se zlomi? Na sliki 7.2B je razvidno, da je meja trdnosti pri približno 1 % deformaciji. Femur, dolg 0,5 m, se pri natezni obremenitvi pred zlomom torej podaljša za približno 5 mm, kar nikakor ni zanemarljivo.

3. Kako težak predmet lahko obesimo na las preden se strga? Premer lasu je približno 100 μm .

Na sliki 7.2B je razvidno, da je meja trdnosti lasu pri približno 200 MPa. Sila, ki je potrebna za tako velik natezni tlak je

$$F = pS = p\pi r^2 = 200 \text{ MPa} \cdot \pi \cdot 50^2 10^{-12} \text{ m}^2 = 1,6 \text{ N}$$

Na en las lahko torej obesimo predmet z maso približno 160 g.

4. Ocenimo, koliko las moramo splesti v kito, da bo na njej lahko varno visela 70 kg težka oseba?

Intuitivno sklepamo, da več las zdrži večjo težo. Če vsak las zdrži 0,16 kg, bosta dva zdržala 0,32 kg in tako naprej. Potrditev za to intuitivno ugotovitev najdemo v dejstvu, da je sila, ki je potrebna za deformacijo telesa sorazmerna njegovemu prečnemu preseku (v enačbi 7.1, $F = SE\Delta\ell/\ell_0$). Z dodajanjem las v kito sorazmerno povečujemo njen presek, Youngov modul pa se pri tem seveda ne spremeni.

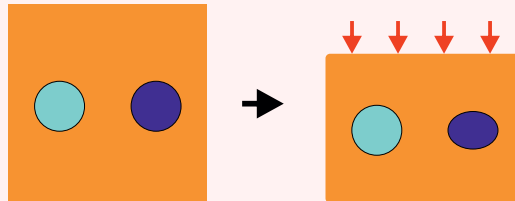
Glede na zgornje podatke, bi osebo s 70 kg torej zdržalo že $700 \text{ N}/1,6 \text{ N} \approx 440$ las! Morda torej le ni nemogoče, da je baron Münchhausen sam sebe za lase potegnil iz blata...

Primer 7.2: elastografija

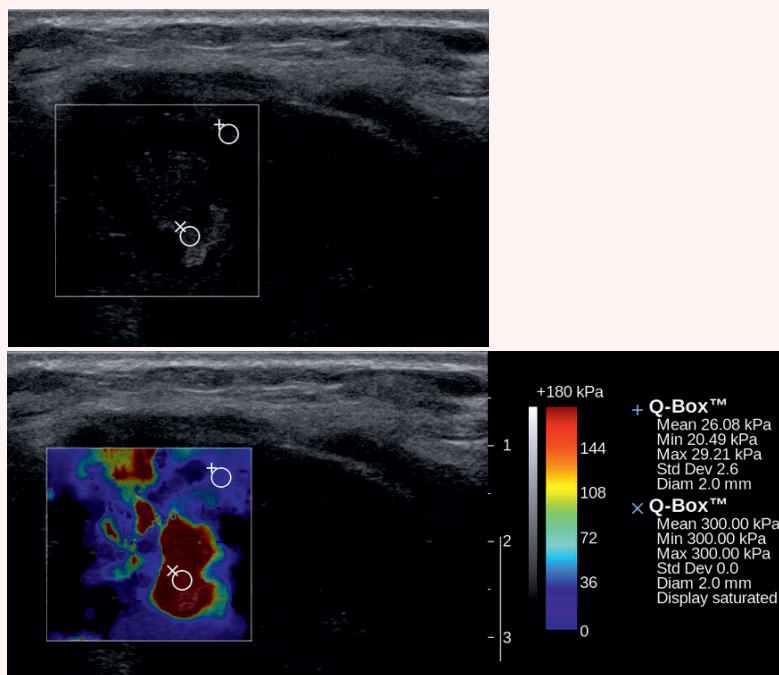
Tumorji so pogosto trši od zdravega tkiva, zato jih zdravniki že od nekdaj zaznavajo s tipanjem (s t.i. *palpacijo*). V zadnjih letih poskušajo to znanje prenesti tudi v sodobne objektivne diagnostične metode, s katerimi bi lahko neinvazivno izmerili "trdoto" tkiv v telesu oz. njihov Youngov elastični modul. Ena takih tehnik je *elastografija*.

Osnovna ideja elastografije je preprosta: telo slikamo s standardno slikovno metodo, nato ga deformiramo, slikamo še enkrat ter sliki primerjamo. Trde strukture v telesu bomo brez težav razbrali iz primerjave obeh slik, saj se bodo deformirale manj od mehkih struktur. Princip ilustrira spodnja slika. Svetlo modra struktura v tkivu je

mnogo trša od temno modre in okoliškega tkiva, zato se ob deformaciji telesa deformira bistveno manj.



Opisani princip je združljiv s katerokoli slikovno metodo, največ pa ga kombinirajo z ultrazvočnim slikanjem in magnetno resonanco. Deformacijo tkiva lahko dosežemo na več načinov: tkivo lahko preprosto stisnemo od zunaj, lahko uporabimo ultrazvočni val, lahko pa izkoristimo kar fiziološke deformacije v telesu, npr. utripanje srca. Če poznamo elastične module običajnega tkiva, lahko računalnik na osnovi primerjave slik pred in po deformaciji izračuna elastične module vseh struktur na sliki.



Primer ultrazvočne elastografije. Zgoraj je prikazana standardna ultrazvočna slika papilarnega karcinoma ščitnice, spodaj pa še ista slika, na kateri pa so strukture obarvane glede na izmerjen elastični modul. Elastografija lepo pokaže, da je karcinom bistveno trši od okoliškega tkiva (povzeto po [9]).

Poglavje 8

Površinska napetost

Glavna značilnost kapljev in je, da se molekule v njih držijo skupaj, hkrati pa se lahko premikajo ena mimo druge. Kapljevine imajo zaradi tega zanimivo lastnost imenovano *površinska napetost*, ki omogoča vrsto presenetljivih pojavov, npr. tek vodnih drsalcev po vodni gladini ali pa spontan dvig vode v tankih kapilarah.

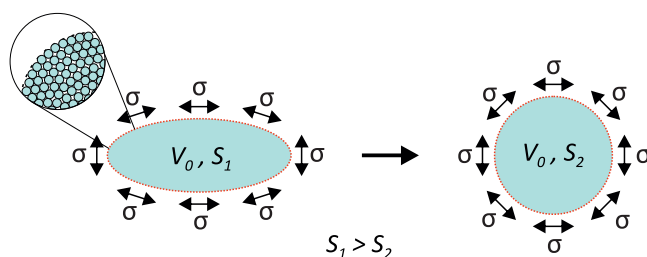
Površinsko napetost bomo najboljše razumeli, če na vodno gladino pogledamo s stališča energije¹. Molekule vode se med seboj privlačijo (če se ne bi privlačile, bi se razletele po vsem prostoru!) in če hočemo vez med dvema molekulama pretrgati, moramo opraviti delo. Za vsako molekulo vode je tako energijsko ugodno, da se poveže s čim več sosedami. Molekule na površini vode na eni strani nimajo sosed, s katerimi bi lahko ustvarjale vezi, zato je površina energijsko neugodna. Vsako povečanje površine vode je povezano s trganjem vezi med molekulami, ki se iz notranjosti preselijo na površino, ter torej stane energijo, ki je kar sorazmerna povečanju površine.

V poglavju o energiji (poglavje 4.2) smo videli, da sistemi težijo k čim manjši energiji, zaradi česar tudi voda teži v stanje s čim manjšo površino. Če ni zunanjih sil, se vodna kapljica zato oblikuje v kroglo, ki je oblika z najmanjšo površino pri dani prostornini (slika 8.1). Tendencia po čim manjši površini se nam s stališča sil kaže kot površinska napetost, ki si neprestano želi krčiti površino.

Opis površinske napetosti dopolnimo še z njeno definicijo preko enačbe:

$$A = \Delta W_\sigma = \sigma \Delta S \quad (8.1)$$

¹Dodatno razlago površinske napetosti najdete v [10].



Slika 8.1: Shematski prikaz izvora površinske napetosti. Površina vode je energijsko neugodna, saj molekule vode na površini ne morejo tvoriti toliko vezi s sosedomi kot molekule v notranjosti. Voda si zato želi svojo površino čim bolj zmanjšati. Če ni zunanjih sil, se kapljica vode spontano preoblikuje v kroglo, kar je oblika z najmanjšo površino pri dani prostornini. Ta tendenca vode po zmanjšanju površine se nam kaže kot površinska napetost σ , ki si neprestano želi krčiti površino in je konstantna po vsej gladini in ni odvisna od oblike kapljice.

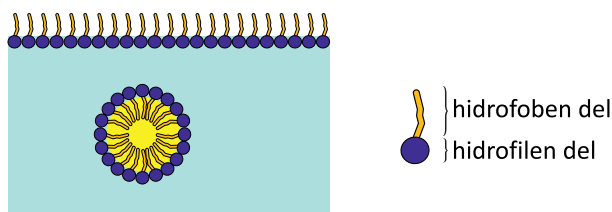
kjer je A delo, ki ga moramo vložiti v povečanje površine, W_σ je površinska energija, površinska napetost pa je sorazmernostni koeficient σ in ima enoto N/m. Izvor površinske energije so medmolekulske potencialne energije (slika 4.3), zato tudi pri W_σ ponavadi merimo spremembe in ne absolutnih vrednosti. Površinska napetost pri čistih snoveh ni odvisna od velikosti površine: gladina vode je vedno enako napeta, ne glede na svojo velikost ali obliko.

V splošnem je površinska napetost lastnost stika med dvema snovema in opisuje, kako "radi" sta dve snovi v stiku: manj kot sta dve snovi "radi" v stiku, šibkejša so medmolekulske vezi med njima, več energije moramo vložiti v povečanje površine njunega stika in večja je površinska napetost med njima (s povečevanjem površine njunega stika trgamo vezi v vsaki od snovi, novih vezi na površini pa ne ustvarjamo). Površinska energija in površinska napetost obstajata tudi na meji trdnih snovi, le da se te ne morejo preoblikovati, zaradi česar površinsko napetost pri njih težje opazimo.

Snovi, ki z vodo ne morejo tvoriti vezi in s katerimi ima voda veliko površinsko napetost, so *hidrofobne* (npr. olje), snovi, ki pa so rade v stiku z vodo, pa so *hidrofilne* (npr. steklo). Obstajajo pa tudi molekule, ki imajo dvojno naravo: na eni strani so hidrofilne, na drugi pa hidrofobne, oz. so *amfipatske* (s sinonimom tudi amfifilne). Takšne so mnoge pomembne biološke molekule, npr. detergenti in lipidi, ki imajo polarno glavo in nepolarne repe, pa tudi nekateri proteini. Amfipatske molekule se v vodni raztopini spontano razporedijo po površini vode in sicer tako, da so njihovi polarni deli obrnjeni proti vodi (slika 8.2). Na tak način bo namreč celoten sistem v energijsko najugo-

dnejšem stanju: vse molekule vode lahko tvorijo vezi ali med seboj ali pa s polarnimi deli amfipatskih molekul.

Prisotnost amfipatskih molekule lahko torej občutno zniža površinsko napetost, zaradi česar jih imenujemo tudi *surfaktanti* (površinsko aktivne molekule). Detergente npr. uporabljamo zato, da znižajo površinsko napetost med vodo in oljem, zaradi česar lahko velike oljne kapljice lažje razbijemo na manjše ter jih odplaknemo z vodo. Različni surfaktanti (večinoma lipidi) so tudi ključni za delovanje pljuč, saj je v pljučih ogromna površina med vodno raztopino in zrakom in je zato tam dobro imeti čim manjšo površinsko napetost.



Slika 8.2: Shematski prikaz razporeditve surfaktantov v vodi. Surfaktanti so amfipatske molekule, stavljene iz polarnega in nepolarnega dela (na sliki je primer molekule detergenta). V vodi take molekule spontano poiščejo površino (npr. stik z zrakom ali oljem) in na njej nepolarne repe obrnejo stran od vode. Surfaktanti tako občutno zmanjšajo površinsko napetost vode, saj s surfaktantom prekrita površin ni več tako energijsko neugodna.

Omenimo naj še, da med napetostjo in tlakom obstaja lepa analogija: obe količini sta skalarja, le da tlak obstaja v tridimenzionalnem prostoru, napetost pa v dvodimenzionalnih površinah. Če je tlak povezan s silo na enoto površine, je napetost enaka sili na enoto dolžine. Na robu kapljevine se površinska napetost čuti kot sila, s katero kapljevina vleče rob. Sila zaradi površinske napetosti je vedno vzporedna z gladino, njena velikost pa je sorazmerna dolžini roba in površinski napetosti

$$F_{\sigma} = \sigma \ell, \quad (8.2)$$

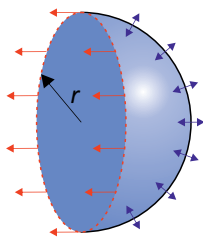
kjer smo z ℓ zapisali dolžino roba površine.

8.1 Laplace-ov zakon za napetost ukrivljenih površin

Površinska napetost vodo neprestano stiska, zato je tlak v vodni kapljici malo večji od zunanjega. To tlačno razliko lahko izračunamo, če si v mislih kapljico prerežemo na polovico in pogledamo ravnovesje sil (slika 8.3). V levo smer vleče sila zaradi površinske napetosti (en. 8.2), ki tangentno na površino deluje vzdolž vsega roba kapljice in je sorazmerna površinski napetosti in dolžini roba kapljice, $F_\sigma = \sigma 2\pi r$. Tej sili nasprotuje tlačna razlika med notranjostjo in zunanostjo kapljice, ki deluje pravokotno na njeno gladino. Rezultanta sil tlaka na desno površino polsfere je usmerjena v desno (komponente sil, ki so vzporedne prerezu kapljice, se zaradi simetrije med seboj izničijo) kar in je sorazmerna tlačni razliki in površini preseka, $F = \Delta p \pi r^2$. Ko obe sili izenačimo in enačbo preuredimo, dobimo znameniti Laplaceov zakon, ki povezuje tlačno razliko in napetost ukrivljene površine:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \quad (8.3)$$

Po pričakovanju je povečanje tlaka v kapljici sorazmerno površinski napetosti, povsem neintuitivno pa je tlačna razlika obratno sorazmerna radiju in je torej tlak v manjših kapljicah večji kot v velikih! Laplaceov zakon v malo drugačni obliki velja tudi za žile, kjer ima lahko zelo hude posledice (primer 8.1).



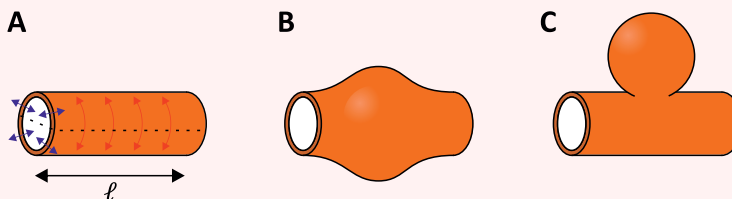
Slika 8.3: Shematični prikaz ravnovesja sil v kapljici vode. Površinska napetost kapljico stiska, zato je v njej večji tlak kot zunaj. Tlačno razliko, napetost površine in ukrivljenost površine povezuje Laplaceov zakon (enačba 8.3), ki sledi iz ravnovesja sil zaradi površinske napetosti (delujejo vzdolž roba kapljice in so na sliki označene z rdečo) in sil zaradi tlačne razlike (te delujejo pravokotno na površino in so na sliki označene z modro).

Podobno situacijo kot pri kapljici vode srečamo tudi pri milnih mehurčkih

(le da je pri njih površina med vodo in zrakom dvojna – ena na zunanji in ena na notranji strani – in je zato tudi tlačna razlika še enkrat večja kot pri kapljici) in v alveolih v pljučih (pri njih je zrak na sredini obdan z vodno raztopino, a je geometrija površine enaka kot pri kapljici). Ker so alveoli zelo majhni (njihov premer je le nekaj $100\ \mu\text{m}$), bi bila v njih tlačna razlika brez surfaktantov zelo velika in bi lahko povzročila kolaps pljuč. S tem imajo lahko velike težave nedonošenčki, saj se surfaktanti v njihovih pljučih začnejo tvoriti šele v drugi polovici nosečnosti. Zdravniki jim pomagajo s terapijo s surfaktanti, ki jih v pljuča takoj po porodu vpihajo od zunaj.

Primer 8.1: Laplaceov zakon za žile in anevrizma

Laplaceov zakon je splošen zakon, ki sledi iz ravnovesja sil in povezuje tlačno razliko preko površine z njeno napetostjo in ukrivljenostjo. Velja npr. tudi za žile, pri katerih krvni tlak v žili napenja žilne stene, le da sta v primerjavi z vodno kapljico pri žilah vzrok in posledica zamenjana: pri kapljici zaradi površinske napetosti naraste tlak v notranjosti, pri žili pa krvni tlak v notranjosti povzroči napetost v žilni steni.



Poglejmo si, kako Laplaceov zakon zapišemo za žilo. V mislih si žilo po dolgem razrežimo in zapišimo ravnovesje sil (v pomoč nam je lahko slika A): sila, zaradi napetosti je sorazmerna dolžini roba, $F_\sigma = 2\ell\sigma$ (ℓ je dolžina žile), uravnovesi pa jo sila zaradi tlačne razlike, ki je sorazmerna površini preseka žile, $F = \Delta p\ell 2r$. Ko sili izenačimo in pokrajšamo ℓ , dobimo Laplaceov zakon za valjasto geometrijo:

$$\sigma = \Delta p r \quad (8.4)$$

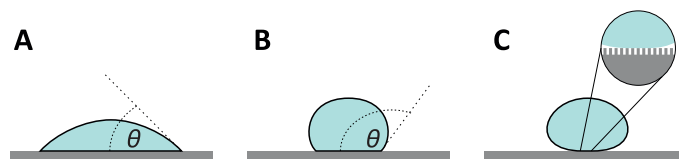
Tu je σ napetost žilne stene in v nasprotju s površinsko napetostjo ni konstanta. Napetost smo zato zapisali na levo stran enačbe, tlačno razliko, ki je vzrok napetosti, pa smo dali na desno (enačba je sicer povsem analogna Laplaceovem zakonu, enačbi 8.3, le faktorja 2 ni, saj je ukrivljenost valjaste površine polovica ukrivljenosti sferične površine kapljice). Po pričakovanju ima večji tlak v žili za posledico večjo napetost žilne stene. Laplaceov zakon tudi pove, da je pri danem tlaku napetost tem večja, čim večji je radij žile. Kapilare so v primerjavi z arterijami zelo majhne, zato so lahko njihove žilne stene bistveno tanjše.

Za žile ima Laplaceov zakon usodne posledice: če žilna stena zaradi prevelike napetosti začne popuščati in se žila izboči, se napetost v žilni steni s tem ne sprosti, temveč se le še poveča! Iz zgornje enačbe namreč vidimo, da je pri danem krvnem tlaku napetost žilne stene sorazmerna radiju žile! Popuščanje žilnih sten je torej zelo nestabilni

pojav in vodi v neustavljivo napihovanje žile, kar imenujemo *anevrizma*. Če se anevrizme ne zdravi, lahko počí in v skrajnem primeru povzroči tudi smrt. Na slikah B in C sta shematsko prikazana dva primera anevrizme: vretenasta (fuziformna) in vrečasta (sakciformna). V obeh primerih se zaradi Laplaceovega zakona z večanjem radija povečuje tudi napetost v žilni steni, ki zato postaja vse bolj nestabilna.

8.2 Močenje površin in kapilarni efekt

Če pride kapljevina v stik s trdno snovjo, njenega obnašanja ne definira le njena površinska napetost z zrakom, temveč tudi površinska napetost med trdno snovjo in zrakom ter trdno snovjo in kapljevino. Kapljevina se trdne snovi dotika pod t.i. *kontaktnim kotom* oz. *kotom močenja*, ki je odvisen od vseh treh površinskih napetosti, pa tudi od hrapavosti površine (slika 8.4). Če je trdna snov npr. raje v stiku s kapljevino kot z zrakom, bo energijsko ugodno, da se kapljevina po površini razpotegne in bo zato kontaktni kot manjši od 90° . V takem primeru pravimo, da kapljevina moči podlago.

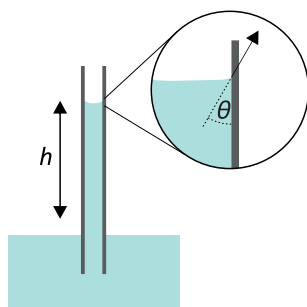


Slika 8.4: Shematični prikaz treh stopenj močenja vode na podlagi. A) Na hidrofilnih površinah je kontaktni kot (θ) manjši od 90° in pravimo, da voda moči podlago (tako je npr. na steklu). V tem primeru je energijsko ugodnejši stik med podlago in vodo kot med podlago in zrakom. B) Na hidrofobnih površinah (npr. na teflonu) je kontaktni kot večji od 90° in pravimo, da voda podlage ne moči. C) Če je kontaktni kot blizu 180° , pravimo, da je podlaga superhidrofobna. Takšni so npr. listi nekaterih rastlin. Površino je težko narediti superhidrofobno zgolj s kemijsko obdelavo, superhidrofobne podlage so ponavadi hrapave in imajo mikroskopske strukture, v katerih se lahko ujame zrak.

Pri hidrofilnih površinah je kontaktni kot za vodo manjši od 90° , pri hidrofobnih pa večji. Steklo je npr. hidrofilno in ima kontaktni kot, ki je manjši od 10° , teflon pa je hidrofoben in ima kontaktni kot nekaj večji od 110° . Če je kot 0° lahko pride celo do popolnega močenja, po drugi strani pa so nekatere snovi superhidrofobne, kar pomeni, da je kontaktni kot za vodo blizu 180° .

Superhidrofobni so listi mnogih rastlin, npr. nepoškodovani cvetni listi vrtnice, v zadnjih letih pa se superhidrofobnost vse bolj uporablja tudi pri obdelavi površin predmetov. Za medicino je ta pojav zanimiv, ker se na superhidrofobnih površinah težje vzpostavi biofilm (t.j. tanka plast vode, bakterij in njihovih izločkov), zaradi česar so take površine manj izpostavljene možnosti bakterijske kontaminacije.

Z močenjem je povezan zanimiv pojav, imenovan *kapilarni efekt*. Najbolje ga bomo spoznali, če v vodo navpično potopimo stekleno kapilaro (slika 8.5). Ker voda dobro moči steklo, je energijsko ugodno, da se zmanjša površina med steklom in zrakom ter poveča površina med steklom in vodo. Voda se zato v stekleni kapilari začne dvigovati in se dviguje, dokler se sila površinske napetosti ne uravnesi s silo teže vodnega stolpca v kapilari. V ravnovesju se v kapilari vidi ukrivljen meniskus, ki je posledica kontaktnega kota.



Slika 8.5: Shematični prikaz kapilarnega dviga v tanki stekleni kapilari. Ker voda moči steklo, je energijsko ugodno, da se površina med steklom in vodo poveča, površina med steklom in zrakom pa zmanjša. Navpična steklena kapilara zato vase "posrka" vodo. Ravnovesno višino (h) lahko izračunamo, če izenačimo silo teže, ki vodni stolpec v kapilari vleče navzdol in silo zaradi površinske napetosti, ki vodo vleče gor (enačba 8.7). Tanjša, kot je kapilara, večje je razmerje med površino in prostornino vode in večji je kapilarni efekt.

Višino kapilarnega dviga lahko izračunamo iz ravnovesja med silo teže vode v kapilari in silo površinske napetosti. Sila teže je sorazmerna masi vodnega stolpca v kapilari oz. njegovi prostornini:

$$F_g = mg = \rho V g = \rho \pi r^2 h g, \quad (8.5)$$

kjer je ρ gostota vode, prostornina vodnega stolpca v kapilari pa je $V = \pi r^2 h$, kjer je h višina kapilarnega dviga, r pa radij kapilare. Sila, s katero vleče steklo vodo navzgor je po velikosti enaka navpični komponenti sile površinske

napetosti na stiku med vodo in steklom. Iz slike 8.5 razberemo, da je navpična komponenta enaka

$$F_{\sigma} = \sigma 2\pi r \cos \theta . \quad (8.6)$$

Ko sili izenačimo, dobimo za višino kapilarnega dviga naslednji izraz:

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{r\rho g} \quad (8.7)$$

Vidimo, da je kapilarni dvig tem višji, čim večja je površinska napetosti, čim manjši je kontaktni kot, čim redkejša je tekočina in čim tanjša je kapilara. Slednje lahko razumemo tudi s stališča geometrije: razmerje med površino in prostornino je obratno sorazmerno z radijem cevke, zato so v tanjših cevkah površinski efekti mnogo bolj izraziti. Zaradi kapilarnega efekta lahko npr. s papirjem brez težav popivnemo vodo. Voda celulozo namreč dobro moči, hkrati pa je v celulozi tudi zelo veliko razmerje med površino vlaken in prosto prostornino med njimi. Po drugi strani lahko iz zgornje enačbe vidimo, da je v primeru, ko kapljevina površine ne moči, kapilarni dvig negativen ($\cos \theta$ je v tem primeru negativen). Živo srebro se npr. v stekleni kapilari spusti pod gladino.

Poglavje 9

Gibanje tekočin

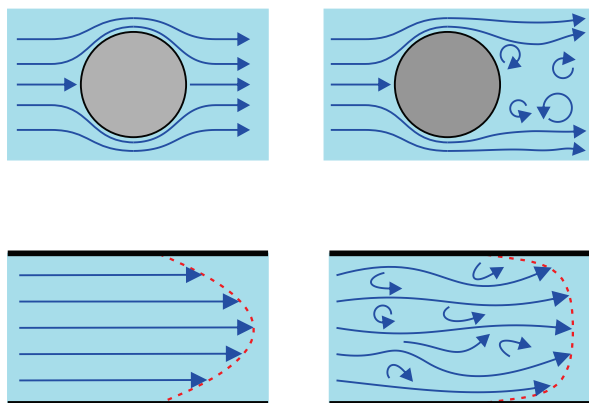
Vsak, ki je kdaj občudoval igro vodnega toka v bližnjem potoku, se je srečal z neverjetno raznolikostjo in zapletenostjo gibanja tekočin. Vsak majhen delček tekočine v toku se lahko namreč giblje z drugo hitrostjo in v drugi smeri, zato ni presenetljivo, da toka v splošnem ne moremo opisati z eno enostavno enačbo. V principu bi sicer lahko za opis obnašanja vsakega delčka tekočine uporabili 2. Newtonov zakon (zapisan za tekočine se imenuje Navier-Stokesova enačba), a je delčkov enostavno preveč, da bi njihovo lahko gibanje napovedali s preprosto formulo. Kompleksne tokove (npr. tok krvi v aorti) lahko zato v praksi analiziramo le s pomočjo računalnika in numeričnih simulacij. Le v določenih posebnih situacijah lahko tok tekočine zadovoljivo opišemo tudi z relativno enostavnimi zakonitostmi. V tem poglavju bomo spoznali nekaj teh zakonitosti, ki nam bodo pomagale razumeti osnovne biološke procese povezane z gibanjem tekočin.

9.1 Opisovanje tekočin v gibanju, viskoznost

O gibanju tekočin govorimo pri vseh pojavih, pri katerih se različni deli tekočine gibljejo eden glede na drugega. Do gibanja tekočine pride npr. med tokom tekočine po cevi, pa tudi pri premikanju telesa po mirujoči tekočini, saj mora telo pri tem tekočino odrivati. V obeh primerih se različni deli tekočine gibljejo v različnih smereh in z različnimi hitrostmi, zaradi česar je lahko celotna slika gibanja izjemno zapletena.

Tok tekočine si najlažje predstavljamo, če narišemo *tokovnice*, t.j. črte, ki sledijo poti izbrane točke v toku tekočine. Slika 9.1 prikazuje tokovnice toka tekočine pri obtakanju okroglega telesa in pri toku v cevi. Če je tok miren in

brez vrtincev, govorimo o *laminarnem* toku, če pa se tekočina vrtinči, gre za *turbulentni* tok. Pri majhnih hitrostih je tok ponavadi laminaren, pri velikih pa postane turbulenten. Turbulence so izvor šumenja toka, zaradi česar jih lahko, ko nastajajo v dihalnih poteh ali v krvnem obtoku, slišimo s stetoskopom. V eksperimentih tokovnic v tekočini ne moremo videti, razen če tekočini ne dodamo majhnih obarvanih delčkov in sledimo njihovi poti vzdolž toka.



Slika 9.1: Štirje primeri toka tekočine. V zgornji vrstici so prikazane tokovnice, ko tekočina obliva okroglo telo, v spodnji vrstici pa so prikazane tokovnice toka tekočine po cevi. V levem stolpcu je tok laminaren, v desnem pa turbulenten.

Ena najpomembnejših lastnosti realnih tekočin je *viskoznost*, ki pove, kako močno je trenje, do katerega v tekočini pride med njenim gibanjem (o idealnih tekočinah govorimo, ko lahko trenje zanemarimo). To notranje trenje v tekočini si lahko dobro predstavljamo, če se spomnimo, da se lahko sosednje molekule v tekočini gibljejo z različnimi hitrostmi in se zato "trejo" med seboj. Notranje trenje ima za gibanje tekočin podobno posledico, kot trenje pri gibanju trdnih teles: zaradi trenja je potrebno gibanje neprestano poganjati, saj se v nasprotnem primeru ustai. Če srce neha biti, se kri v žilah ustavi. Med gibanjem po tekočini čutimo notranje trenje kot upor, ki nam ga pri tem nudi tekočina.

Iz vsakdanjega življenja imamo z viskoznostjo kar nekaj izkušenj. Vemo npr., da lahko po zraku z žlico mahamo brez težav, po vodi je že malo težje, upor v medu pa je zelo velik. Viskoznost zraka je torej majhna, viskoznost medu pa velika. Opozoriti pa moramo, da vsakdanji jezik pogosto meša pojma viskoznost in gostota, čeprav gre za dve različni lastnosti, ki med seboj nista povezani. Gostota pove, kolikšno maso ima določena prostornina te-

kočine, viskoznost pa kako močno se tekočina zaradi notranjega trenja upira gibanju. Med gostoto in viskoznostjo tudi ni neposredne povezave: olje ima npr. manjšo gostoto kot voda in večjo viskoznost, med pa je gostejši in tudi bolj viskozen. Tudi v medicini se pojma včasih uporablja ohlapno: z izrazom "redka kri" včasih opisujemo kri z majhno viskoznostjo, zdravila za "redčenje krvi" pa pravzaprav le zmanjšujejo strjevanje krvi in na njeno gostoto ali viskoznost ne vplivajo bistveno.

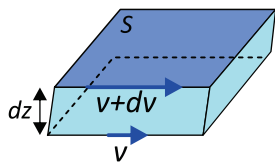
Stroga fizikalna definicija viskoznosti ni povsem enostavna in jo navajamo v MaFijemskem primeru 9.1. Zaenkrat le navedimo, da za označevanje viskoznosti uporabljamo grško črki η in da je enota za viskoznost $\text{Pa} \cdot \text{s} = \text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2 = \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$. Za vrednosti viskoznosti iz vsakdanjega življenja nimamo nobenega občutka, zato jih nekaj prikazujemo v tabeli 9.1. V nadaljevanju bomo opisali nekaj enostavnih posledic viskoznosti, ki so pomembne za razumevanje bioloških pojavov.

snov	jedilno olje	kri	voda	zrak
η [mPa · s]	80	3	1	0,02

Tabela 9.1: Viskoznost nekaterih snovi pri sobni temperaturi. Vrednost za kri je približna in velja za zdravo odraslo osebo pri majhnem pretoku krvi. V praksi je viskoznost krvi odvisna od mnogih dejavnikov, npr. od hematokrita in od strižne hitrosti (povzeto po [8]).

MaFijski primer 9.1: stroga definicija viskoznosti

Stroga fizikalna definicija viskoznosti je povezana s strižno silo, ki jo zaradi trenja čuti del tekočine, ko se ob njem gibljejo drugi deli (glej spodnjo sliko). Izkaže se, da je ta sila sorazmerna viskoznosti tekočine in pa razliki v hitrosti medsebojnega gibanja sosednjih plasti tekočine (če se dva sosedna dela tekočine gibljeta z enako hitrostjo, med njima seveda trenja sploh ni). Sila trenja je tudi sorazmerna velikosti površine (S), preko katere deluje, zato namesto o strižni sili govorimo o strižni napetosti, ki smo jo vpeljali na začetku opisovanja mehanskih lastnosti snovi, $\tau = F/S$ (slika 6.2). Vse povedano združimo v zapis z enačbo:



$$\tau = \eta \frac{dv}{dz} \quad (9.1)$$

V zgornji definiciji je τ strižna napetost v določeni točki v toku tekočine, η je viskoznost, izraz dv/dz pa opisuje, kako hitro se v tisti točki hitrost tekočine spreminja pravokotno na tokovnico (to količino imenujemo tudi strižna hitrost).

9.2 Gibanje v tekočini

Med gibanjem v tekočini čutimo silo upora, ki je posledica tega, da moramo med gibanjem tekočino neprestano odpraviti. V splošnem je izračun sile upora zahteven in je odvisen od vrste podrobnosti, zato bomo tu navedli le dva glavna splošna rezultata.

Pri majhni hitrosti oz. v režimu laminarnega toka je sila upora odvisna od viskoznosti tekočine in jo za okroglo telo dobro opiše t.i. Stokesov zakon upora:

$$F = 6\pi r \eta v, \quad (9.2)$$

kjer je r radij telesa, η je viskoznost tekočine, v pa relativna hitrost gibanja telesa glede na tekočino. Večje kot je telo, več je trenja in odpravljanja tekočine in večja je sila upora. Če telo ni okroglo, zgornja enačba še vedno približno velja, le konstante so drugačne. V zakonu hitrost nastopa s prvo potenco, zato ta zakon upora imenujemo tudi *linearni zakon upora*. Izvor sile upora v tekočinah je v osnovi podoben kot je izvor sile trenja med trdnimi telesi, le da pri slednjih sila trenja ni toliko odvisna od hitrosti gibanja, pri tekočinah pa je ta odvisnost zelo pomembna.

Pri veliki hitrosti se za telesom začenejo pojavljati turbulence in takrat se sila upora spremeni. Vpliv trenja namreč postane zanemarljiv v primerjavi s silo, ki jo telo čuti, ko vanj udarja tekočina s svojo maso. Izkaže se, da v takem režimu sila upora zadovoljivo opiše kvadratni zakon upora:

$$F = \frac{1}{2} c S \rho v^2, \quad (9.3)$$

kjer je S površina sprednjega preseka telesa, ρ je gostota tekočine, c pa je t.i. koeficient upora, ki opisuje, kako aerodinamično obliko ima telo. Vrednost c za kocko je približno 1, za sfero približno 0,5, za kapljičasto obliko, ki je ena najbolj aerodinamičnih, pa 0,04. Kvadratni zakon upora velja npr. med vožnjo po avtocesti, zato tam poraba goriva pri višjih hitrostih zelo hitro narašča.

Linearni zakon upora velja torej v laminarnem režimu toka, kvadratni pa v turbulentnem. V katerem od obeh režimov je neko gibanje, lahko ocenimo kar s primerjavo obeh sil upora, kot ju napovedujeta zgornji enačbi. Če velikost kvadratne sile delimo z velikostjo linearne (in zraven upoštevamo $S \propto r^2$, konstante pa zanemarimo) dobimo t.i. *Reynoldsovo število*

$$Re = \frac{\rho v r}{\eta} . \quad (9.4)$$

Reynoldsovo število nima enote, za oceno režima toka tekočine pa služi kar njegova velikost: večje kot je Re bolj turbulenten je tok. Poskusi so pokazali, da je pri gibanju okroglega telesa v tekočini tok ponavadi laminaren pod približno $Re < 1$, turbulenten pa nad približno $Re > 2000$. Pri vmesnih vrednostih, ko turbulence šele začnejo nastajati, je sila upora nekje med linearno in kvadratno. V praksi prehod v turbulentni režim ni odvisen le od Re , ampak še od okolice ter oblike telesa in od hrapavosti njegove površine. Zgornja enačba je uporabna tudi za telesa, ki nimajo okrogle oblike, pri čemer lahko za vrednost r vstavimo kar prečno dimenzijo telesa. Primer 9.1 prikazuje uporabo linearne zakona za opis sedimentacije eritrocitov v krvni plazmi.

Primer 9.1: sedimentacija

Za začetek si pogledajmo, kaj se dogaja s telesi, ki tonejo v tekočini, kasneje pa bomo dobljen rezultat uporabili za razumevanje diagnostičnega testa sedimentacije eritrocitov.

Na delce v raztopini delujeta sila teže (F_g) in sila vzgona (F_v). Če je gostota delcev večja od gostote raztopine, rezultanta teh sil kaže navzdol in vleče delce proti dnu. Ko delci med tonjenjem pridobivajo hitrost, na njih deluje vedno večja sila upora (F_u), ki kaže navpično navzgor. Zato bo slej ko prej rezultanta vseh sil postala nič in od takrat naprej bodo delci tonili z enakomerno hitrostjo, t.i. hitrostjo sedimentacije. Ocenimo te hitrosti dobimo iz pogoja, da je vsota vseh treh sil enaka 0. Za primer okroglih delcev, ki tonejo v laminarnem režimu lahko torej zapišemo:

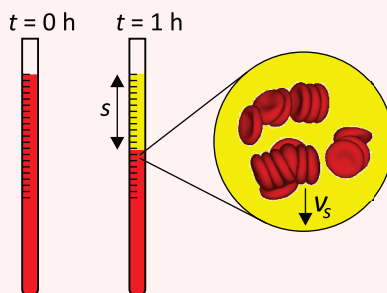
$$6\pi r v \eta + \rho_{\text{raztopina}} \frac{4}{3} \pi r^3 g = \rho_{\text{kroglica}} \frac{4}{3} \pi r^3 g \quad (9.5)$$

Če razliko gostot kroglice in raztopine označimo z $\Delta\rho = \rho_{\text{kroglica}} - \rho_{\text{raztopina}}$ in zgornjo enačbo preuredimo, ugotovimo, da je hitrost sedimentacije sorazmerna ra-

diju kroglice na kvadrat:

$$v = \frac{2\Delta\rho gr^2}{9\eta} \quad (9.6)$$

Iz enačbe sledi pomemben zaključek: pri dani gostoti večja telesa tonejo hitreje kot manjša (enačba velja tudi za neokrogla telesa, le da so konstante v enačbi drugačne). V različnih bolezenskih stanjih (predvsem pri vnetju) se eritrociti v krvi lepijo v večje skupke, kar izkoristimo pri krvnem testu imenovanem *sedimentacijska hitrost eritrocitov* (angl. ESR ali erythrocyte sedimentation rate). Skupki eritrocitov imajo namreč enako gostoto in veliko večji efektivni radij kot posamezne celice, zato tonejo mnogo hitreje. Pri tem testu damo kri v posebno pipeto, jo postavimo navpično ter izmerimo, za koliko se eritrociti v krvni plazmi posedejo v eni uri (to razberemo brez težav, saj se rdeči eritrociti pri tem ločijo od rumenkaste krvne plazme). Izmerjena razdalja v mm je ravno sedimentacijska hitrost v mm/h (ta enota je za standardizirana za test sedimentacije, zato se jo pri podajanju rezultatov testa včasih kar izpusti). V zdravi krvi je sedimentacijska hitrost okoli 10 mm/h (normalna vrednost je odvisna od starosti in spola) pri določenih boleznih pa lahko doseže celo 100 mm/h in več.



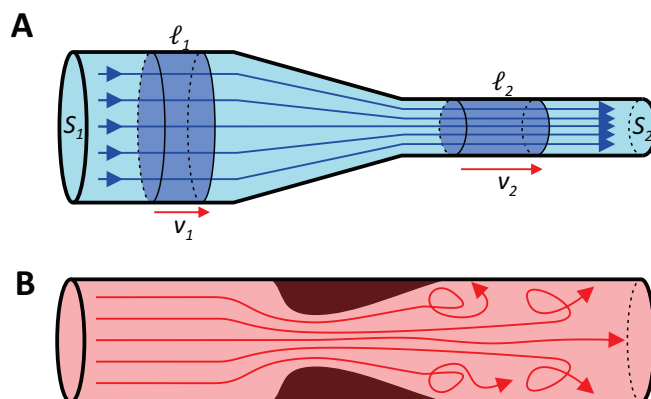
Sedimentacijske lastnosti so pomembne tudi pri ločevanju makromolekul v raztopinah, le da damo v tem primeru raztopino v ultracentrifugo ter tako težni pospešek g v zgornji enačbi nadomestimo z radialnim pospeškom $a_r = r\omega^2$, ki je lahko bistveno večji in je zaradi tega ločevanje hitrejše. Na konceptualno podobni osnovi delujejo tudi mnoge druge metode ločevanja makromolekul, saj je sila upora (in s tem hitrost potovanja) v vseh snoveh tako ali drugače odvisna lastnosti molekul. Tako deluje npr. elektroforeza v gelu, pri kateri makromolekul ne poganja sila teže ampak električna sila, ali pa različne vrste kromatografije.

9.3 Tok v ceveh in žilah

Pri toku tekočine v ceveh oz. žilah nas ponavadi najbolj zanima, koliko tekočine se pretoči v določenem času, t.j. *prostorninski tok*, ki je definiran kot:

$$\Phi_V = \frac{V}{t} . \quad (9.7)$$

Pri odraslem človeku srce npr. prečrpa približno pet litrov krvi na minuto in velja $\Phi_V = 5 \text{ l/min}$.



Slika 9.2: A) Prostorninski tok tekočine po cevi je sorazmeren hitrosti in preseku cevi. Pri nestisljivih tekočinah mora biti vzdolž cevi prostorninski tok povsod enak, zato se ob zožanju cevi hitrost tekočine poveča. Na sliki sta osenčeni enaki prostornini, ki se v istem času pretočita skozi širok in ozek del cevi, $V = S_1 \ell_1 = S_1 v_1 t = S_2 \ell_2 = S_2 v_2 t$. Na sliki vidimo, da je pri laminarnem toku hitrost sorazmerna gostoti tokovnic. B) Če se žila zoža zaradi stenoze, se tam poveča hitrost krvi, zaradi česar lahko nastanejo turbulence.

Intuitivno uganemo, da je prostorninski tok odvisen od hitrosti pretakanja tekočine. S pomočjo slike 9.2A lahko zvezo med njima tudi izračunamo: tekočina, ki ima hitrost v , se v času t premakne za razdaljo $\ell = vt$. Pri tem se pretoči prostornina $V = Svt$, kjer je S prečni presek cevi. V praksi hitrost tekočine ni nujno enaka po celotnem preseku, a zgornje zveze vseeno veljajo za povprečno hitrost $\bar{v}$. Če upoštevamo še enačbo 9.7, lahko torej zapišemo pomembno zvezo

$$\Phi_V = \bar{v}S \quad (9.8)$$

Iz zveze med pretokom in hitrostjo sledi pomemben zaključek: pri pretakanju nestisljivih tekočin, kot sta npr. voda ali kri, je pretok enak vzdolž

celotne dolžine cevi, ne glede na njeno obliko, saj mora vsa tekočina, ki v cev na enem koncu vstopa iz nje na drugem koncu tudi izstopiti (slika 9.2A). Zato lahko za tok nestisljivih tekočin zapišemo

$$\bar{v}_1 S_1 = \bar{v}_2 S_2 \quad (9.9)$$

in je torej hitrost tekočine tem večja, čim manjši je presek cevi. Če v žili nastane zožanje (stenoza) se bo tam hitrost povečala, kar lahko privede do nastanka turbulenc (slika 9.2B), saj sta podobno kot pri gibanju po tekočini tudi pri toku tekočin dva režima: pri majhnih Re je tok laminaren pri velikih pa je tok turbulenten.

V valjasti cevi je v laminarnem režimu razporeditev tokovnic osno-simetrična, kar omogoča natančen izračun pretoka (ki pa po težavnosti kljub vsemu presega naše znanje). Iz računa izhajata dva zanimiva rezultata. Prvi je, da je hitrost toka največja v sredini cevi, proti stenam cevi pa parabolično pada (slika 9.1). Kvalitativno je ta rezultat mogoče razumeti iz definicije za viskoznost: tekočina se ne more gibati bistveno hitreje, kot tekočina v njeni bližini, saj bi to povzročilo ogromno silo trenja. Stena cevi miruje, zato se mora tekočina tik ob steni gibati počasi. Bolj kot se od stene bližamo sredini cevi, hitreje se lahko tekočina giblje, najhitreje pa se seveda lahko giblje v sredini. Račun tudi pokaže, da v paraboličnem profilu toka velja, da je povprečna hitrost v cevi ravno polovica najvišje hitrosti:

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_{max} \quad (9.10)$$

Drugi pomembni rezultat za laminarni režim je, da tudi pri toku po cevi velja linearni zakon, ki pa v tem primeru povezuje prostorninski pretok in razliko tlakov, ki pretok poganja:

$$\Phi_V = \frac{\Delta p}{R_\eta}, \quad (9.11)$$

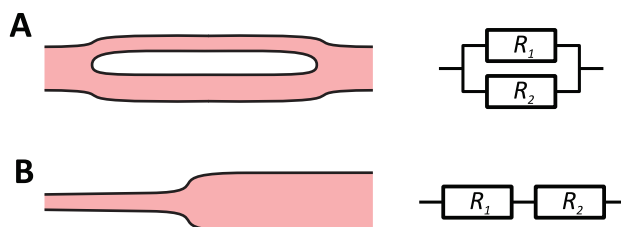
kjer konstanto R_η imenujemo *viskozni upor*. Zgornja enačba pove, da je tok sorazmeren razliki tlakov, pri dani tlačni razliki pa je tok tem manjši, čim večji je viskozni upor. Daljši račun, ki presega naše okvire, pokaže, da je za valjaste cevi vrednost viskoznega upora enaka

$$R_\eta = \frac{8\eta\ell}{\pi r^4}, \quad (9.12)$$

kjer je η viskoznost tekočine, ℓ je dolžina cevi, r pa njen radij. Izraz za viskozni upor je deloma pričakovan: v daljših ceveh in pri večji viskoznosti tekočine je več trenja, zato je tudi upor večji, v širših ceveh pa je upor manjši. Presenetljiva pa je zelo močna odvisnost upornosti od radija cevi, saj je upornost odvisna kar od četrte potence radija. Naše telo to močno odvisnost spretno uporablja pri uravnavanju krvnega pretoka z aktivno regulacijo polmera nekaterih žil, saj ima že majhna sprememba radija žile velik vpliv na pretok krvi. Zgornji enačbi skupaj imenujemo tudi *Hagen–Poiseuilleva* enačba.

Opozoriti je vredno, da Δp v enačbi 9.11 predstavlja razliko tlakov med začetkom in koncem cevi, o absolutni vrednosti tlaka pa Hagen–Poiseuilleva enačba ne govori. Iz nje vseeno vidimo, da od začetka do konca cevi tlak pada linearno (pri danem pretoku je padec tlaka sorazmeren dolžini vzdolž cevi). Čim večja je viskoznost in tem manjši je radij cevi, tem hitreje bo padal tlak vzdolž cevi.

Enačba 9.11 je analogna Ohmovem zakonu iz elektrike ($I = U/R$), saj v njej na enak način nastopajo tok, upor ter količina, ki tok poganja (pri elektriki je to napetost, pri tekočinah pa tlačna razlika). Analogijo lahko uporabimo za računanje upornosti zapletenih žilnih sistemov: skupni upor dveh zaporednih različno velikih žil je kar vsota uporov vsake od žil, skupni upor vzporednih žil pa izračunamo preko vsote obratnih vrednosti uporov (slika 9.3).



Slika 9.3: Viskozni upor sistema žil lahko izračunamo na enak način kot pri električnih uporih. A) Skupni viskozni upor dveh vzporednih žil izračunamo iz vsote obratnih vrednosti uporov posameznih žil $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$. B) Skupni viskozni zaporednih žil izračunamo kot vsoto vrednosti uporov posameznih žil $R = R_1 + R_2$.

Že v uvodu smo omenili, da laminarni režim velja le pri majhnih hitrostih toka, pri večjih hitrostih pa tok slej ko prej postane turbulenten. Tudi pri toku tekočin si lahko za oceno režima toka pomagamo z izračunom Reynoldsovega števila (enačba 9.4), pri čemer za r vstavimo prečno dimenzijo cevi. Pri Re manjšem od približno 2000 je tok v cevi laminaren, pri $Re > 2500$ pa tok postane turbulenten in linearni Hagen-Poiseuillov zakon ne velja več. Pri

zelo velikih Re tudi v ceveh velja kvadratni zakon upora, po katerem je tlačna razlika med začetkom in koncem cevi sorazmerna kvadratu pretoka. Ta zveza pa ni enostavna, saj je pretok odvisen tudi od hrapavosti sten in presega naše znanje fizike. Hitrostni profil v turbulentnem toku tudi ni več paraboličen, ampak je enak po vsem sredinskem delu žile (slika 9.1).

9.4 Idealne tekočine in Bernoullijeva enačba

Na koncu se za hip ustavimo pri znameniti Bernoullijevi enačbi, ki opisuje tok idealnih nestisljivih tekočin. V idealnih tekočinah ni trenja, zato za njih velja zakon o ohranitvi mehanske energije. Bernoullijeva enačba je ravno zakon o ohranitvi mehanske energije, zapisan za pretakanje tekočin.

Na sliki 9.2A smo videli, da se lahko tekočini med tokom v cevi spremeni hitrost in torej tudi kinetična energija. V splošnem bi bil lahko drugi konec cevi tudi na drugi višini, zaradi česar bi se tekočini spremenila tudi potencialna energija. Iz zakona o ohranitvi energije vemo, da je sprememba vsote obeh energij tekočine enaka delu, ki ga okolica opravi na tekočini. Izračunajmo to delo za primer, ko skozi cev steče prostornina označena na sliki. Če s p_1 označimo tlak na začetku cevi, je delo, ki na da začetku cevi opravimo pri potiskanju tekočine enako $A_1 = Fs = p_1 S_1 \ell_1 = p_1 V$, pri čemer smo upoštevali, da sila $F = pS$ in da je prostornina, ki se pri tem pretoči, ravno $V = S_1 \ell_1$. Na enak način izračunamo delo, ki ga opravi tekočina na koncu cevi, kjer potiska tekočino pred seboj, $A_2 = p_2 V$ (tu smo upoštevali, da je tekočina nestisljiva, zaradi česar sta prostornini na začetku in na koncu cevi enaki - kolikor tekočine na začetku priteče v cev, jo mora na koncu zapustiti). Zakon o ohranitvi energije se torej zapiše kot:

$$p_1 V - p_2 V = W_{p2} - W_{p1} + W_{k2} - W_{k1} \quad (9.13)$$

Ko upoštevamo, da je potencialna energija enaka $W_p = mgh = \rho V gh$, kinetična $W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho V v^2$, pokrajšamo prostornino, ki je prisotna v vseh členih, ter na nasprotni strani enačbe razporedimo člene z enakim indeksom, dobimo Bernoullijevo enačbo:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 + p_2 \quad (9.14)$$

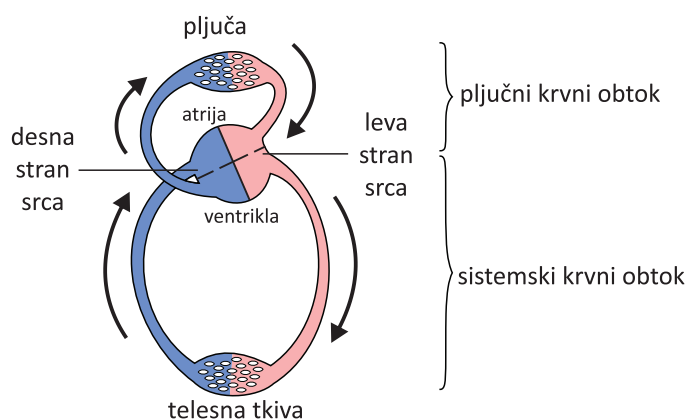
Vsoto na vsaki strani enačbe $(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p)$ si lahko predstavljamo kot gostoto energije tekočine. Ta se torej ne spreminja vzdolž celotnega toka idealne tekočine.

V realnih tekočinah je vedno prisotno nekaj trenja, zato Bernoullijeva enačba velja le približno oz. velja tem manj, čim večjo vlogo ima trenje. Kljub temu nam enačba v določenih situacijah obnašanje lahko razloži vsaj približno. Z Bernoullijevo enačbo lahko npr. ocenimo, kako je hitrost tekočine, ki izteka iz posode, odvisna od tlaka v posodi (zgornja vsota je enaka tako za tekočino v posodi kot tudi za tekočino v curku, ki izteka. V posodi je hitrost tekočine majhna, tlak pa za Δp večji kot izven posode. Ker je višina na obeh straneh luknje v posodi enaka, lahko hitrost iztekanja v_2 izračunamo iz $\Delta p = \frac{1}{2}\rho v_2^2$).

Pomembna posledica Bernoullijeve enačbe je tudi, da z zmanjšanjem hitrosti toka tlak v tekočini naraste. V arterijski anevrizmi (slika 8.1) je presek žile povečan, zato se hitrost krvi tam zmanjša, tlak krvi pa malo poveča. Napetost žilnih sten se zaradi tega pojava torej le še dodatno poveča.

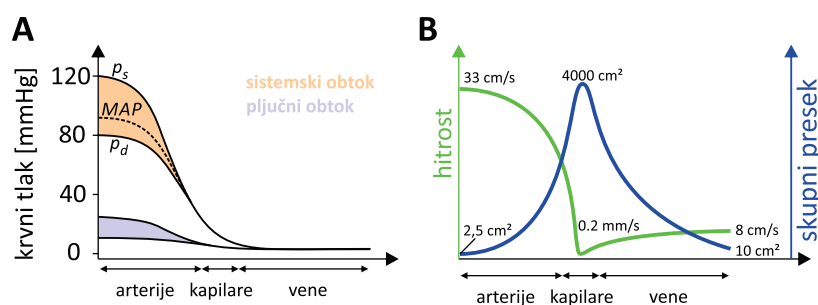
9.5 Krvni obtok

Za konec poglavja o tekočinah uporabimo pridobljeno znanje in si oglejmo nekaj značilnosti krvnega obtoka. Ob vsakem utripu srca levi ventrikel kri iztisne v aorto, ki se nadaljuje v arterijo, manjše arterije, kapilare v organih. Od tam nadaljuje pot v vene in nazaj v srce pride v desni atrij po veni cavi (slika 9.4). Ta del obtoka se imenuje sistemski obtok. Iz desnega atrija gre kri v desni ventrikel, od tam pa zaokroži po pljučnem obtoku skozi pljučne kapilare in se vrne nazaj v srce v levi atrij. Krvotok je zaokrožen, zato je prostorninski tok skozi pljučni obtok enak prostorninskemu toku v sistemskem obtoku.



Slika 9.4: Shematični prikaz krvnega obtoka.

Sistemiški obtok je daljši in večji, zato je tudi njegova upornost večja in mora levi ventrikel ustvarjati veliko večji tlak kot desni. Zaradi utripanja srca tlak v arteriji niha med sistoličnim (visokim) in diastoličnim (nizkim) tlakom, ki v arteriji sistemskega obtoka niha približno med 80 mmHg in 120 mmHg, v pljučni arteriji pa le med 8 mmHg in 25 mmHg. Tlak v arteriji je dalj časa blizu diastoličnemu kot sistoličnemu, zato tudi srednji arterijski tlak (angl. mean arterial pressure, MAP) ni na sredini med njima, temveč je bližje nižjemu (od njega je višji za približno eno tretjino razlike, $MAP \approx p_d + \frac{1}{3}(p_s - p_d) \approx 95$ mmHg). Območje tlakov v obeh obtokih je prikazano na sliki 9.5A.



Slika 9.5: A) Shematični prikaz padca tlaka v sistemskega in pljučnega obtoka. V sistemskega obtoku so označeni diastolični tlak (p_d), sistolični (p_s) in srednji arterijski tlak (MAP). Največji padec tlaka je v malih arterijah in kapilarah. B) Shematični prikaz povprečne hitrosti krvi in skupnega preseka žil v sistemskega obtoka (prirejeno po [8]).

V nasprotju s cevmi imajo žile svojo podajnost (enačba 7.4), zato se ob vsakem povišanju tlaka v arteriji poveča tudi njen premer. Nihanje tlaka v arterijah se zaradi podajnosti zadoži in ga v kapilarah in venah ni več (po drugi strani zaradi podajnosti arterij toka v njih ne moremo natančno opisati zgolj z Hagen–Poiseuillevo enačbo).

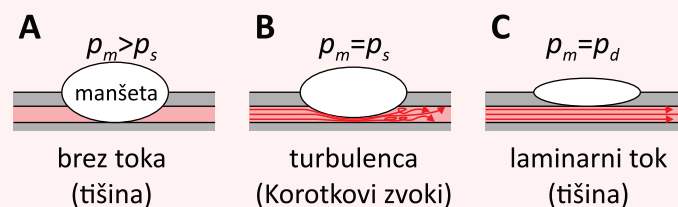
Ocenimo še hitrost krvi v aorti in veni cavi. Če predpostavimo, da je presek aorte približno $S_a = 2,5$ cm², vene cave pa $S_{vc} = 10$ cm² in vemo, da je pretok krvi približno $\Phi_V = 5$ l/min (v literaturi najdemo za te vrednosti različne podatke), lahko s pomočjo enačbe 9.8 izračunamo povprečni hitrosti: $v_a \approx 33$ cm/s in $v_{vc} \approx 8$ cm/s (slika 9.5). Po drugi strani je znan podatek, da je povprečna hitrost v kapilarah približno $v_k \approx 200$ μ m/s, iz česar dobimo oceno, da je celoten presek kapilar kar približno $S_k = 4000$ cm².

Ocenimo še, ali je tok v aorti laminaren ali turbulenten. Če v račun za Reynoldsovo število (enačba 9.4) vstavimo premer aorte (≈ 2 cm), gostoto krvi

($\approx 1060 \text{ kg/m}^3$), njeno viskoznost ($\approx 0,003 \text{ Pa s}$) ter njeno povprečno hitrost ($\approx 33 \text{ cm/s}$), dobimo vrednost $Re \approx 2300$. Pričakovati je torej, da je tok v aorti ravno na meji med laminarnim in turbulentnim - med sistolo je lahko laminaren, med diastolo pa se lahko tudi zavrtinči.

Primer 9.2: merjenje krvnega tlaka

V primeru 6.1 smo predstavili sfigmomanometer, sedaj pa si pogledjmo še, kako poteka meritev krvnega tlaka. Pri meritvi najprej povečamo tlak v manšeti nad sistolični tlak, tako da manšeta stisne žilo in prekine pretok po njej (slika A). Nato tlak v manšeti počasi spuščamo in s stetoskopom poslušamo zvoke iz žile. Ko tlak v manšeti postane enak sistoličnemu tlaku, se pretok skozi žilo začne odpirati in skozi stetoskop zaslišimo t.i. Korotkove zvoke, ki so posledica brizgov krvi skozi prehod (slika B). Ko tlak v manšeti postane manjši od diastoličnega tlaka, se žila povsem odpre, v njej se spet vzpostavi laminarni tok in Korotkovi zvoki prenehajo (slika C). Z merjenjem tlaka v manšeti in hkratnim poslušanjem zvokov lahko tako določimo oba krvna tlaka.



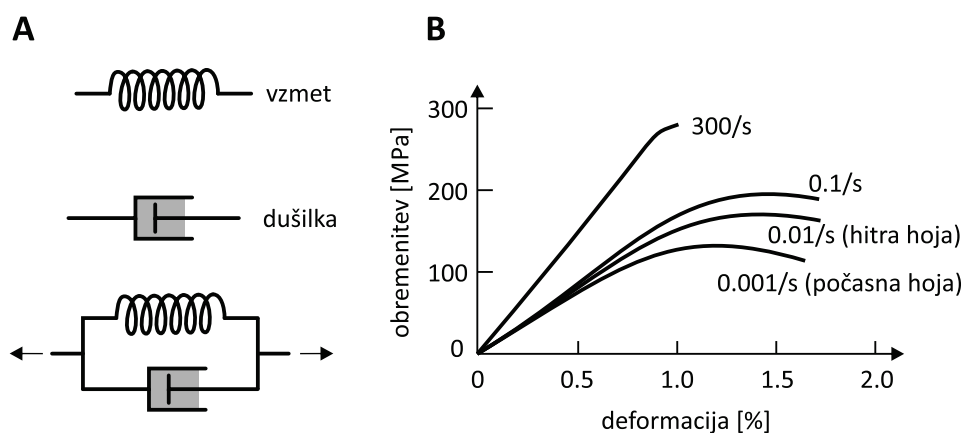
Na podoben način delujejo tudi avtomatski merilci tlaka, le da ne zaznavajo zvokov ampak nihanje tlaka v manšeti, ki je posledica brizgov krvi.

Poglavje 10

Viskoelastičnost

V tkivih je v tipično več kot kot 70 % vode (še celo v kosteh je vode približno 30 %), zato se nam hitro postavi vprašanje, ali so z mehanskega stališča naša tkiva tekočine ali trdne snovi? Odgovor se seveda glasi, da niso niti eno niti drugo, ampak imajo lastnosti obojega. Po eni strani se nam tkiva kažejo kot trdna snov in ne "tečejo", po drugi strani pa je odziv tkiv na zunanjo silo pogosto odvisen od tega, kako *hitra* je deformacija. Take snovi so *viskoelastične*. Obravnava takšnih snovi presega naše znanje, na kratko si bomo ogledali le, kako si lahko viskoelastičnost sploh predstavljamo.

Za elastične snovi velja Hookov zakon ($F = kx$, kjer je x velikost deformacije) in za viskozne linearni zakon upora ($F = \beta v$, kjer je v hitrost deformacije). Viskoelastične snovi si lahko predstavljamo kot kombinacijo elastičnega člena (vzmeti) in viskoznega člena (dušilke). Slika 10.1 prikazuje enega od najenostavnejših modelov viskoelastične snovi. Viskozni člen ima lastnost, da se počasnim deformacijam sploh ne upira, z večanjem hitrosti deformacije pa postaja vedno "trši". Viskoelastične snovi imajo tako pri hitrih deformacijah večji Youngov modul kot pri počasnih. Take so npr. tudi kosti (slika 10.1B).



Slika 10.1: A) Viskoelastične snovi si lahko predstavljamo, kot da so sestavljene iz elastičnega člena (vzmeti) in viskoznega člena (dušilke). Les, mnoge polimere, pa tudi kosti si lahko v prvem približku predstavljamo kot vzporedno vezani vzmet in dušilko (t.i. Kelvin-Voigtov model). Pri počasnih deformacijah dušilka nima vloge, saj je sila upora pri majhnih hitrostih zanemarljiva, zato ima pri počasnih deformacijah snov lastnost vzmeti. Pri hitrih deformacijah se zaradi dušilke snov zunanji sili dodatno upira in navidez postaja trša. B) Zveza med obremenitvijo in deformacijo za kortikalno kost. Pri hitri hoji je deformacija hitrejša, zato je pri njej kost "trša" kot pri počasni hoji [8].

Del III

Termodinamika

Poglavje 11

Uvod v termodinamiko

V vseh biokemijskih in fizioloških procesih sodeluje ogromno število različnih atomov in molekul. Vsak protein je sestavljen iz več tisoč atomov, v vsaki celici pa je lahko več 100 milijonov proteinov in še vsaj tisočkrat več molekul vode (primer 11.1). Pri razumevanju obnašanja takih sistemov si ne moremo prav dosti pomagati z Newtonovimi zakoni, ki smo jih srečali pri mehaniki, saj je delcev v sistemu preprosto preveč, da bi lahko sledili gibanju vsakega delca in njegovim interakcijam s sosedi. Na srečo pa tudi v takih sistemih veljajo zakonitosti, ki sicer ne opisujejo obnašanja vsakega delca posebej, a dobro opisujejo obnašanje sistema kot celote. Veja znanosti, ki raziskuje obnašanje sistemov z veliko delci se imenuje *termodinamika*, sisteme z veliko delci pa imenujemo *termodinamski sistemi*.

Za opisovanje *stanja* termodinamskega sistema ne moremo uporabljati *mikroskopske* slike (kje je neka molekula ob nekem času in kakšna sila nanjo deluje), temveč uporabimo *makroskopske* količine, kot so gostota, masa, koncentracija, prostornina, tlak ipd. Poleg tega bomo morali za opisovanje termodinamskih sistemov vpeljati tudi nove pojme kot so temperatura, entalpija, entropija in toplota. Po slednji je termodinamika tudi dobila svoje ime.

Podobno kot pri mehaniki bo tudi pri termodinamiki ključen pojem *ravnovesje sistema*, se pravi stanje, v katerem se od okolice izoliran sistem s časom ne spreminja. Pozoren bralec se bo takoj vprašal, kako nam lahko razumevanje ravnovesja sploh pomaga pri opisovanju živih bitji, saj je ravnovesno stanje ravno nasprotno od življenja. Odgovor je preprost: čeprav se živi sistemi zares neprestano spreminjajo, se spontano spreminjajo ravno v smeri proti svojemu ravnovesju. Če poznamo ravnovesno stanje sistema, lahko torej ugotovimo, v katero smer se bodo sistemi spreminjali. Poleg tega so lahko tudi v živih bitjih nekateri sistemi, ki so vsaj za kratek čas približno v ravnovesju.

V nadaljevanju bomo vpeljali ključne pojme termodinamike ter spoznali znamenita zakona termodinamike, ki spadata med najbolj temeljne zakone narave. Prvi govori o ohranitvi energije, drugi pa o entropiji in z njo povezanih spontanah spremembah sistema. Na koncu bomo vse naštetu uporabili pri razlagi nekaterih pomembnih fizioloških in biokemijskih procesov.

Primer 11.1: koliko molekul vode je v tipični celici?

Množino snovi lahko opišemo na tri načine: z maso, s številom delcev v snovi ali pa, ker je število delcev ponavadi ogromno, tudi z enoto *mol*, pri čemer je v enem molu Avogadrovo število delcev, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$. Masa je s številom molov povezana preko molske mase M , ki pove kolikšna je masa enega mola izbrane snovi.

Primer: molska masa vode je približno $M = 18 \text{ g/mol}$, kar pomeni, da 1 mol vode ustreza 18 g oz. 18 ml vode. Plini so precej redkejši od kondenzirane snovi in en mol plina pri standardnih pogojih^a zasede prostornino malo več kot 22 l.

Koliko je torej molekul vode v eni celici? Premer tipične človeške celice je reda velikosti $10 \mu\text{m}$, prostornina pa torej približno $1000 \mu\text{m}^3$. V celici približno 70% vode. Število molov vode v celici je torej

$$n = \frac{m}{M} = \frac{0,7V\rho}{M} = 0,7 \cdot 1000 \cdot 10^{-18} \text{ m}^3 \cdot \frac{1000 \text{ kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{mol}}{0,018 \text{ kg}} = 3,9 \cdot 10^{-11} \text{ mol} .$$

Število molekul dobimo tako, da število molov pomnožimo z Avogadrovim številom:

$$N = nN_A = 3,9 \cdot 10^{-11} \text{ mol} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 2,3 \cdot 10^{13} .$$

V tipični celici je torej zares zelo veliko molekul (23 tisoč milijard molekul vode). Tudi če bi bila koncentracija neke snovi v celici le 1 nM (nano-molarna), bi bilo v celici približno 1000 molekul te snovi.

^aZa standardne pogoje obstajajo različni standardi. Pogosto se uporablja IUPAC standard, po katerem standardni pogoji ustrezajo temperaturi 0°C , tlaku 10^5 Pa in koncentraciji raztopine 1M. Obstajajo tudi standardi, ki uporabljajo temperaturo 20°C ali pa tlak 1 atm = 101325 Pa.

Poglavje 12

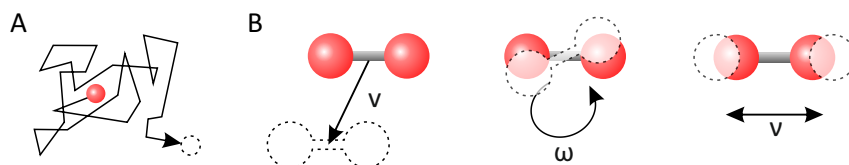
Termično gibanje in temperatura

Molekule so veliko premajhne, da bi jih lahko neposredno opazovali, kljub temu pa lahko na osnovi opazovanja različnih pojavov sklepamo, da se molekule v snovi neprestano gibljejo. Gibanje molekul vode lahko npr. posredno zaznamo preko neurejenega spontanega gibanja mikroskopskih delcev (koloidov) v mirujoči raztopini (slika 12.1A). Tako gibanje je v 19. stoletju prvi opisal botanik Robert Brown, ki je opazoval spontano naključno gibanje delcev cvetnega prahu v vodi, Albert Einstein pa je kasneje pokazal, da je to gibanje posledica naključnega gibanja molekul vode, ki se v delec zaletavajo in ga porivajo sem ter tja (Einsteinova analiza je bila eden prvih trdnih dokazov za atomistično strukturo sveta, o kateri se je ugibalo že od časov starih Grkov).

Naključnemu gibanju molekul v snovi pravimo tudi *termično gibanje*. Izkaže se namreč, da je to gibanje tesno povezano s temperaturo snovi: višja kot je temperatura, večje je termično gibanje. Molekule tako neprestano nihajo okoli svojih ravnovesnih leg, v plinih in tekočinah pa se tudi premikajo in vrtijo. (slika 12.1B). V tem poglavju bomo najprej opisali, kako je s termičnim gibanjem povezana znamenita plinska enačba, nato pa si bomo natančneje ogledali še difuzijo v raztopinah. Poglavje bomo zaključili z razmislekom o različnih tehnikah merjenja temperature.

12.1 Termično gibanje v plinih in plinska enačba

Povezava med termičnim gibanjem in temperaturo je še posebej očitna pri idealnih plinih, pri katerih se molekule svobodno gibljejo in s trki ustvarjajo



Slika 12.1: **A)** Shematični prikaz termičnega gibanja delca v vodi, do katerega pride zaradi naključnega zaletavanja z molekulami vode. Gibanje je naključno in se delec "v povprečju" nikamor ne premakne, hkrati pa s časom vseeno prepotuje vedno večji prostor okoli izhodišča. Tako naključno gibanje imenujemo tudi Brownovo gibanje. **B)** Shematični prikaz treh vrst termičnega gibanja molekul. Molekula se lahko giblje na vse njej dostopne načine: lahko se npr. premika, vrti ali niha s svojo lastno frekvenco. V trdni snovi molekule le termično nihajo, saj se premikati ali vrteti ne morejo.

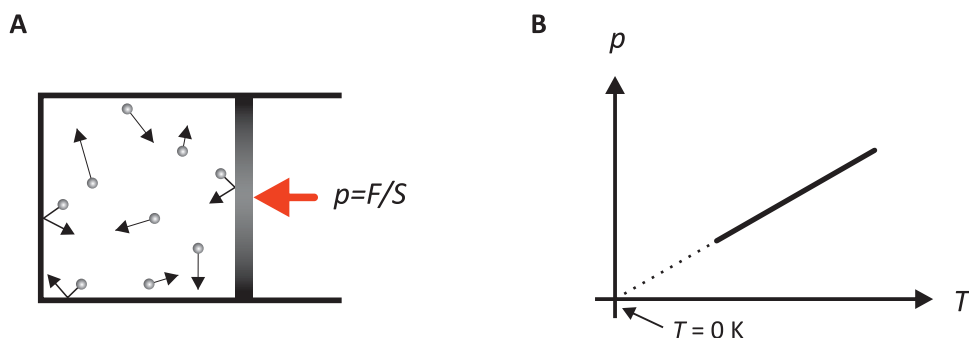
tlak na stene prostora (slika 12.2A). Tlak plina je sorazmeren njegovi temperaturi (večje kot je termično gibanje molekul plina, močnejši so trki na stene) in pa njegovi gostoti (več kot je molekul v prostoru, več je trkov na stene prostora). Natančnejši razmislek in eksperimenti so pokazali, da lahko te intuitivne ugotovitve zapišemo v znamenito plinsko enačbo:

$$pV = nRT, \quad (12.1)$$

kjer je p tlak plina, V njegova prostornina, n število molov plina, T temperatura plina, R pa je splošna plinska konstanta, katere vrednost je $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (pozor: plinska konstanta je včasih podana na kilo-mol snovi in se zapiše kot $R = 8300 \text{ J} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

Temperaturo moramo v plinsko enačbo vstavljati v enoti *kelvin*, pri čemer je hkrati s plinsko enačbo definirano tudi izhodišče *Kelvinove* oz. *absolutne* temperaturne lestvice. Temperatura 0 K je namreč tista temperatura, pri kateri bi termično gibanje povsem zamrlo in bi tlak plina padel na 0 (slika 12.2B). V praksi temperature 0 K sicer ne moremo doseči, v laboratoriju pa so se ji približali že na manj kot milijoninko kelvina. V vsakdanjem življenju namesto Kelvinove uporabljamo Celzijevo temperaturno lestvico, po kateri je pri standardnem tlaku ledišče vode pri 0 °C (oz. približno 273 K), vrelišče pa pri 100 °C (oz. približno 373 K). Obe temperaturni lestvici se razlikujeta le v izhodišču¹, ne pa tudi v enoti, zato lahko razlike temperatur enakovredno izražamo v kel-

¹Po natančni definiciji Celzijeve temperaturne lestvice je 0 °C enako 273,15 K, vendar lahko pri opisovanju fizioloških procesov decimalke pogosto brez škode zaokrožimo.



Slika 12.2: **A)** Zaradi termičnega gibanja se molekule plina zaletavajo v stene posode, kar občutimo kot tlak plina. Sila plina na steno posode je $F = pS$, kjer je S površina stene, p pa tlak plina. Višja, kot je temperatura, večje je termično gibanje in večji bo tlak plina. **B)** Že v 18. stol. so odkrili, da je tlak plina dobro merilo za njegovo temperaturo. Temperatura in tlak idealnega plina sta sorazmerna, temperaturi, pri kateri bi tlak padel na 0 Pa, pa pravimo *absolutna ničla* in z njo definiramo izhodišče Kelvinove temperaturne lestvice.

vinih ali stopinjah celzija: $\Delta T[^\circ\text{C}] = \Delta T[\text{K}]$. V ZDA za merjenje temperature uporabljajo Fahrenheitovo lestvico, pri kateri pa je enota drugačna kot pri Kelvinovi lestvici, zato preračunavanje iz ene v drugo ni tako enostavno (primer pretvarjanja stopinj Fahrenheita smo prikazali v uvodnem poglavju, primer 1.5).

Omenimo naj tudi, da je plinska konstanta ekvivalentna *Boltzmannova konstanta*, $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$. Razlika med obema konstantama je le v tem, da plinsko konstanto uporabljamo, če množino snovi merimo v molih, Boltzmannovo pa, če množino snovi merimo v številu delcev. Z Boltzmannovo konstanto se plinska enačba zapiše $pV = Nk_BT$, kjer je N število molekul plina. Povezava med obema konstantama je Avogadrovo število, $R = N_A k_B$. Spomnimo se tudi, da si v praksi lahko vrednost plinske konstante zapomnimo še drugače: pri sobni temperaturi ($T = 20^\circ\text{C}$) in normalnem tlaku ($p = 10^5 \text{ Pa}$), je prostornina enega mola idealnega plina približno 24 litrov.

Plinska enačba natančno velja le za *idealne pline*, t.j. za pline iz neskončno majhnih molekul, med katerimi ni interakcij. Za realne pline tega ne moremo trditi, a lahko kljub temu plinsko enačbo uporabimo tudi pri njih, če je le njihova gostota dovolj majhna. Plinska enačba velja tudi za mešanice idealnih plinov, saj se molekule v njih med seboj po definiciji ne čutijo in ena za drugo ne morejo vedeti, kakšne vrste so. V skladu s plinsko enačbo vsaka vrsta plina neodvisno od ostalih ustvarja svoj *delni (parcialni) tlak* (za i -to vrsto plina

v mešanici velja $p_i V = n_i RT$), celotni tlak mešanice pa je kar vsota delnih tlakov vsake od sestavin (primer 12.1).

Primer 12.1: delni tlaki plinov v zraku

V navadnem suhem zraku je približno 78% molskega deleža dušika, 21% kisika in 1% drugih plinov, v normalno vlažnem zraku pa je zraven še približno 0,5 % vodne pare. Iz plinske enačbe razberemo, da so delni parni tlaki plinov kar sorazmerni njihovim molskim deležem. Če je zračni tlak 10^5 Pa, je torej delni tlak dušika v suhem zraku 78 kPa, delni tlak kisika 21 kPa, skupni tlak ostalih plinov pa približno 1 kPa.

Če ima pacient pomanjkanje kisika, mu lahko dovajamo tudi zrak z večjim deležem kisika, v skrajnih primerih tudi 100% kisik. V še bolj kritičnih primerih (npr. pri zastrupitvi z ogljikovim monoksidom) lahko uporabimo tudi hiperbarično terapijo, pri kateri pacient v hiperbarični komori vdihava zrak pod višjim tlakom od normalnega. Pri tem pa moramo biti pazljivi, saj postane kisik pri visokih delnih tlakih zelo toksičen. Dihanje kisika z delnim tlakom 4 bare lahko že v pol ure povzroči hude okvare možganov in komo. Na učinke visokega tlaka vdihanega zraka morajo biti pozorni tudi potapljači, ki zrak pod visokim tlakom vdihavajo iz jeklenk. Pri tem ni težava le previsok delni tlak kisika ampak tudi dušika, ki pri visokih delnih tlakih deluje narkotično in potapljaču povzroči t.i. globinsko pijanost.

Za vajo s pomočjo plinske enačbe ocenimo, koliko molov dušika in kisika vdihnemo v normalnih pogojih z globokim vdihom, ko vdihnemo približno 3 l zraka. Po plinski enačbi je število molov plina v danem volumnu sorazmerno delnemu tlaku tega plina:

$$n_i = \frac{p_i V}{RT} \quad (12.2)$$

Za kisik tako dobimo

$$n_{O_2} = \frac{21 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol} \cdot \text{K}}{8,3 \text{ J} \cdot 293 \text{ K}} = 0,026 \text{ mol} ,$$

pri čemer smo upoštevali sobno temperaturo $20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$. Ustrezna vrednost za dušik je skoraj štirikrat večja, $n_{N_2} = 0,096 \text{ mol}$.

12.2 Difuzija

Termično gibanje molekul posredno zaznamo tudi pri difuziji v raztopini. Če npr. v vodo kapnemo kapljico črnila, bodo molekule črnila brownovsko tavale naokrog in se s časoma razširile po vsej dostopni prostornini. Potovanje posamezne molekule je povsem naključno in ni usmerjeno v nobeno določeno smer, vseeno pa s časom molekula prepotuje vedno večji prostor okoli izhodišča (slika 12.1A). V povprečju se molekula torej vedno giblje okoli izhodišča, zahtevnejši račun pa pokaže, da njena povprečna oddaljenost od izhodišča

narašča s kvadratnim korenem časa:

$$d = \sqrt{6Dt}, \quad (12.3)$$

kjer je d oddaljenost molekule od izhodišča². Konstanto D imenujemo *difuzijska konstanta* in opisuje hitrost difuzije – večja kot je difuzijska konstanta, hitreje tavajo molekule naokoli. Izkaže se (to je prvi pokazal Einstein), da je difuzijska konstanta v prvem približku odvisna od temperature in pa od velikosti viskoznih sil, ki ovirajo molekulo pri gibanju. Če za slednje uporabimo Stokesovo formulo za viskozni upor, dobimo za velikost difuzijske konstante zelo uporabno zvezo:

$$D \approx \frac{k_B T}{6\pi r \eta}, \quad (12.4)$$

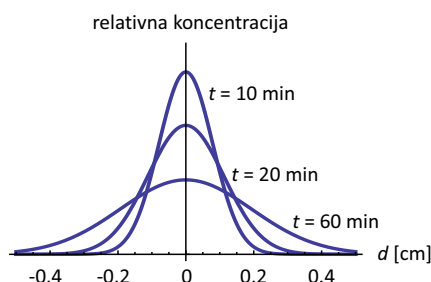
kjer je k_B Boltzmannova konstanta, T temperatura, r polmer molekule oz. delca, ki difundira, η pa viskoznost raztopine. Zgornja enačba velja za idealni primer s povsem okroglimi molekulami, v splošnem pa je lahko izraz v imenovalcu tudi drugačen. V vsakem primeru pa bo veljalo, da je difuzija večja pri višji temperaturi in da manjši delci difundirajo hitreje kot veliki.

Meritve pokažejo, da je pri 37 °C difuzijska konstanta v vodi za ione in druge majhne molekule (npr. za H_2O , O_2 ali $NaCl$) reda velikosti $2 \cdot 10^{-9} m^2/s = 2 \mu m^2/ms$, za večje organske molekule (npr. za glukozo) nekajkrat manjša, za velike globularne proteine kot je hemoglobin pa reda velikosti $0,1 \mu m^2/ms$. Z uporabo enačbe 12.3 ugotovimo, da male molekule tipično celično razdaljo $10 \mu m$ z difuzijo prepotujejo v nekaj 10 ms, veliki proteini pa za to razdaljo potrebujejo kar približno 1 s.

Naključno gibanje molekul ima za posledico, da snov v raztopini od izhodišča enakomerno difundira na vse strani. V primeru, ko v raztopino kapnemo kapljico topljenca, odvisnost koncentracije topljenca v prostoru opiše kar Gaussova krivulja, katere širina je enaka ravno $\sqrt{2Dt}$ (slika 12.3).

Potovanje molekul z difuzijo torej poteka bistveno drugače, kot potovanje pri enostavnem premem gibanju. Pri slednjem oddaljenost od izhodišča narašča premo sorazmerno času, pri difuziji pa povprečna oddaljenost od izhodišča narašča sorazmerno kvadratnemu korenu časa. Za difundiranje preko enkrat večje razdalje tako molekule potrebujejo kar štirikrat več časa. V celi-
cah in tkivih je difuzija sicer zelo pomemben način transporta snovi in celične

²Strogo vzeto je d koren povprečne oddaljenosti od izhodišča. Za take količine se v angleški literaturi uporablja izraz RMS (root mean square). Zgornja enačba je zapisana za difuzijo v 3D prostoru. Če gre za 2D difuzijo po membrani, je v enačbi številka 4 namesto 6.

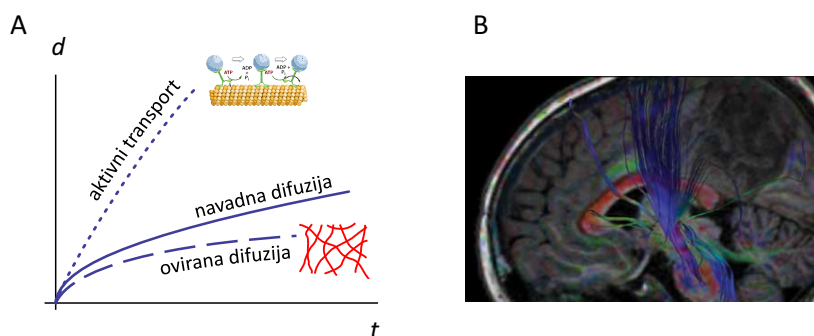


Slika 12.3: Ko v raztopino kapnemo topljenec, se zaradi difuzije njegova koncentracija širi v obliki Gaussove krivulje. Površina pod krivuljo je vseskozi enaka in je sorazmerna celotni količini topljenca, širina krivulje (pri statistiki to širino imenujemo standardni odklon) pa je enaka $\sqrt{2Dt}$, kjer je D difuzijski koeficient. Prikazan je primer za difuzijo glukoze v vodi. Kot vidimo, je lahko difuzija precej počasna, zato v večjih sistemih večino transporta snovi poteka s konvekcijo (v telesu npr. s krvnim obtokom), celice pa so za usmerjen transport na večje razdalje razvile različne oblike aktivnega transporta.

signalizacije, a za transport na velike razdalje ni učinkovita (sploh npr. v aksonih nevronov, ki so lahko dolgi tudi do 1 m in več). Celice zato uporabljajo tudi različne oblike aktivnega transporta, npr. transport s pomočjo molekularnih motorjev kinezinov, ki svoj tovor usmerjeno prenašajo vzdolž mikrotubulov in dosežejo hitrost tudi do nekaj $\mu\text{m/s}$. Po drugi strani lahko difuzija v celicah poteka tudi precej počasneje, kot napoveduje enačba 12.3, saj jo ovirajo različne strukture v celicah, npr. citoskelet (slika 12.4C). V tkivih difuzijski koeficient zato tudi ni nujno enak v vse smeri - v možganih npr. voda hitreje difundira vzdolž živčnih vlaken kot pravokotno na njih. To izrablja sodobna tehnika slikanja z magnetno resonanco, s katero lahko na osnovi meritev difuzije vode v možganih določimo usmerjenost živčnih vlaken (slika 12.4B). Za difuzijo snovi preko membran veljajo še dodatne zakonitosti, ki jih bomo spoznali kasneje v posebnem poglavju.

12.3 Merjenje temperature

Temperatura je eden ključnih parametrov v vseh termodinamskih sistemih (tudi za človeško telo), zato ni presenetljivo, da so od nje odvisne mnoge lastnosti snovi. Že pri idealnem plinu smo videli, da je pri danem tlaku od temperature odvisna njegova prostornina oz. gostota. Podobno velja praktično



Slika 12.4: Difuzija v telesu. **A)** Časovna odvisnost oddaljenosti molekule od izhodišča za različne vrste transporta po celici (v splošnem lahko to odvisnost zapišemo kot $d \propto t^\alpha$). Za navadno difuzijo velja, da oddaljenost molekule od izhodišča narašča sorazmerno s kvadratnim korenom časa (v tem primeru velja $\alpha = 1/2$, enačba 12.3). V celicah difuzija pogosto poteka še počasneje od navadne difuzije, saj jo ovirajo različne celične strukture, npr. citoskelet ($\alpha < 1/2$). Zaradi tega v celicah obstaja tudi aktivni transport (npr. z molekularnimi motorji kinezini, ki se premikajo po mikrotubulih), s katerim je mogoče snov transportirati hitreje in bolj usmerjeno kot z navadno difuzijo ($\alpha > 1/2$). **B)** Primer slike možganov, posnete s tehniko difuzijska tenzorska magnetna resonanca. To je posebna tehnika slikanja z magnetno resonanco, pri kateri lahko izmerimo difuzijski koeficient vode v različnih smereh. Ker voda lažje difundira vzdolž živčnih vlaken kot pravokotno na njih, lahko s to tehniko znamo usmerjenost živčnih vlaken v možganih.

za vse snovi, pri čemer je relativna sprememba prostornine snovi pogosto kar sorazmerna spremembi temperature:

$$\frac{\Delta V}{V} = \beta \Delta T \quad (12.5)$$

Povsem v skladu z intuicijo je sprememba prostornine sistema odvisna od njegove začetne prostornine V — večjim sistemom se prostornina spremeni za več kot manjšim. Z drugimi besedami, relativno povečanje prostornine $\Delta V/V$ je vedno enako ne glede na začetno prostornino. Koeficient β imenujemo *temperaturni koeficient prostorninskega raztezka* in je odvisen od vrste snovi, lahko pa tudi od temperature (tabela 12.1).

Pri večini snovi je koeficient prostorninskega raztezka pozitiven, se pravi, da se snovi ob višanju temperature prostornina povečuje, saj se gradniki snovi ob povečanem termičnem gibanju malo razmaknejo. Ni pa vedno tako, npr.

snov	amalgam	zobni enamel	titan	jeklo
β [$10^{-6}/\text{K}$]	2,2	1,0	0,77	13
snov	voda (20 °C)	voda (0 °C)	etanol	živo srebro
β [$10^{-6}/\text{K}$]	210	−50	1100	180

Tabela 12.1: Temperaturni koeficienti prostorninskega raztezka nekaterih snovi pri 20 °C. Številke povejo, za koliko milijonink se poveča prostornina snovi, če se ji temperatura spremeni za eno stopinjo (dentalni podatki so povzeti po [11]).

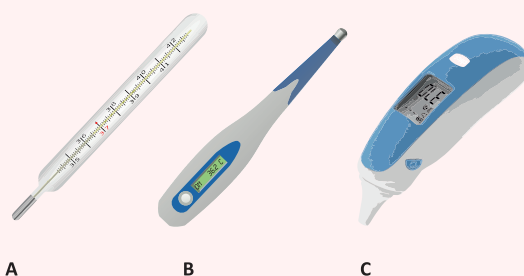
pri vodi je v temperaturnem območju od 0 °C do 4 °C koeficient prostorninskega raztezka negativen, saj se ji v tem območju z večanjem termičnega gibanja prostornina manjša. Koeficient prostorninskega raztezka je negativen tudi pri mnogih polimerih, npr. pri gumi. S temperaturnimi raztezki imajo sicer največ opraviti gradbinci, a moramo biti nanje pozorni tudi v medicini: bilo bi npr. zelo nerodno, če bi nam zaradi neusklajenih koeficientov temperaturnega raztezka zoba in zobne plombe ob lizanju sladoleda slednje izpadale iz ust.

Preko termičnega gibanja so od temperature odvisne tudi mnoge druge lastnosti snovi. Tako sta od temperature odvisni npr. površinska napetost in viskoznost, ki smo ju srečali pri mehaniki, pa tudi mnoge električne lastnosti snovi. Nekatero od teh temperaturnih odvisnosti s pridom izkoriščamo za merjenje temperature. Obstaja veliko različnih vrst termometrov, od katerih ima vsaka svoje prednosti in slabosti (primer 12.2). Če bi npr. radi izmerili temperaturo majhnemu vzorcu ali pa bi radi sledili hitrim spremembam, si s klasičnim alkoholnim termometrom ne moremo kaj dosti pomagati in je bolje, da vzamemo kak termometer, ki ima majhno toplotno kapaciteto in se spremembam temperature hitro prilagaja. V medicini tudi ni vseeno, na katerem delu telesa temperaturo izmerimo, saj je npr. v ušesu malo drugačna povprečna temperatura kot pod pazduho.

Primer 12.2: o različnih vrstah termometrov

Različne vrste termometrov za merjenje temperature izrabljajo temperaturno odvisnost različnih lastnosti snovi. Klasični termometri delujejo na principu temperaturnega raztezanja alkohola ali živega srebra (slika A). Uporabo slednjih opuščamo zara-

di strupenosti živega srebra. Za merjenje telesne temperature se v zadnjem času vse bolj uveljavljajo t.i. digitalni termometri (slika B), ki za merjenje temperature izrabljajo odvisnost električnih lastnosti kovin od temperature. Pogosti so npr. termometri na *termočlen* in pa termometri s *termistorjem*. V primerjavi s klasičnimi termometri lahko digitalni termometri temperaturo izmerijo hitreje, saj se mora pri njih na merjeno temperaturo ogreti le majhna kovinska kapica na vrhu termometra. Pri klasičnih termometrih se mora na merjeno temperaturo ogreti celotna bučka s tekočino, kar ponavadi traja vsaj nekaj minut (kasneje bomo videli, da je razlog za to manjša toplotna kapaciteta digitalnih termometrov.)



Še hitrejši od digitalnih so brezkontaktni termometri za merjenje temperature v ušesu (slika C). Ti ponavadi delujejo na principu merjenja infrardečega sevanja, ki ga zaradi svoje temperature oddaja notranjost ušesa (več o sevanju toplih teles se bomo naučiti v poglavju Valovanje).

Poudarimo naj, da je nemogoče reči, katera vrsta termometrov je "najboljša," saj ima vsaka vrsta svoje dobre in slabe lastnosti. V določenih situacijah uporabljamo ene, v drugih pa druge. Za kalibriranje termometrov so včasih npr. uporabljali plinske termometre, ki za merjenje temperature izkoriščajo kar temperaturno raztezanje plina po plinski enačbi, vendar pa so za vsakdanjo uporabo preokorni. Kot zanimivost povejmo še, da je enega prvih plinskih termometrov (oz. sploh enega prvih termometrov za merjenje telesne temperature) v začetku 17. stoletja izdelal v Kopru rojeni Santorio Santorio, ki je bil kasneje kot profesor v Padovi kolega znamenitega Galileja Galilei.

Poglavje 13

Notranja energija in prvi zakon termodinamike

V poglavju o mehaniki smo spoznali, da je energija pomemben pojem, ki nam pomaga pri razumevanju marsikaterega naravnega pojava. Vendar se nam je pri mehaniki energija zaradi trenja včasih "izgubljala" v toploto, zaradi česar je imel zakon o ohranitvi energije pri mehaniki le omejeno veljavo. V tem poglavju bomo izgubljeno energijo poiskali na mikroskopskem nivoju in tako lahko dokončno zapisali zakon o ohranitvi energije. Ob tem bomo tudi spoznali, da si lahko sistemi energijo izmenjujejo v obliki dela in toplote ter da je mogoče slednjo enostavno izmeriti s pomočjo kalorimetra. Na koncu poglavja bomo spoznali še entalpijo, ki bo za nas sicer nov in malce abstrakten pojem, a tudi zelo uporaben za opisovanje biokemijskih procesov.

13.1 Notranja energija

Zaradi termičnega gibanja ima vsaka molekula svojo kinetično energijo. Poleg tega imajo lahko molekule tudi druge vrste energij: energijo, ki je spravljena v medmolekulskih interakcijah, energijo interakcij med elektroni in jedrom, jedrsko energijo v jedrih atomov, lahko pa tudi različne potencialne energije, ki jih imajo v zunanjih poljih, npr. gravitacijskem ali električnem. Celotno energijo sistema, t.j. seštevek vseh energij delcev v sistemu, imenujemo *notranja energija* sistema, W_n . Na srečo ni vedno potrebno upoštevati vseh vrst energije, temveč le tiste, ki se v dani situaciji spreminjajo. Pri opisovanju kemijskih reakcij tako npr. ni potrebno upoštevati jedrskih energij, saj te pri kemijskih reakcijah ostajajo nespremenjene.

Molekule v termodinamskih sistemih neprestano trkajo in interagirajo s sosedami in si pri tem izmenjujejo energijo. Zaradi tega se energija posameznim molekulam neprestano spreminja, pa tudi vse molekule nimajo v nobenem trenutku enake energije. Vseeno velja, da imajo v ravnovesnem stanju sistema vse molekule enako energijo v *povprečju*. Pri tem se energija ne pre-razporeja le med vsemi delci v sistemu ampak tudi med različnimi vrstami energije, ki so za dani delec dostopne. Izkaže se, da za preproste sisteme velja t.i. *ekviparticijski izrek*, ki pravi, da ima v povprečju vsak delec v vsakem možnem gibanju opravljeno natanko $\frac{1}{2}k_B T$ energije. Termična energija enega delca je torej reda velikosti $k_B T$.

Primer 13.1: termična energija molekul pri normalnih pogojih

Zaradi termičnega gibanja se atomi in molekule v snovi neprestano zaletavajo drug v drugega in si tako izmenjujejo energijo. V ravnovesju ima zaradi tega vsak delec v povprečju enako kinetično energijo. To energijo imenujemo tudi *termična energija* in je reda velikosti $k_B T$. Pri sobni temperaturi je termična energija ene molekule reda velikosti

$$k_B T = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \cdot 293 \text{ K} \approx 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}.$$

Termična energija enega delca je seveda zelo majhna, a ne pozabimo, da je molekul v tipičnem sistemu zelo veliko.

Pri biokemijskih procesih se energije ponavadi podaja na mol snovi. Če je termična energija na molekulo enaka približno $k_B T$, bo termična energija na mol enaka RT oz.

$$RT = 8,3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 293 \text{ K} \approx 2,5 \text{ kJ/mol}.$$

To številko si je vredno zapomniti, saj nam bo pomagala pri ocenjevanju velikosti energij v biokemijskih procesih. Stabilnost kemijskih vezi lahko npr. ocenimo s primerjavo disociacijske energije s termično: pri močnih vezeh je disociacijska energija mnogo večja od termične energije, pri šibkih vezeh pa je le malo večja, zato jih je lažje pretrgati. Če bi bila disociacijska energija manjša od termične, o trajni vezi sploh ne bi mogli govoriti, saj bi bilo za pretrganje vezi dovolj že termično gibanje.

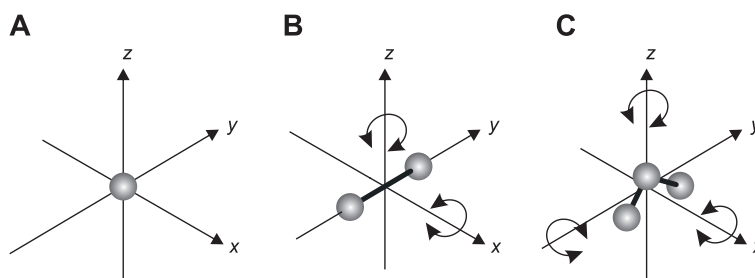
Notranja energija preprostih termodinamskih sistemov se v splošnem veča z višanjem temperature, saj se pri tem veča termično gibanje oz. kinetična energija, a ta odvisnost ponavadi ni enostavna. Odvisnost med notranjo energijo in temperaturo je enostavna le v primeru idealnih plinov, ki si ga bomo podrobneje pogledali v nadaljevanju.

13.2 Notranja energija idealnega plina

Osnovna značilnost idealnih plinov je, da med njihovimi molekulami ni interakcij. Če obnašanje plinov ne vplivajo kakšne potencialne energije, je notranja energija idealnega plina kar enaka skupni kinetični energiji molekul. Ker pa je slednja preko ekviparticijskega izreka neposredno povezana s temperaturo, je tudi notranja energija idealnega plina neposredno povezana s temperaturo:

$$W_{n.i.p.} = \frac{1}{2}N_p \cdot Nk_B T = \frac{1}{2}N_p \cdot nRT, \quad (13.1)$$

kjer je N_p število prostostnih stopenj ene molekule. Notranja energija je odvisna od števila prostostnih stopenj molekul plina, saj je po ekviparticijskem izreku $\frac{1}{2}k_B T$ termične energije v vsaki dostopni prostostni stopnji. Več-atomni plini imajo torej pri dani temperaturi večjo notranjo energijo kot eno-atomni (slika 13.1).

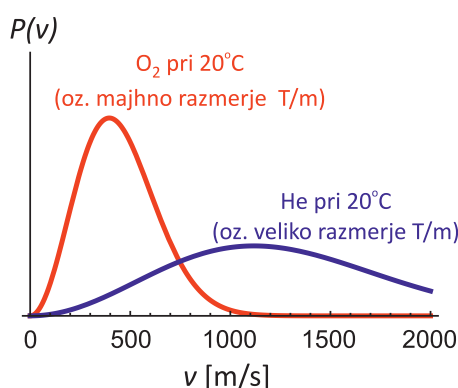


Slika 13.1: **A)** Enoatomna molekula plina se lahko v prostoru giblje v treh neodvisnih smereh (ima tri prostostne stopnje), zato je po ekviparticijskem izreku njena kinetična energija v povprečju enaka $\frac{3}{2}k_B T$. **B)** Dvoatomna oz. linearna molekula plina se lahko poleg tega tudi vrti okrog dveh osi (ima pet prostostnih stopenj) in ima v povprečju skupno $\frac{5}{2}k_B T$ energije. **C)** Večatomna molekula se lahko giblje na šest neodvisnih načinov (tri translacije in tri rotacije) zato ima v povprečju $\frac{6}{2}k_B T$ energije. V splošnem lahko molekule plinov tudi nihajo, a je pri sobni temperaturi termična energija premajhna, da bi lahko to nihanje vzbudila (izjema je npr. CO_2 , ki zaradi termične energije tudi niha).

Gibanje po prostoru je v vsakem primeru povezano s tremi prostostnimi stopnjami, zato je povprečna translacijska kinetična energija ene molekule enaka za vse vrste plinov:

$$W_k = \frac{1}{2}m_1 v^2 = \frac{3}{2}k_B T, \quad (13.2)$$

pri čemer smo z m_1 označili maso ene molekule plina, z v pa njeno hitrost. Ker imajo v povprečju vse molekule enako termično energijo, je v povprečju hitrost molekul sorazmerna kvadratnemu korenu razmerja med temperaturo in maso ene molekule. Pri dani temperaturi se torej v povprečju lažje molekule gibljejo hitreje kot težje, pri vseh pa je gibanje tem hitrejše čim višja je temperatura. Zgornja enačba velja v povprečju, dejanske hitrosti posameznih molekul pa so pri tem porazdeljene po t.i. Maxwell–Boltzmannovi porazdelitvi (slika 13.2).



Slika 13.2: Porazdelitev hitrosti molekul kisika in helija pri sobni temperaturi. Pri sobni temperaturi je povprečna hitrost prvih približno 440 m/s, drugih pa približno 1250 m/s. Z višanjem temperature se hitrosti molekul večajo, saj iz ekviparticijskega izreka za idealne pline (en. 13.2) sledi, da so hitrosti plina sorazmerne $\sqrt{T/m}$. Povprečna hitrost molekul helija ($M = 4$ g/mol) je zato $\sqrt{8}$ krat večja od povprečne hitrosti molekul kisika ($M = 32$ g/mol). Porazdelitev hitrosti molekul kisika bi se modri krivulji približala pri temperaturi $8 \cdot 293 \text{ K} \approx 2344 \text{ K}$.

13.3 Delo, toplota in prvi zakon termodinamike

Oboroženi z znanjem o notranji energiji lahko posplošimo zakon o ohranitvi mehanske energije, ki smo ga spoznali pri preprostih mehanskih sistemih. Posplošitev, ki velja za vse sisteme v naravi, se imenuje *prvi zakon termodinamike* in pravi:

Energija sistema ne more nastajati iz nič ali izginjati v nič. Sprememba notranje energije sistema je enaka energiji, ki jo sistem izmenja z okolico.

Prvi zakon termodinamike je torej zelo preprost, a je kljub temu (ali pa ravno zato) eden od najbolj fundamentalnih zakonov narave. Ljudje že od nekdaj iščejo načine, kako ga prelisičiti, saj je bila energija od nekdaj dragocena dobrina in bi ji bilo dobro delati "iz nič", seveda pa so pri tem iskanju neuspešni. Preden si pogledamo nekaj praktičnih posledic prvega zakona termodinamike, si oglejmo nekaj načinov prehajanja notranje energije iz sistema v sistem.

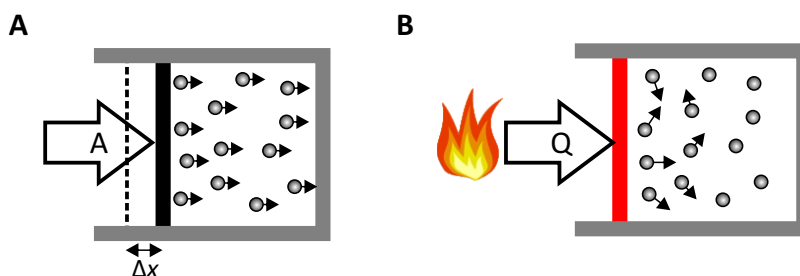
V poglavju o mehaniki smo videli, da lahko preprostemu mehanskemu sistemu energijo spremenimo s pomočjo dela, ki ga izračunamo kot produkt sile na telo in poti, na kateri je ta sila delovala. Enako velja tudi za sisteme z veliko delci, le da na njih ne moremo delovati s točkasto silo temveč silo na površino, t.j. s tlakom. Delo se opravi le, če sila deluje na določeni poti, kar se v termodinamskih sistemih pozna kot sprememba prostornine. Kratek račun pokaže (slika 13.3A), da je delo v termodinamskih sistemih enako

$$A = -p\Delta V, \quad (13.3)$$

kjer je p tlak, s katerim okolica pritiska na sistem, ΔV pa je sprememba prostornine sistema. Predznak dela smo definirali tako, da je delo pozitivno, če ga opravi okolica, in negativno, če ga opravi sistem. Ker je tlak vedno pozitiven, bo sistem ob večanju prostornine ($\Delta V > 0$) okolico odrival in zato opravljal delo ($A < 0$). Po drugi strani bo delo pozitivno, če okolica stisne sistem in mu s tem zmanjša prostornino ($\Delta V < 0$).

Zgornja enačba za delo velja le za primere, ko se tlak sistema med izmenjavo dela ne spreminja. Če se tlak med izmenjavo dela spreminja, moramo delo izračunati z integralom $A = - \int p dV$. Vidimo tudi, da pri nespremenjeni prostornini ($\Delta V = 0$) sistem z okolico ne izmenja nič dela, ne glede na to ali se v okolici morda spreminja tlak.

Že pri mehaniki smo spoznali, da poleg dela obstajajo še drugi načini izmenjave energije, ki pa so bili mehaniki "nevidni." Predstavljajmo si, da staknemo en vroč in en hladen predmet. Molekule v vročem predmetu se termično gibljejo hitreje kot molekule v hladnem, ker pa sta predmeta v stiku, se bo njihova kinetična energija preko trkov počasi prenesla na molekule v hladnejšem predmetu, ne da bi se pri tem opravilo delo (slika 13.3). Pravimo, da



Slika 13.3: Shematični prikaz dveh tipičnih načinov dovajanja energije v sistem. **A)** Pri dovajanju dela z zunanjo silo stisnemo molekule v sistemu, pri čemer na sistem delujemo s tlakom $p = F/S$, kjer je S površina sistema. Meja sistema se premakne Δx , prostornina sistema pa se zaradi tega zmanjša za $\Delta V = \Delta x S$ (sprememba prostornine je negativna). Energija sistemu se pri tem poveča za $A = -p\Delta V$ (ker je $\Delta V < 0$ bo $A > 0$). **B)** Dovajanja toplote s termičnim stikom z vročim telesom. V vročem telesu je termično gibanje večje in se preko trkov molekul razširi po vsem sistemu. V nasprotju z delom pri toploti dovajanje energije poteka preko neurejenega gibanja molekul.

toplota prehaja s toplejšega na hladnejše telo¹, označujemo pa jo s simbolom Q . Prehajanje toplote poteka, dokler se temperatura obeh teles ne izenači. Tako delo in toplota povečata energijo molekul v sistemu, le da pri delu energijo dobi veliko molekul hkrati, pri toploti pa se energija neurejeno prenaša med posameznimi molekulami. Ker smo pri mehaniki vedno obravnavali celo telo hkrati in posameznih molekul nismo videli, nam je bila tudi toplota "nevidna."

Pogosto energija med sistemih prehaja le z zgoraj opisanima delom in toploto. V takih sistemih lahko prvi zakon termodinamike zapišemo z enačbo:

$$\Delta W_n = A + Q . \quad (13.4)$$

Zgoraj opisana delo in toplota sta sicer zelo pogosta načina za prehajanje energije, nista pa edina. Delo lahko npr. dovajamo tudi v obliki električnega dela, kar bomo spoznali pri poglavju o elektriki in magnetizmu. Energija lahko med sistemi prehaja tudi v obliki elektromagnetnega sevanja. Če gre za infrar-

¹Opozorimo naj, da *temperatura* in *toplota* nikakor nista ista stvar! Temperatura pove kako je nekaj vroče ali hladno in jo merimo v K ali °C, toplota pa je eden od načinov za prehajanje energije med sistemi in ima enoto J. Zmeda je velika tudi zato, ker je starinski izraz za termometer "toplomer." V izogib zmeda ta izraz počasi opuščamo.

deče sevanje, je to kar "toplota," saj se tako sevanje absorbira nespecifično v celem telesu in s tem poveča neurejeno termično gibanje molekul v sistemu. Po drugi strani se lahko fotoni elektromagnetnega sevanja absorbirajo tudi na bolj urejen način, kar se dogaja npr. pri fotosintezi, pri kateri rastline energijo elektromagnetnega sevanja s sonca pretvarjajo v notranjo energijo kemijskih vezi v hrani.

13.4 Kalorimetrija

Ena od najpogostejših posledic dovajanja toplote v sistem je segrevanje, se pravi višanje njegove temperature. V splošnem je sprememba temperature sistema kar sorazmerna količini izmenjane toplote:

$$Q = C\Delta T, \quad (13.5)$$

pri čemer koeficient C imenujemo *toplotna kapaciteta* sistema in v dovolj majhnih temperaturnih območjih ni odvisen od temperature. Zgornja enačba velja tudi za odzemanje toplote, v takem primeru sta tako Q kot ΔT pač negativna (razmislite, ali je C lahko negativen!). Če je sistem iz homogene snovi, lahko vpeljemo še *specifično toploto snovi* in jo označimo s c , pri čemer velja $C = mc$, kjer je m masa sistema. Za homogene sisteme lahko zgornjo enačbo torej zapišemo kot

$$Q = mc\Delta T, \quad (13.6)$$

Te enačba se lepo sklada z našo intuicijo: večji kot je sistem, več toplote potrebujemo, da ga segrejemo za določeno temperaturo. Vrednost specifične toplote snovi je lahko v splošnem odvisna od temperature, pri plinih pa je odvisna tudi o tega, ali plin segrevamo pri konstantnem tlaku ali pri konstantni prostornini (primer [13.2](#)).

Zgoraj opisano obnašanje s pridom izrabljamo za merjene izmenjane toplote. Spremembo temperature znamo namreč dobro izmeriti s termometrom in če poznamo toplotno kapaciteto, lahko brez težav določimo tudi toploto, ki je povzročila izmerjeno spremembo temperature. Najpreprostejša naprava za merjenje toplote je *kalorimeter* (primer [13.3](#)). Kot bomo videli v prihodnjih poglavjih, je količina izmenjane toplote zelo pomemben podatek za razumevanje biokemijskih reakcij, zato je kalorimeter eno osnovnih orodij za raziskovanje naravnih procesov.

Izmenjevanje toplote z okolico ni nujno povezano le s spreminjanjem temperature sistema, ampak je lahko povezano tudi s kemijskimi reakcijami ali pa s spremembami agregatnega stanja v sistemu (toplota se pri tem porabi za pretrganje kemijskih vezi). Taljenje in izparevanje potekata pri konstantni temperaturi, toplota, ki jo potrebujemo za spremembo agregatnega stanja snovi, pa je sorazmerna njeni masi:

$$Q = mq_t \quad \text{ozioroma} \quad Q = mq_i, \quad (13.7)$$

kjer je m masa snovi, ki je spremenila agregatno stanje, q_t in q_i pa sta talilna oz. izparilna toplota, t.j. konstanti, ki povesta koliko energije je potrebno taljenje oz. izparevanje 1 kg izbrane snovi (primer 13.4). Izparilna toplota je tipično večja od talilne, saj se morajo pri izparevanju vezi med molekulami popolnoma pretrgati, za kar potrebujemo veliko toplote. Za vodo pri normalnem tlaku npr. velja $q_t = 334 \text{ kJ/kg}$ in $q_i = 2,3 \text{ MJ/kg}$.

Primer 13.2: specifična toplota idealnih plinov

Specifična toplota snovi pove, koliko toplote Q potrebujemo, da maso snovi m segrejemo za ΔT . Večja kot je specifična toplota snovi, več toplote potrebujemo, da dano maso segrejemo. Pri idealnih plinih je sprememba temperature preko en. 13.1 enostavno povezana s spremembo notranje energije, zato lahko specifično toploto idealnih plinov določimo tako, da primerjamo enačbo za toploto (en. 13.6) in vrednost izmenjane toplote po 1. zakonu termodinamike

$$Q = \Delta W_n - A.$$

Če plin med dovajanjem toplote z okolico ne izmenja dela ($A = 0$), bo šla vsa toplota v spremembo notranje energije in posledično v spremembo temperature. Če pa se plin med dovajanjem toplote lahko razpenja, bo šlo nekaj toplote tudi za delo, ki se ob tem opravi, zato bosta spremembi notranje energije in temperature nekaj manjši. Specifična toplota pri dani prostornini (ko je $A = 0$) bo torej manjša kot specifična toplota pri danem tlaku. Prvo bomo poimenovali c_V drugo pa c_p .

Račun naredimo najprej za enoatomne pline, ki imajo le tri prostostne stopnje ($N_p = 3$, slika 13.1). Število prostostnih stopenj vnesemo v enačbo za notranjo energijo idealnih plinov (en. 13.1) in razberemo zvezo med spremembo notranje energije in temperature enoatomnih plinov

$$\Delta W_n = \frac{3}{2} n R \Delta T = \frac{3}{2} m \frac{R}{M} \Delta T,$$

pri čemer smo v zadnjem koraku uporabili zvezo $n = m/M$. Specifično toploto pri dani prostornini bomo razbrali iz primerjave enačb, s katero smo specifično toploto

definirali (en. 13.6) in količino izmenjane toplote po 1. zakonu

$$Q = mc_V \Delta T \quad \text{in} \quad Q = \Delta W_n - 0 = m \frac{3}{2} \frac{R}{M} \Delta T \quad .$$

Iz primerjave zgornjih enačb razberemo, da je specifična toplota enoatomnega plina pri dani prostornini enaka

$$c_v = \frac{3}{2} \frac{R}{M}$$

Pri segrevanju pri danem tlaku se plin tudi razpenja in opravlja delo, ki pa ga lahko izračunamo s pomočjo plinske enačbe, v kateri upoštevamo, da je tlak konstanta in je sprememba prostornine neposredno povezana s spremembo temperature:

$$A = -p\Delta V = -nR\Delta T = -m \frac{R}{M} \Delta T$$

Ponovno primerjamo enačbo za specifično toploto (en. 13.6) in količino izmenjane toplote po 1. zakonu

$$Q = mc_p \Delta T \quad \text{in} \quad Q = \Delta W_n - A = \frac{3}{2} m \frac{R}{M} \Delta T + m \frac{R}{M} \Delta T = m \frac{5}{2} \frac{R}{M} \Delta T$$

Vidimo, da je specifična toplota za enoatomni plin pri danem tlaku enaka

$$c_p = \frac{5}{2} \frac{R}{M}$$

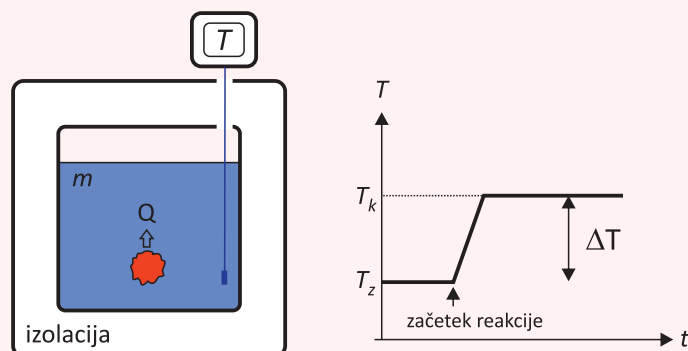
Če bi račun ponovili še za večatomne pline, bi ugotovili, da je pri vseh vrednost c_p ravno za R/M večja od vrednosti c_v :

$$c_p = c_v + \frac{R}{M} \quad ,$$

vrednost c_v pa je enaka številu prostostnih stopenj krat $\frac{1}{2} \frac{R}{M}$. Kasneje bomo videli, da je za obnašanje plinov pomemben parameter tudi razmerje med specifičnima toplotama, $\kappa = c_p/c_v$. Enostaven račun pokaže, da je ta parameter za enoatomne pline enak 1,66, za dvoatomne 1,4, za prostorske molekule pa 1,33.

Primer 13.3: kalorimeter

Kalorimeter je naprava, s katero merimo količino toplote, ki se sprosti ob izbranem procesu, npr. pri eksotermni kemijski reakciji ali ob ohlajevanju izbranega telesa. Na sliki je prikazano delovanje preprostega kalorimetra.



Preprost kalorimeter je dobro izolirana posoda, v kateri je znana količina vode. V kalorimetru poženemo proces, ki ga raziskujemo, in hkrati merimo temperaturo vode. Iz kalorimetra ne more uiti nič toplote, zato bo šla vsa pri procesu sproščena toplota v segrevanje vode v kalorimetru. Količino sproščene toplote lahko določimo neposredno iz enačbe

$$Q = mc\Delta T,$$

saj poznamo maso vode (m) in njeno specifično toploto (c), spremembo temperature ($\Delta T = T_k - T_z$) pa izmerimo. Ponavadi se ne moremo izogniti, da ne bi poleg vode ogreli tudi notranjih sten kalorimetske posode. V takem primeru moramo zgornjo enačbo nadomestiti z enačbo $Q = (mc + C)\Delta T$, kjer smo s C označili toplotno kapaciteto notranjih sten kalorimetske posode.

Primer 13.4: regulacija temperature s potenjem

Za človeka je izhlapevanje potu eden glavnih mehanizmov za regulacijo telesne temperature (tu ljudje prekašamo dinozavre in druge plazilce, ki regulacije telesne temperature nimajo je njihova temperatura bolj ali manj prepuščena zunanjim pogojem). Znan je podatek, da tekač z maso 60 kg med tekom s potenjem in izhlapevanjem izgubi približno 0,5 l vode na uro. Ali znamo na osnovi tega podatka določiti, najmanj kolikšna je njegova energijska poraba?

Celotne energijske porabe iz zgornjega podatka žal ne moremo določiti, saj del energije tekač porabi kot delo pri premikanju, del toplote pa odda tudi npr. s sevanjem. Iz zgornjega podatka lahko ocenimo le toploto, ki se je v eni uri od telesa odvedla z izhlapevanjem:

$$Q = mq_i = 0,5 \text{ kg} \cdot 2,3 \text{ MJ} = 1,15 \text{ MJ}.$$

To je približno toliko, kolikor v 3 h porabo 100 W žarnica.

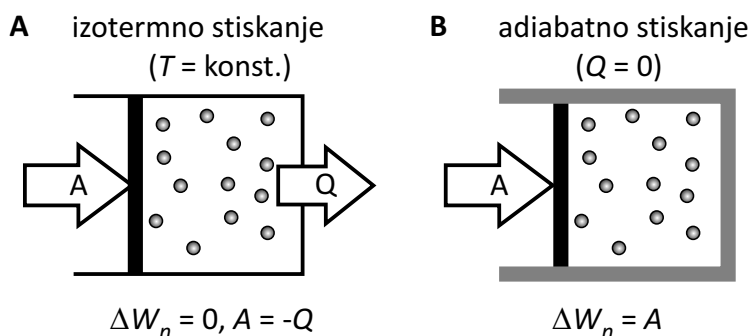
Izračunajmo še, za koliko bi se v eni uri segrelo tekačevo telo, če pot ne bi izhlapeval, npr. če bi tekel po džungli, kjer zaradi velike vlažnosti zraka pot ne izhlapeva. Če se zgoraj izračunana toplota ne bi odvedla z izhlapevanjem, bi se porabila za segrevanje telesa. Ob predpostavki, da je specifična toplota telesa podobna specifični toploti vode, dobimo

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{1,15 \text{ MJ}}{60 \text{ kg} \cdot 4200 \text{ J/kgK}} = 4,6^\circ\text{C}.$$

V tropski klimi bi intenzivni tek torej težko preživel.

13.5 Stiskanje in razpenjanje plinov

S stiskanjem oz. razpenjanjem plinov se v vsakdanjem življenju srečamo vsaj pri napihovanju zračnic na kolesu in spuščanju dišav iz deodorantov pod tlakom, v medicini pa npr. pri jeklenkah stisnjenih plinov, ki se uporabljajo za predihavanje pacientov.



Slika 13.4: Shematični prikaz dveh možnosti stiskanja idealnih plinov. **A)** Če je plin v toplotnem stiku z okolico, bo energijo, pridobljeno z delom stiskanja, sproti izgubljal v obliki toplote. Notranja energija in s tem temperatura se mu zaradi stiskanja ne bosta spremenili. **B)** Če je plin izoliran, se mu bo ob stiskanju zaradi dovedenega dela povečala notranja energija in se bo segrel. Tlak se mu bo zaradi tega zvečal bolj kot pri izotermnem stiskanju. Hitro (adiabatno) je torej plin težje stisniti kot počasi (izotermno).

Obnašanje plinov pri stiskanju oz. razpenjanju je odvisno od izmenjevanja toplote med plinom in okolico. Če lahko plin med stiskanjem izmenjuje toploto z okolico, bo njegova temperatura vseskozi enaka temperaturi okolice, ki je ponavadi konstantna. Takim procesom pravimo tudi *izotermni* procesi. Če pa

je plin izoliran, ali pa je stiskanje tako hitro, da ni časa za izmenjavo toplote, se bo zaradi dovedenega dela plinu povečala notranja energija in se bo zaradi tega segrel (analogno se bo pri takem razpenjanju temperatura plinu znižala). Procesom brez izmenjave toplote z okolico ($Q = 0$) pravimo *adiabatni* procesi.

Ker se pri adiabatem stiskanju poveča temperatura, se tlak plina bolj poveča kot pri izotermnem. Če lahko pri izotermnem stiskanju spremembo tlaka izračunamo kar iz plinske enačbe ($pV = konst.$), pa je pri adiabatem situacija bolj zapletena. Natančnejši izračun pokaže, da za adiabatsne spremembe velja zveza

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa, \quad (13.8)$$

kjer je κ razmerje c_p/c_V (se pravi 1,66 za enoatomne pline, 1,4 za dvoatomne linearne molekule in 1,33 za prostorske molekule, primer 13.2). Pri izotermnih spremembah se ohranja produkt pV , pri adiabatsnih pa produkt pV^κ . Ker je κ vedno večja od ena, bodo torej spremembe tlaka zaradi spreminjanja volumna pri adiabatsnih spremembah bolj izrazite kot pri izotermnih spremembah.

Ker tlak plina pri adiabatem stiskanju raste hitreje kot pri izotermnem, plin adiabatsno težje stisnemo kot izotermno. Z drugimi besedami, adiabatsna stisljivost plina je manjša kot izotermna. Natančnejši račun pokaže:

$$\chi_T = \frac{1}{p} \quad \text{in} \quad \chi_S = \frac{1}{\kappa p} \quad (13.9)$$

kjer smo s χ_T označili izotermno, s χ_S pa adiabatsno stisljivost. Žlahtne (enoatomne) pline je torej malce težje hitro stisniti kot večatomne pline, ki imajo manjšo vrednost κ . Z našim znanjem termodinamike si znamo to lastnost enostavno razložiti: pri enoatomnih plinih gre vse delo adiabatsnega stiskanja v translacijsko kinetično energijo, se pravi v gibanje, ki prispeva k tlaku plina in tako nasprotuje našemu stiskanju. Pri večatomnih plinih pa gre del dela v povečanje rotacijske kinetične energije, ki k tlaku ne prispeva.

13.6 Entalpija

Izmenjevanje toplote je pomemben parameter za potek biokemijskih reakcij. Nekateri reakcije za svoj potek potrebujejo toploto iz okolice, pri drugih pa

se toplota v okolico sprošča. Prve se imenujejo endotermne reakcije ($Q > 0$), druge pa eksotermne ($Q < 0$). Ker pa so mnoge reakcije zelo zapletene in lahko iz reaktantov do produktov vodi več različnih poti, se postavi vprašanje, ali je izmenjana toplota vedno enaka, ne glede na to, po kateri poti se je reakcija izvršila. Poglejmo, ali nam lahko prvi zakon termodinamike pomaga pri odgovoru na to vprašanje.

Biokemijske reakcije ponavadi potekajo pri danem tlaku, se pravi kar pri zunanjem zračnem tlaku. Če so v reakcijah udeleženi tudi plini, bo na spremembo notranje energije vplivalo tudi delo, ki se porabi pri razpenjanju plinov. V splošnem se torej pri biokemijskih reakcijah z okolico izmenjata tako delo kot toplota. Z malo računske akrobacije in uporabo prvega zakona termodinamike lahko vseeno ugotovimo, kaj se pri reakcijah dogaja s toploto. V ta namen vpeljemo količino *entalpija*, ki jo označimo s črko H in definiramo kot

$$H = W_n + pV \quad (13.10)$$

Izračunajmo spremembo entalpije pri reakciji pri danem tlaku. Sprememba entalpije bo enaka vsoti spremembe notranje energije in spremembe produkta pV . Ker je p konstanten, je sprememba tega produkta kar enaka $p\Delta V$. Sedaj moramo le še upoštevati prvi zakon termodinamike (En. 13.4) in izraz za delo (En. 13.3) ter za spremembo entalpije dobimo

$$\Delta H = Q \quad (13.11)$$

Sprememba entalpije je pri danem tlaku torej kar enaka izmenjani toploti. Še več, ker je entalpija odvisna le od notranje energije, tlaka in prostornine, imata dva enaka sistema poleg enakih notranje energije, tlaka in prostornine enako tudi entalpijo. Sprememba entalpije in s tem celotna izmenjana toplota sta torej odvisni le od začetnega stanja in končnega stanja reakcije, ne glede na to po kakšni poti je reakcija potekla. S tem je povezan *Hessov zakon*, ki pravi, da je sprememba entalpije celotne reakcije vsota sprememb entalpij posameznih korakov. Če npr. reakcija poteka iz stanja A do stanja D preko vmesnih korakov B in C ($A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$), velja

$$\Delta H_{A \rightarrow D} = \Delta H_{A \rightarrow B} + \Delta H_{B \rightarrow C} + \Delta H_{C \rightarrow D} . \quad (13.12)$$

Celotna reakcija je endotermna če je končna entalpija sistema višja od začetne ($\Delta H > 0$) in eksotermna, če je končna entalpija nižja od začetne ($\Delta H < 0$).

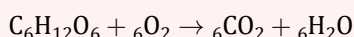
Videli bomo, da nam Hessov zakon lahko pride zelo prav pri obravnavanju zapletenejših reakcij.

Prostornina tekočin in trdnih snovi se med reakcijami ne spreminja veliko, zato je za njih sprememba entalpije kar približno enaka spremembi notranje energije, $\Delta H \approx \Delta W_n$. Razlike med obema količinama pa nikakor ne moremo zanemariti, če v reakcijah nastopajo plini.

Čeprav je entalpija na prvi pogled še bolj abstrakten pojem od energije, pa ima veliko praktično vrednost. Spremembe notranje energije namreč ni vedno enostavno izmeriti, saj za merjenje dela ni preproste univerzalne metode. Po drugi strani lahko spremembo entalpije brez težav izmerimo s kalorimetrom. Za mnoge spojine so nam spretni kemiki že izmerili t.i. standardno tvorbeno entalpijo formacije, to je spremembo entalpije ob formaciji enega mola spojine iz osnovnih spojih pri standardnih pogojih (standardne vrednosti v kemiji pogosto označijo s simbolom $^\circ$, standardno tvorbeno entalpijo tako označimo z ΔH_t°). Če poznamo standardne entalpije formacije za reaktante in produkte, lahko spremembo entalpije za neke zapletenejšo reakcijo brez težav izračunamo in predvidimo, ne da bi sploh izvedli eksperiment (primer 13.5). Tvorba kemijskih vezi je ponavadi eksotermni proces, saj se ob vezavi dveh delcev zniža njuna interakcijska energija (spomnimo se slike 4.3B), tako sproščena energija pa se nato v okolico sprosti v obliki toplote.

Primer 13.5: uporaba entalpije v praksi

Poglejmo, ali znamo izračunati, koliko toplote se sprosti pri gorenju snovi, ne da bi si morali ob tem opeči prste. Toploto izračunajmo za gorenje glukoze in se hkrati spomnimo, da se enaka količina energije sprosti tudi med metabolizmom glukoze v naših telesih, saj so reaktanti in produkti reakcije v obeh primerih enaki. Pri gorenju glukoze poteka naslednja reakcija:



V tabelah najdemo naslednje podatke za standardno tvorbeno entalpijo enega mola naših reaktantov in produktov :

spojina	$\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$	O_2	CO_2	H_2O
$\Delta H_t^\circ [\text{kJ/mol}]$	-1273,3	0	-393,5	-285,8

Standardna tvorbeno entalpija kisika je nič, saj je kisik že osnovna spojina. Spremembo entalpije pri gorenju dobimo, če izračunamo razliko med standardno tvorbeno entalpijo produktov in reaktantov, pri čemer upoštevamo, da v reakciji nastopa šest molov ogljikovega dioksida in šest molov vode:

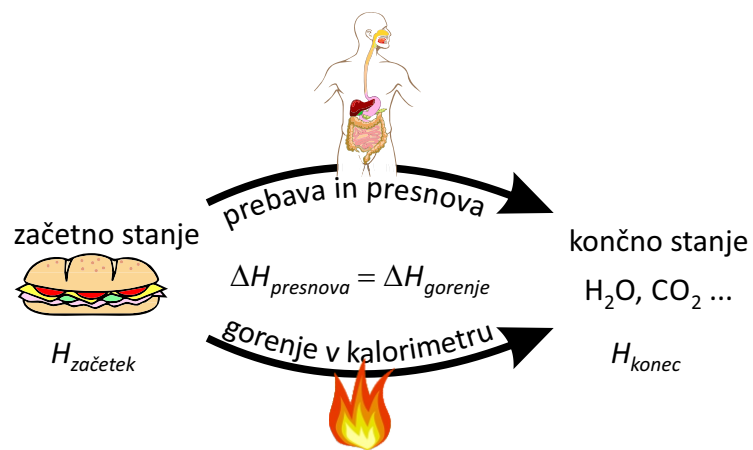
$$\text{produkti: } -6 \cdot 393,5 \text{ kJ} - 6 \cdot 285,8 \text{ kJ} = -4075,8 \text{ kJ}$$

$$\text{reaktanti: } -1273,3 \text{ kJ} - 6 \cdot 0 \text{ kJ} = -1273,3 \text{ kJ}$$

$$\text{razlika: } -2802,5 \text{ kJ}$$

Pri gorenju enega mola glukoze (t.j. približno 180 g) pri standardnih pogojih se torej sprosti približno 2803 kJ toplote, kar zadošča za segretje 10 litrov vode za približno 67 K! Do enake številke bi seveda prišli tudi, če bi oddano toploto pri standardnih pogojih izmerili v kalorimetru. V praksi pri gorenju produkti ne nastajajo pri standardnih pogojih ampak končajo pri precej višji temperaturi, pa tudi voda je na koncu v plinastem in ne v tekočem stanju. V praksi bi torej pri gorenju glukoze dobili malo manj toplote, saj se je nekaj porabi za segrevanje in izhlapevanje vode. Primerjava standardnih tvorbenih entalpij s termično energijo (primer 13.1) nam pove, da je v kovalentnih vezeh spravljeno res veliko energije.

Zgornji razmisleki so nepogrešljiv del razumevanja fizioloških in biokemijskih procesov v telesu. Uporabimo jih npr. pri določanju kalorične vrednosti hrane. Ko hrano pojemo, jo telo razgradi in uporabi s pomočjo zapletenih biokemijskih mehanizmov prebave in presnove. Pri določanju njene energijske vrednosti na srečo ni potrebno slediti vsem tem procesom, ampak le primerjati začetno in končno stanje sistema (slika 13.5). Vemo, da se hrana s presnovo spremeni v glavnem v CO_2 , vodo in pa ostanke ostalih snovi. Če bi hrano zažgali, bi prišli do praktično enakega končnega stanja. Energijsko vrednost hrane lahko torej enostavno določimo tako, da jo zažgemo v kalorimetru in izmerimo, koliko toplote se je pri tem sprostil. Pri tem moramo le upoštevati, da so v hrani tudi snovi, ki jih naše telo ne more prebaviti, pri gorenju pa vseeno oddajajo toploto (npr. celuloza). V praksi so tako v kalorimetru izmerili le povprečne kalorične vrednosti glavnih prebavljivih snovi (ogljikovi hidrati, proteini, maščobe ipd.), energijsko vrednost hrane pa določijo preko merjenja vsebnost teh snovi v določeni hrani (primer 13.6).



Slika 13.5: Tako prebava in presnova kot gorenje spremenita hrano iz istega začetnega v isto končno stanje (vodno paro, ogljikov dioksid ter druge ostanke) zato bo sprememba entalpije v obeh primerih enaka, $\Delta H_{\text{presnova}} = \Delta H_{\text{gorenje}} = H_{\text{konec}} - H_{\text{začetek}}$. Energijsko vrednost prebavljive hrane lahko zaradi tega izmerimo kar s kalorimetrično meritvijo spremembe entalpije pri gorenju (tj. oddane toplote pri gorenju).

Primer 13.6: kalorije

Kalorija je stara enota za energijo, ki so jo izbrali tako, da 1 cal ustreza toploti, ki 1 g vode segreje za 1 °C. S pomočjo našega znanja kalorimetrije (en. 13.6) znamo takoj izračunati povezavo med kalorijami in jouli: 1 cal = 4,184 J. Iz zgodovinskih razlogov se kalorije še vedno pogosto uporablja, včasih celo kot sinonim za energijo (beseda kalorija izvira iz latinske besede za toploto). Pri nas kalorije največkrat srečamo v povezavi z energijsko vrednostjo hrane, pri tem pa moramo biti pozorni, saj se (predvsem v anglosaksonski literaturi) za kilokalorijo uporablja kalorija z veliko začetnico 1 Cal = 1 kcal.

Tabela prikazuje kalorično vrednost glavnih sestavin hrane ([3]). Izmerimo jo kot toploto, ki se pri zažigu sprosti v kalorimetru in torej opisuje spremembo entalpije pri reakciji $\text{hrana} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} + \text{ostanki}$. V praksi vsake hrane ni potrebno zažgati, ampak ji z biokemijsko analizo določimo vsebnost osnovnih sestavin ter s pomočjo tabele izračunamo skupno energijsko vrednost.

snov	kJ/g	kcal/g
ogljikovi hidrati	17	4
proteini	17	4
etanol	29	7
maščobe	37	9

Čeprav je kalorična vrednost eden osnovnih kvantitativnih parametrov hrane, pa se pri dietah nanjo ne moremo preveč zanašati. Delež prebavljene hrane je namreč zelo odvisen od situacije in človeka, zato s štetjem kalorij ne dobimo nujno natančne informacije o količini energije, ki jo dobimo s hrano. Za povprečnega človeka je torej namesto znanstvenega preštevanja zaužitih kalorije bolj pomembno, da sledi nasvetom babic: jesti je treba raznoliko hrano v zmernih količinah in se veliko gibati! Mimogrede: prvi strastni preštevalec "kalorij" je bil Santorio Santorio, ki smo ga srečali že pri prvih termometrih.

Poglavje 14

Entropija in drugi zakon termodinamike

Nekatere stvari se v naravi spontano ne zgodijo, pa čeprav ne kršijo prvega zakona termodinamike. Skakanje košarkarske žoge po tleh s časom vedno zamre, mirujoča žoga pa iz tal nikoli ne posea toplote in začne skakati, pa čeprav bi se lahko celotna energija tudi pri tem procesu ohranjala. Očitno se nekatere pretvorbe energije lahko zgodijo spontano, druge pa ne.

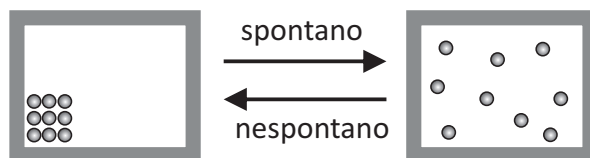
Vprašanje spontanosti procesov je pravzaprav že eno osrednjih vprašanj znanosti. Od nekdanj so se fiziki, kemiki, biologi, inženirji, pa tudi filozofi spraševali, zakaj se nekatere stvari zgodijo spontano, druge pa ne? Šele v drugi polovici 19. stoletja je postalo jasno, da so vsa ta vprašanja povezana s količino, ki jo danes imenujemo *entropija*, ter z njo povezano temeljno zakonitostjo narave, ki ji danes rečemo *drugi zakon termodinamike*. Zaradi svojega malce skrivnostnega imena in abstraktne definicije entropija še danes marsikomu buri domišljijo. Tudi mi ne bomo mogli raziskati vseh njenih skrivnosti, kljub temu pa si bomo lahko tudi s svojim znanjem fizike pridobili nekaj osnovne intuicije o smeri poteka spontanih sprememb v naravi.

14.1 Spontanost procesov in preprost pogled na entropijo

Za začetek našega spoznavanja z entropijo si pogledjmo preprost idealiziran primer. Plin naj bo na začetku stisnjen v kot izolirane posode, nato pa ga prepustimo samega sebi. Vsi vemo, da se v tem primeru plin spontano razširi po vsej razpoložljivi prostornini posode (slika 14.1). Obraten proces se spontano

ne zgodi nikoli, pa čeprav sta s stališča energije procesa v obe smeri ekvivalentna (v obeh primerih ni nobene izmenjave energije z okolico).

S spontanost procesov je povezana njihova obrnljivost - *neobrnljivi procesi* lahko spontano potekajo le v eni smeri, *obrnljivi procesi* pa lahko spontano potekajo v obeh smereh. Razširjanje plina v prazen prostor je očitno neobrnljivo. Če smo zelo natančni, ugotovimo, da je pravzaprav večina naravnih procesov bolj ali manj neobrnljivih, obrnljivi pa so le zelo idealizirani procesi. Približek obrnljivih procesov so procesi, pri katerih lahko notranje in zunanje trenje zanemarimo, ali pa dovolj počasni procesi, ki potekajo preko samih ravnovesnih stanj, npr. počasno segrevanje ali ohlajevanje sistema.

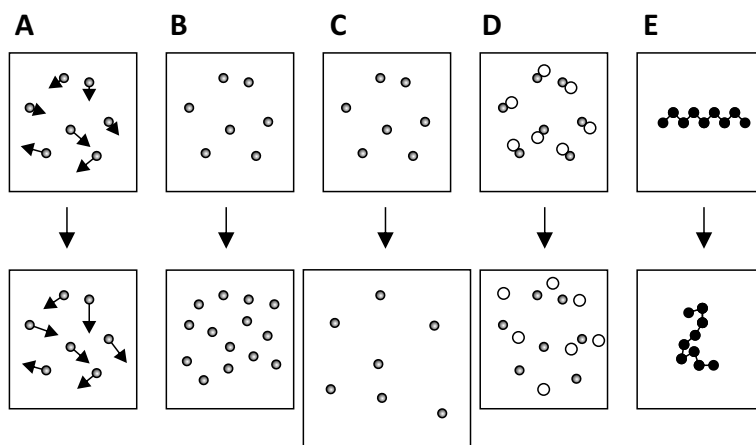


Slika 14.1: Spontani in nespontani procesi. Če je plin na začetku stisnjen v kot posode in ga nato izoliranega od okolice prepustimo samega sebi, se bo spontano razširil po vsem prostoru. Obraten proces se spontano ne zgodi nikoli, saj se plin sam od sebe nikoli ne pospravi v kot posode. Pravimo tudi, da je širjenje plina v prazen prostor neobrnljiv proces. Seveda pa lahko plin nazaj v kot posode pospravimo "nespontano," z opravljanjem dela od zunaj, npr. da ga v kot stisnemo z batom.

Spontanosti procesov ni mogoče razložiti zgolj na osnovi Newtonove fizike in prvega zakona termodinamike, saj Newtonove enačbe enako dobro delujejo tudi, če v enačbah obrnemo smer časa. S stališča drugega Newtonovega zakona lahko proces s slike 14.1 enako dobro poteka v obe strani. Po dolgih letih raziskovanja je šele proti koncu 19. stoletja postalo jasno, da je za opisovanje spontanosti naravnih procesov ključna količina, ki jo danes imenujemo *entropija* in je ena od lastnosti termodinamskih sistemov, podobno kot so to masa, gostota, notranja energija, entalpija in druge.

Natančna formulacija entropije ni enostavna (znamenita Boltzmanova formulacija entropije je predstavljena v primeru 14.1), na srečo pa obstaja tudi preprost pogled na entropijo, ki bo za naše potrebe pogosto povsem zadoševal. Ta pravi, da je entropija merilo za "neurejenost" sistema. Entropija sistema je tem večja, čim bolj je sistem neurejen. Čeprav "neurejenost sistema" v splošnem ni dobro definiran pojem, nam bo pri razumevanju entropije v veliko pomoč intuicija. V našem preprostem primeru s slike 14.1 je plin v posodi bolj neurejen, če se lahko molekule svobodno gibljejo po vsem prostoru.

ru, kot če je "pospravljen" na eno stran posode. Podobno si lahko intuitivno sliko entropije ustvarimo tudi za druge pogoste fiziološke in biokemijske procese. Slika 14.2 prikazuje nekaj tipičnih sprememb, pri katerih nam analogija z neurejenostjo pomaga pri ocenjevanju entropije sistema.



Slika 14.2: Nekaj pogostih primerov sprememb, pri katerih se poveča entropija oz. neurejenost sistema. **A)** Entropija se poveča, če povečamo temperaturo in so molekule podvržene večjemu termičnemu gibanju. **B)** Entropija sistema se poveča, če vanj dodamo nove molekule. **C)** Entropija sistema se poveča, če povečamo prostor, po katerem se lahko gibljejo molekule. **D)** Entropija se ponavadi poveča, ko večje molekule razpadejo na manjše. **E)** Pri velikih makromolekulah je entropija večja, če se lahko neurejeno zvijajo sem ter tja, manjša pa če imajo natančno določeno obliko.

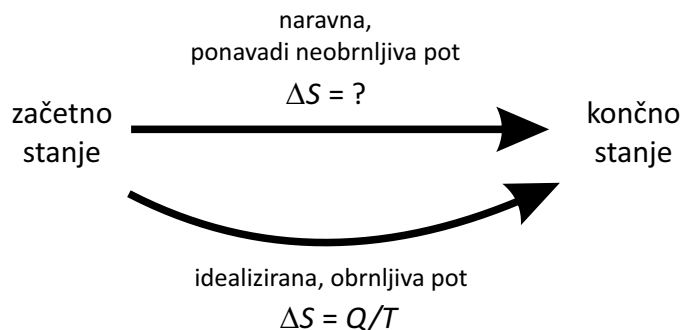
14.2 Izmenjevanje toplote in sprememba entropije

Kot smo videli, je entropija tesno povezana z neurejenostjo sistema. Pojem neurejenosti smo prvič srečali pri vpeljavi toplote, ki smo jo opisali kot neurejeno prehajanje notranje energije med sistemi. Ugibamo lahko, da se sistemu entropija poveča, če mu dovedemo toploto in s tem povečamo neurejeno termično gibanje v sistemu. Natančnejša analiza pokaže, da je pri obrnljivih procesih sprememba entropije sistema enaka razmerju med dovedeno toploto in temperaturo, pri kateri je bila toplota dovedena:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \quad (\text{velja za obrnljive procese}) \quad (14.1)$$

Intuitivno lahko razumemo razlog, da je v zgornji enačbi temperatura v imenovalcu: če je temperatura sistema nizka, mu lahko že majhna količina toplote precej poveča neurejenost, če pa je temperatura visoka, je neurejenost že tako ali tako velika in jo dodatna toplota le še malo poveča. Opozorimo naj še, da zgornja enačba velja le, če je med dovajanjem toplote temperatura sistema konstantna. Če se temperatura spreminja, moramo spremembo entropije izračunati s pomočjo integrala $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$.

Spremembo entropije lahko s pomočjo zgornje enačbe računamo le za obrnljive procese. To so idealizirani procesi, ki potekajo počasi in le preko ravnovesnih stanj. Povedali smo že, da naravni procesi iz nekega začetnega v neko končno stanje ponavadi potekajo po neobrnljivih poteh. Zgornjo enačbo pa lahko uporabimo tudi v takih primerih, le zamisliti si moramo počasen obrnljiv proces, ki vodi iz istega začetnega v isto končno stanje in vzdolž njega po zgornji enačbi izračunati spremembo entropije. Ker je entropija odvisna le od stanja sistema in ne od poti, je sprememba entropije po obrnljivi poti natanko enaka spremembi po neobrnljivi poti.



Slika 14.3: Sprememba entropije je odvisna le od začetnega in končnega stanja sistema, ne pa od poti, po kateri se je sistem spreminjal. Veliko naravnih procesov je neobrnljivih, zato za njih spremembe entropije ne moremo izračunati neposredno po enačbi 14.1. Spremembo entropije za take procese izračunamo tako, da si zamislimo idealiziran obrnljiv proces, ki pripelje iz istega začetnega do istega končnega stanja in spremembo entropije izračunamo vzdolž te poti, po enačbi 14.1.

Kot primer si pogledajmo razpenjanje plina v prazen prostor s slike 14.1. Proces je spontan in nereverzibilen, saj poteka preko očitno neravnovesnih

stanj. Za izračun spremembe entropije pri tem procesu torej enačba 14.1 ni neposredno uporabna (če bi jo uporabili, bi dobili napačen rezultat in sicer, da je sprememba entropije pri tem procesu enaka nič, saj je sistem izoliran in ne izmenja nobene toplote z okolico, $Q = 0$). Po drugi strani si lahko zamislimo reverzibilen proces, ki vodi iz istega začetnega v isto končno stanje. V našem primeru je tak proces kar počasno izotermno razpenjanje plina, za katerega pa je enačba 14.1 neposredno uporabna. Pri izotermnem razpenjanju plina le ta prejme toliko toplote, kot odda dela (slika 13.4). To toploto zato znamo izračunati:

$$Q = -A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = Nk_B T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = Nk_B T \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (14.2)$$

kjer sta V_1 in V_2 začetna in končna prostornina, N je število molekul plina, k_B pa je Boltzmannova konstanta (pri računu smo si pomagali tako, da smo tlak izrazili s plinsko enačbo, $p = Nk_B T/V$). Sprememba entropije pri razpenjanju idealnega plina pri konstantni temperaturi bo torej

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = Nk_B \ln \frac{V_2}{V_1} = -Nk_B \ln \frac{p_2}{p_1}, \quad (14.3)$$

kjer smo v zadnjem enačanju uporabili plinsko enačbo pri stalni temperaturi ($V_1/V_2 = (p_1/p_2)^{-1}$). Sprememba entropije ni odvisna od poti ampak le od začetnega in končnega stanja sistema, zato enačba 14.3 velja tako pri razpenjanju v prazen prostor, ki je prikazano na sliki 14.1, kot tudi pri izotermnem razpenjanju.

Pri spontanem razpenjanju plina v prazen prostor je sistem sicer izoliran ($Q = 0$), a se je entropija vseeno povečala (glej en. 14.3, ker je $V_2 > V_1$, je $\ln V_1/V_2 > 0$). Izkaže se, da se entropija pri spontanem procesu vedno poveča za več, kot bi napovedala enačba 14.1. Za vse neobrnjive (spontane) procese lahko tako v splošnem zapišemo:

$$\Delta S > \frac{Q}{T} \quad (\text{velja za neobrnjive procese}) \quad (14.4)$$

V zgornji enačbi se že kaže drugi zakon termodinamike.

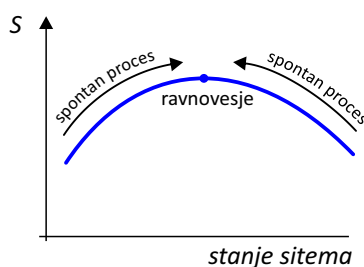
14.3 Drugi zakon termodinamike

Čeprav smo si entropijo do sedaj ogledovali le na zelo preprostih sistemih, opisane lastnosti veljajo pri vseh, še tako zapletenih makroskopskih sistemih.

Prišli smo dovolj daleč, da lahko z besedami zapišemo znameniti drugi zakon termodinamike:

Od okolice izoliran sistem se lahko spontano spreminja le v smeri povečanja entropije. Ko entropija doseže največjo možno vrednost, sistem doseže ravnovesje.

Grafična ponazoritev drugega zakona termodinamike je prikazana na sliki 14.4.



Slika 14.4: Drugi zakon termodinamike pravi, da pri spontanah procesih v izoliranih sistemih entropija le narašča. Sistem doseže ravnovesje, ko entropija doseže največjo možno vrednost.

Poudarimo naj, da drugi zakon ne pravi, da se entropija sistemu ne more zmanjšati. Zakon velja le za povsem izolirane sisteme. Če sistem ni izoliran, mu lahko entropijo zmanjšamo, če iz njega odvedemo toploto oz. ga ohladimo ($Q < 0$, En. 14.1).

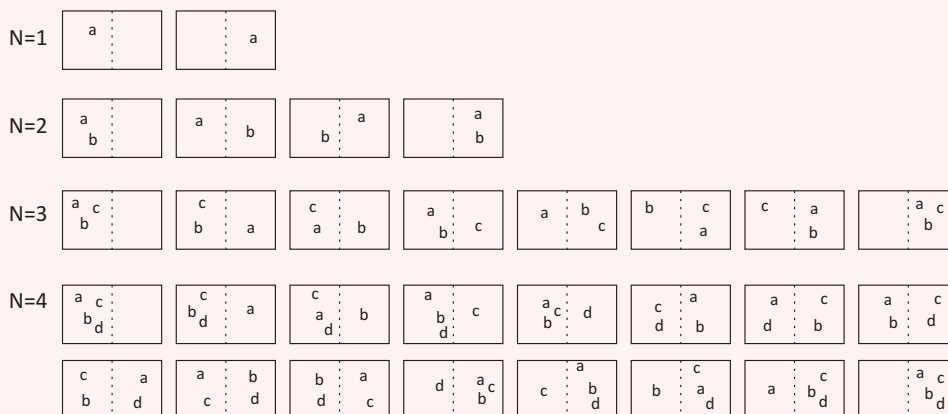
Zgornja oblika drugega zakona je le ena od možnih interpretacij. Pogosto zakon povejo tudi tako, da se entropija vesolja lahko le povečuje (vesolje je "izoliran sistem," zato je ta formulacija v skladu zgoraj). Mogoče je tudi pokazati, da iz drugega zakona sledi, da termične energije oz. toplote ne moremo v celoti pretvoriti v uporabno delo. V tem poglavju smo vzpostavili prvi stik z entropijo in drugim zakonom termodinamike, njuno uporabnost pri razumevanju biokemijskih in fizioloških procesov pa bomo spoznali v naslednjem poglavju.

Primer 14.1: Mikroskopski pogled na entropijo

Zanimiv pogled na obrnljivost procesov, ravnovesje in entropijo se nam odpre, če raziščemo, kaj se z našim idealiziranim sistemom, plinom v posodi (slika 14.1), dogaja na molekularnem nivoju.

Molekule plina v posodi zaradi svojega termičnega gibanja tavajo naokoli in čeprav so

na začetku vse v enem kotu, slej ko prej zapolnijo ves dostopen prostor. Ker po prostoru tavajo povsem naključno, v dolgem času za vsako molekulo velja, da je v povprečju pol časa na eni strani posode, pol časa pa na drugi strani. Če bi imeli v posodi le eno molekulo, bi bila desna polovica posode polovico časa prazna, polovico časa pa polna. Zanimivo postane, ko v posodo dodajamo več molekul. Spodnja slika prikazuje vse možne mikroskopske razporeditve molekul plina pri različnih številih molekul v posodi (od $N = 1$ do $N = 4$, molekule označujemo z a, b, c in d).



V idealnem plinu se vsaka molekula giblje povsem naključno in neodvisno od ostalih, zato so vse razporeditve mikroskopske enako verjetne. Pri dveh molekulah v posodi so možne razporeditve štiri, desna stran posode pa je popolnoma prazna v $1/4$ vseh možnih razporeditev oz. eno četrtno časa. Pri $N = 3$ je desna stran posode prazna v $1/8$, pri $N = 4$ pa le še v $1/16$ vseh možnih razporeditev. Vidimo, da so v sistemu z N molekulami vse molekule hkrati na na levi strani posode v povprečju $1/2^N$ časa. Ker je N v termodinamskih sistemih zelo velik, je jasno, da se v praksi molekule ne bodo nikoli vse hkrati znašle na levi strani posode (za vajo lahko izračunate delež časa, ko so v sistemu z 1000 molekulami vse molekule hkrati na levi strani sistema? Koliko sekund bi bile vse hkrati na levi strani, če bi jih opazovali vso starost vesolja, ki je približno $4 \cdot 10^{17}$ s?).

Pogled na različne mikroskopske razporeditve molekul po prostoru nam tudi razkrije, da je največ razporeditev ravno takih, pri katerih je polovica molekul na eni, polovica pa na drugi strani posode (pri velikem številu molekul je vseh ostalih stanj zanemarljivo malo). Ravnovesno stanje je torej ravno tisto makroskopsko stanje sistema, ki je najverjetnejše! Čeprav se mikroskopska slika sistema neprestano spreminja, saj posamezne molekule potujejo sem ter tja, bo sistem večino časa preživel v mikroskopskih stanjih, ki ustrezajo ravnovesnemu makroskopskemu stanju, se pravi stanju s polovico molekul na eni in polovico molekul na drugi strani. Če bi bili zelo natančni, bi sicer opazili, da je tudi v ravnovesju vsake toliko kakšna molekula več na eni kot na drugi strani posode, a so ta nihanja (fluktuacije) okoli ravnovesja v velikih sistemih zelo majhna (pokazati je mogoče, da so relativna povprečna odstopanja od ravnovesja obratno sorazmerna kvadratnemu korenu števila delcev v sistemu, $1/\sqrt{N}$).

Povezavo med verjetnostjo nekega makroskopskega stanja in ravnovesjem sistema je v drugi polovici 19. stoletja odkril Ludwig Boltzmann. Ugotovil je tudi, da je možno

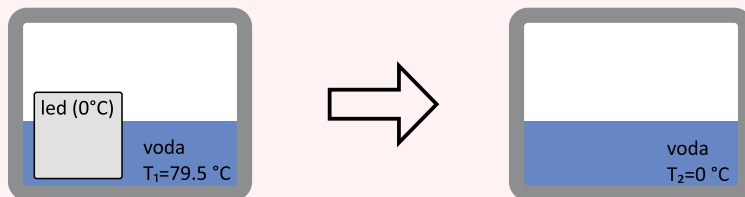
vpeljati količino, ki je dobra mera za zgoraj opisane lastnosti termodinamskih sistemov. Ta količina je ravno *entropija* in jo po Boltzmannu zapišemo z znamenito enačbo:

$$S = k_B \ln \Omega \quad (14.5)$$

kjer je s S označena entropija sistema, k_B je Boltzmannova konstanta, Ω pa je število različnih mikroskopskih stanj, ki ustrezajo danemu makroskopskemu stanju sistema. Boltzmannova enačba za entropijo (En. 14.5) je sicer elegantna, a si je Ω težko predstavljati, kaj šele z njo računati. Enačbo smo napisali zgolj zato, ker je ena najbolj enostavnih formulacij entropije, v praksi pa z njo ne bomo računali. Po drugi strani lahko skozi Boltzmannovo enačbo vidimo eno pomembnejših lastnosti entropije: entropija je ena od lastnosti makroskopskega sistema, dva sistema, ki sta enaka, imata torej tudi enako entropijo. Če se sistem spreminja, je sprememba entropije odvisna le od njegovega začetnega in končnega stanja, ne pa od poti, po kateri se je sistem spremenil.

Primer 14.2: sprememba entropije pri izmenjevanju toplote

Za vajo si na preprostem primeru pogledimo, kako izračunati spremembe entropije sistema pri izmenjevanju toplote, npr., ko v izolirani posodi zmešamo 100 g ledu s temperaturo 0°C z 100 g vode s temperaturo $79,5^\circ\text{C}$ (količine smo izbrali tako, da se bo pri tem procesu stopil ravno ves led, končna temperatura v posodi pa bo 0°C).



Za začetek si moramo opisati, kaj se med procesom dogaja: toplota bo prehajala iz vroče vode v led, voda se bo pri tem ohlajala, led pa se bo stalil. V ravnovesju ob koncu procesa bo povsod v posodi enaka temperatura.

Najprej pogledimo, kaj se med procesom dogaja s toploto. Posoda izolirana, zato se z okolico ne izmenjala nič toplote. Toplota, ki jo prejme led, je zato enaka toploti, ki jo odda vroča voda:

$$Q_{led} = Q_{voda}$$

Toplota, ki jo prejme led, da se stali, je

$$Q_{led} = m_{led} q_t = 0,1 \text{ kg} \cdot 334 \text{ kJ/kg} = 33,4 \text{ kJ} ,$$

toplota, ki jo odda vroča voda, da se ohladi na 0°C , pa je

$$Q_{voda} = m_{voda} c \Delta T = \frac{0,1 \text{ kg}}{\text{kg K}} \frac{4,2 \text{ kJ}}{\text{kg K}} \frac{79,5 \text{ K}}{\text{K}} = 33,4 \text{ kJ}$$

Vidimo, da sta obe toploti enaki in je zato končna ravnovesna temperatura mešanice zares 0°C (natanko vsa toplota, ki jo je oddala voda, se je porabila za taljenje ledu). Sedaj si pogledajmo še, kaj se med procesom dogaja z entropijo. Posoda je izolirana in z okolico ne izmenjuje toplote ($Q = 0$), proces pa je neobrnjiv (voda z 0°C se nikoli spontano ne razdeli v led in vročo vodo), zato velja (en. 14.4):

$$\Delta S > \frac{Q}{T} = 0.$$

Skladno z drugim zakonom termodinamike se pri spontanem procesu v izoliranem sistemu entropija poveča, a s pomočjo neenačbe žal ne moremo izračunati, kolikšno je to povečanje. Pomagamo si tako, da najdemo obrnljivo pot, ki vodi iz začetnega v končno stanje. V našem primeru je najpreprostejša obrnljiva pot naslednja: led počasi stalimo, vročo vodo pa počasi ohladimo na 0°C (oba procesa sta obrnljiva, saj sta obratna procesa, počasno zmrzovanje in počasno segrevanje vode, potekata preko enakih stanj in sta prav tako mogoča). Končno stanje je enako kot v našem primeru, t.j. dobimo skupno 200 g vode pri 0°C . Celotna sprememba entropije v posodi bo torej enaka vsoti spremembe entropije ledu pri taljenju ter spremembe entropije pri ohlajanju vroče vode:

$$\Delta S = \Delta S_{led} + \Delta S_{voda}.$$

Počasno obrnljivo taljenje ledu poteka pri stalni temperaturi, zato lahko spremembo entropije pri tem procesu izračunamo tako, da v en. 14.1 vstavimo toplote, ki jo je led sprejel

$$\Delta S_{led} = \frac{Q_{led}}{T} = \frac{33,4 \text{ kJ}}{273 \text{ K}} = 122 \text{ J/K}.$$

Led je toploto sprejel, zato se mu je entropija seveda povečala. Entropijo vode je težje izračunati, saj se temperatura vode med njenim ohlajanjem neprestano spreminja zato ne moremo uporabiti enačbe 14.1 ampak si moramo pomagati z integralom (sešteti moramo majhne deleže toplote dQ_{voda} , ki jih je voda oddala pri različnih temperaturah od $T_1 = 352,5 \text{ K}$ do $T_2 = 273 \text{ K}$):

$$\begin{aligned} \Delta S_{voda} &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ_{voda}}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m_{voda} c dT}{T} = m_{voda} c (\ln T_2 - \ln T_1) = \\ &= m_{voda} c \ln \frac{T_2}{T_1} = 0,1 \text{ kg} \cdot 4200 \text{ J/kgK} \cdot \ln \frac{273 \text{ K}}{352,5 \text{ K}} = -107 \text{ J/K}. \end{aligned}$$

pri čemer smo v drugem koraku zgornjega računa upoštevali, da je majhen delež toplote, ki jo voda odda pri določeni temperaturi, sorazmeren majhni spremembi temperature: $dQ_{voda} = m_{voda} c dT$. Rezultat zgornjega računa se sklada z našo predstavo o entropiji: voda je toploto oddala in zato se ji je entropija zmanjšala. Celotna sprememba entropije v posodi je torej:

$$\Delta S = \Delta S_{led} + \Delta S_{voda} = 122 \text{ J/K} - 107 \text{ J/K} = 15 \text{ J/K}.$$

Čeprav je voda oddala toliko toplote, kot je je led sprejel, je voda toploto oddajala pri višji temperaturi kot jo je led sprejemal, zato se ji je entropija zmanjšala manj, kot se je ledu povečala. Celotno povečanje entropije v posodi je zato v skladu z drugim zakonom termodinamike pozitivno

Poglavje 15

Osnove termodinamike fizioloških procesov

Drugi zakon termodinamike nam lahko neposredno razloži in napove obnašanje izoliranih sistemov, t.j., kako se bodo spreminjali (proti večji entropiji) in kdaj bodo dosegli ravnovesje (ko bo entropija dosegla največjo možno vrednost). A živa bitja niti približno nismo izolirani sistemi, prav nasprotno, ponavadi živimo v toplotnem stiku z okolico pri dani temperaturi. Kako nam lahko torej drugi zakon termodinamike pomaga pri razumevanju procesov v naših pogojih, se pravi v neizoliranih sistemih pri danem tlaku in temperaturi?

V zadnjem poglavju termodinamike bomo počasi začeli graditi most med fiziko in biologijo ter končno spoznali, kako lahko prvi in drugi zakon termodinamike združimo in uporabimo za razumevanje biokemijskih in fizioloških procesov. V ta namen bomo morali najprej vpeljati novi abstraktni količini *prosto entalpijo* in z njo povezan *kemijski potencial*. Nato si bomo pogumno in skozi preproste primere poskusili o njiju privzgojiti osnovno intuicijo ter ju na koncu uporabili za razlago nekaterih fiziološko pomembnih pojavov, kot so osmozni tlak, hlapenje vode in raztapljanje plinov.

15.1 Prosta entalpija in ravnovesje pri fizioloških pogojih

Vprašanje, kako si drugim zakonom termodinamike pomagati pri fizioloških pogojih, t.j. pri danem tlaku in dani temperaturi, je v drugi polovici 19. stoletja razvozlal ameriški znanstvenik Josiah Willard Gibbs. Ugotovil je, da je za ob-

našanje takih sistemov merodajna količina, ki povezuje entalpijo in entropijo. To količino imenujemo *prosta entalpija*¹ in jo definiramo kot

$$G = H - TS, \quad (15.1)$$

kjer je prosta entalpija označena z G , H je entalpija sistema, S entropija sistema, T pa temperatura sistema. Ker so H , T in S funkcije stanja sistema, enako velja tudi za G .

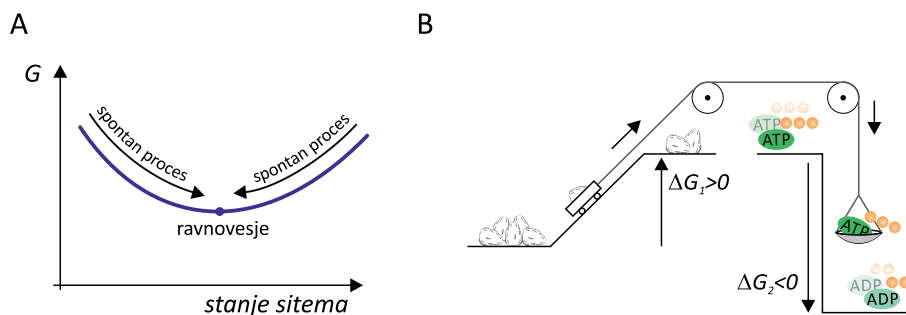
Uporabnost proste entalpije se nam razjasni, ko izračunamo njeno spremembo za spontane procese. Pri danem tlaku in temperaturi, je sprememba proste entalpije odvisna le od spremembe entalpije in entropije, $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$. Ker je sprememba entalpije enaka toploti, hkrati pa za spontane procese velja $\Delta S > Q/T$ (en. 14.4), se lahko pri spontanah procesih prosta entalpija le manjša,

$$\Delta G < 0, \quad (15.2)$$

Če je nek sistem prepuščen sam sebi, bodo lahko v njem spontano stekli le taki procesi, pri katerih se bo prosta entalpija sistema zmanjšala. Ko se prosta entalpija ne bo več mogla manjšati, bo sistem dosegel ravnovesje (slika 15.1A). Pri razdelitvi reakcij glede na spremembo entalpije smo srečali endo- in ekso-termne reakcije, analogno pa pri prosti entalpiji govorimo o *endergonskih* ($\Delta G > 0$) in *eksergonskih* ($\Delta G < 0$) reakcijah.

Pazljivi bralec že razmišlja o osrednjem vprašanju biokemije: če lahko spontano stečejo le eksergonski procesi, kako se lahko potem sploh zgodijo tudi endergonski procesi? Odgovor na to vprašanje nas pripelje v samo v osrčje skrivnosti življenja: vsa zanimiva raznolikost narave okoli nas je namreč mogoča, ker je evolucija iznašla načine, kako sicer endergonske procese sklopiti z zelo eksergonskimi. Celotna sprememba proste entalpije sklopljenega procesa je na koncu še vedno negativna in torej "spontano" mogoča po vseh strogih zakonih termodinamike. V biokemiji je ena takih sklopitev sklopitev s hidrolizo ATP, ki je zelo eksergonska reakcija (slika 15.1B). Dvig šolske torbe s tal na mizo je npr. očiten endergonski proces (torba spontano nikoli ne skoči s tal na mizo), ki pa se vseeno zgodi, ko torbo primemo z roko in jo dvignemo na mizo. Ko šolsko torbo dvignemo s tal, se torbi sicer poveča prosta entalpija, a hkrati se sprosti še veliko več proste entalpije s hidrolizo ATP v

¹V tuji literaturi prosto entalpijo včasih imenujejo tudi *Gibbs energy* ali kar *free energy*.

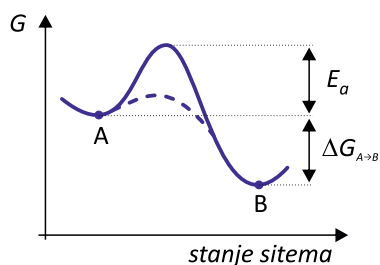


Slika 15.1: **A)** Prosta entalpija (G) je količina, ki usmerja fiziološke in biokemijske procese pri dani temperaturi in danem tlaku. Spontano lahko potečejo le procesi, pri katerih se prosta entalpija sistema manjša (t.i. *eksergonski procesi*, $\Delta G < 0$), ne pa tudi procesi pri katerih se prosta entalpija večja (t.i. *endergonski procesi*, $\Delta G > 0$). Proces v sistemu potekajo toliko časa, dokler prosta entalpija ne doseže najmanjše možne vrednosti. Takrat sistem doseže ravnovesje. **B)** Endergonski procesi lahko stečejo le, če so sklopljeni z zelo eksergonskim procesom in sicer tako, da je celotna sprememba proste entalpije sistema negativna ($\Delta G_1 + \Delta G_2 < 0$). Hidroliza ATP je tipičen eksergonski proces, ki poganja endergonske procese v živih bitjih.

naših mišicah, tako da je celotna sprememba proste entalpije sistema pri tem negativna in proces se lahko zgodi.

Prosta entalpija ima za termodinamske sisteme pri danem tlaku in temperaturi podobno vlogo, kot jo ima potencialna energija v mehanskih sistemih, zato pravimo, da je prosta entalpija *termodinamski potencial*. To analogijo si je vredno zapomniti, saj nam olajša predstavo o marsikaterem zapletenem termodinamskem procesu. Podobno kot kroglica na klancu, se lahko npr. tudi termodinamski sistem znajde v lokalnem ravnovesju, ki ga od stanja s še nižjo prosto entalpijo loči visoka energijska prepreka (slika 15.2B), ki je z naključnim termičnim gibanjem ne more enostavno preskočiti. Skozi evolucijo je narava za take situacije razvila celo vrsto encimov, ki lahko biokemijske reakcije kljub visoki energijski prepreki popeljejo v globalni minimum proste entalpije (predstavljamo si lahko npr. da reakcijo popeljejo po poti okoli visoke prepreke).

Opisani mehanizem je eden glavnih mehanizmov regulacije biokemijskih reakcij. Če bi bila za potek kemijske reakcije pomembna le razlika med začetno in končno prosto entalpijo, bi nam ATP spontano takoj hidroliziral v ADP, ki ima manjšo prosto entalpijo in je zato bolj stabilen. K sreči pa je med ATP in ADP visoka energijska prepreka, ki je brez ustreznih encimov ne moremo



Slika 15.2: Potrebni pogoj, da lahko pri dani temperaturi in danem tlaku steče nek proces je, da je na koncu prosta entalpija nižja kot na začetku. V ravnovesju ima prosta entalpija najmanjšo možno vrednost. Podobno kot mehanski sistem, se lahko tudi termodinamski sistem ujame v lokalnem minimumu (točka A) kjer jo od globalnega minimuma (točka B) loči visoka energijska prepreka. Čeprav je proces $A \rightarrow B$ s stališča proste entalpije možen ($\Delta G_{A \rightarrow B} < 0$), pa zaradi visoke energijske prepreke ne more steči. Energijsko prepreko za kemijske reakcije imenujemo tudi reakcijska aktivacijska energija (E_a) in smo jo srečali že v uvodnem poglavju pri Arrheniusovi enačbi. Proces lahko vseeno steče, če sistemu dodamo encim, ki $\Delta G_{A \rightarrow B}$ sicer ne spremeni, a zna proces do minimuma pripeljati po drugi, ugodnejši poti mimo energijske prepreke (črtkana črta).

prečiti. ATP je tako zelo uporabna "zaloga" energije, katere porabo lahko z encimi dobro nadzorujemo. V splošnem torej velja, da je prosta entalpija količina, ki pove, katere spremembe so spontano sploh mogoče, ne pa tudi kako hitro lahko spremembe potekajo in kako hitro ravnovesje dosežemo. Hitrosti reakcij opisuje kemijska kinetika, katere opis pa bomo prepustili biokemiji.

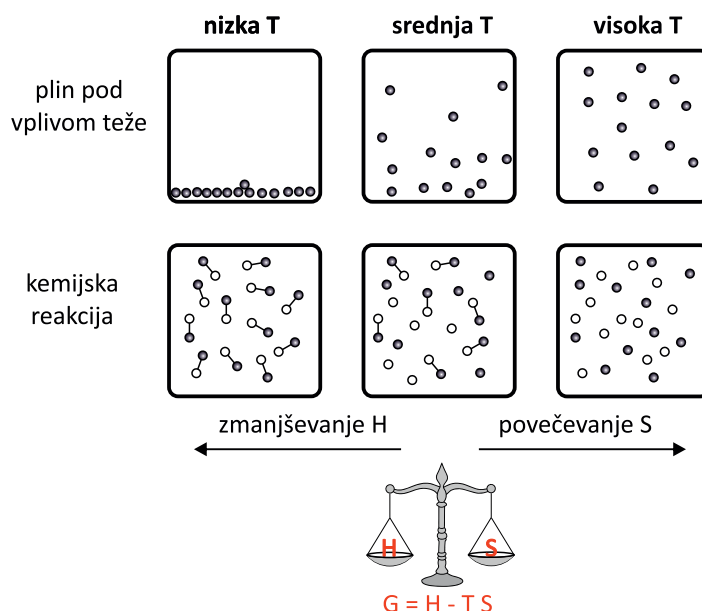
Omenimo naj še, da za sisteme pri dani prostornini (in torej ne pri danem tlaku) prosta entalpija ni uporabna količina in vlogo termodinamskega potenciala prevzame t.i. *prosta energija*, v kateri namesto entalpije nastopa notranja energija ($F = W_n - TS$). V biologiji takih sistemov in tudi proste energije ne bomo srečali prav pogosto.

Čeprav je prosta entalpija na prvi pogled zelo abstraktna količina, pa se v njenem zapisu skriva ključ za preprosto intuitivno razumevanje marsikaterega naravnega procesa. Iz enačbe 15.1 namreč vidimo, da je ravnovesje sistema (minimum proste entalpije) pogojeno z ravnotežjem med energijskimi (entalpijskimi) in entropijskimi efekti. Po eni strani konservativne sile sistem ne prestando vlečejo proti čim manjši energiji (entalpiji), po drugi strani pa zaradi termičnega gibanja sistem teži proti stanju s čim večjo entropijo. Temperatura sistema določa, kateri efekti prevladajo. Pri nizki temperaturi prevladajo energijski efekti (člen z entropijo TS bo zelo majhen v primerjavi s H), pri vi-

soki pa entropijski (člen TS k celotni prosti entalpiji v tem primeru prispeva mnogo več kot H).

Vse nam bo bolj jasno, če si ogledamo preprost primer, npr. obnašanje molekul plina pod vplivom teže (slika 15.3). Če bi bila temperatura zelo nizka, bi se termično gibanje molekul ustavilo in vse molekule bi pod vplivom teže padle na tla. V tem stanju bi imel sistem sicer zelo majhno entropijo, a bi bilo to zaradi nizke temperature nepomembno, zato bi bilo ravnovesno stanje določeno z minimumom potencialne energije oz. entalpije. Če bi bila po drugi strani temperatura zelo visoka, bi bilo močno tudi termično gibanje molekul in v ravnovesju bi bile molekule razmetane po vsem prostoru. Pri visoki temperaturi bi bilo ravnovesje torej pogojeno z entropijo, entalpija pa za ravnovesje sistema ne bi bila pomembna, saj bi bila zanemarljivo majhna v primerjavi s produktom TS . Pri normalnih temperaturah ne prevladajo ne energijski, ne entropijski efekti in je ravnovesje nekje med obema ekstremoma. Molekule plina so sicer razmetane po vsem prostoru, a je njihova gostota pri tleh vseeno malo večja kot zgoraj (več o tem še kasneje, ko bomo ta primer obravnavali tudi kvantitativno).

Podobna situacija je pri preprostih kemijskih reakcijah. Ustvarjanje vezi med sestavnimi deli v nekem sistemu je vedno eksotermni proces, se pravi, da je entalpija vezanih sestavnih delov manjša kot entalpija nevezanih. Po drugi strani je tudi entropija vezanih sestavnih delov manjša kot entropija nevezanih delov. Pri nizkih temperaturah entropija sistema za ravnovesje ni tako pomembna in bo sistem v stanju, ko je večina sestavnih delov vezanih. Z zviševanjem temperature pa se bo sistem približeval stanju z največjo entropijo, to je stanju, ko so sestavni deli v nevezanem stanju. V praksi je ravnovesje nekje vmes med obema ekstremoma.



Slika 15.3: Shematičen prikaz vpliva temperature na ravnovesno stanje sistema. Ravnovesje je pogojeno z minimumom proste entalpije t.j. z ravnotežjem med željo po čim manjši entalpiji (oz. energiji) in želji po čim večji entropiji. Pri nizkih temperaturah prevladuje prva, pri visokih druga. Zgornje slike shematično prikazujejo ravnovesje molekul plina pod vplivom teže. Pri nizki temperaturi je sistem v stanju z najnižjo potencialno energijo – vse molekule so pri tleh. Pri visokih temperaturah je sistem v stanju z največjo entropijo – molekule so enakomerno razmetane po vsem prostoru. Pri vmesnih temperaturah je ravnovesje nekje med obema ekstremoma. Z višanjem temperature se ravnovesje sistema premika proti desnemu ekstremu, z nižanjem temperature pa proti levemu. Spodnje slike shematično prikazujejo ravnovesje pri preprostih kemijskih reakcijah. Pri nizkih temperaturah entropija sistema ni pomembna in je sistem v stanju z najmanjšo entalpijo – molekule so povezane z vezmi. Z zviševanjem temperature postaja entropijski člen v prosti entalpiji vse bolj pomemben, večja se termično gibanje molekul, vezi se trgajo in ravnovesje se premika proti stanju z največjo entropijo, v katerem so vse vezi potrpane. V praksi je ravnovesje nekje med obema ekstremoma in je del molekul povezanih z vezmi, del pa je prostih.

V tem poglavju smo spoznali eno od najbolj fundamentalnih lastnosti narave: pri dani temperaturi in danem tlaku se sistemi spontano spreminjajo le v smer proti nižji prosti entalpiji in pri tem iščejo ravnotežje med čim manjšo entalpijo in čim večjo entropijo. V nadaljevanju bomo spoznali še nekaj dodatnih trikov, ki nam bodo pomagali pri kvantitativnem razumevanju konkretnih primerov.

15.2 Kemijski potencial in prehajanje snovi med različnimi stanji

Pogosto je snov v sistemu lahko v različnih stanjih oz. fazah. Ko npr. v pljuča vdihnemo zrak, se kisik razporedi tako, da ga je nekaj v zraku, nekaj pa se ga raztopi v kri. Tudi voda v pljučih je delno v tekočem stanju v tkivih, delno pa v plinastem stanju v zraku. Podobno se pri vsaki biokemijski reakciji kemijskih elementi iz ene spojine preuredijo v drugo (v jeziku termodinamike pravimo, da gredo iz enega stanja v drugega). Kot vse procese, tudi te nadzoruje prosta entalpija, ki se pri spontanah spremembah znižuje, v ravnovesju pa doseže najmanjšo možno vrednost.

Opisovanje prehajanja snovi iz enega stanja v drugega nam zelo olajša koncept *kemijskega potenciala*, ki opisuje prosto entalpijo na mol snovi. Kemijski potencial uvedemo podobno, kot druge "specifične" količine, npr. gostoto snovi. Če ima n molov neke snovi prosto entalpijo G , potem ima snov kemijski potencial

$$\mu = \frac{G}{n} = \overline{H} - T\overline{S} \quad (15.3)$$

kjer smo s črto označili molarne vrednosti entalpije in entropije (entalpijo na mol snovi in entropijo na mol snovi). Kemijski potencial ima torej enoto kJ/mol (opozorimo naj, da so definicije pri biokemiji včasih malo drugačne kot pri fiziki, primer 15.1).

Če je v nekem sistemu snov v dveh stanjih, lahko celotno prosto entalpijo sistema zapišemo kot vsoto proste entalpije snovi v prvem stanju in vsoto proste entalpije v drugem stanju, $G = \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2$. Obnašanje takega sistema lahko analiziramo, če izračunamo, kako se spremeni njegova prosta entalpija, če Δn molov snovi preide iz prvega v drugo stanje. V tem primeru se bo količina snovi v prvem stanju zmanjšala za Δn , količina snovi v drugem stanju pa ustrezno povečala. Spremembo proste entalpije celotnega sistema lahko tako

zapišemo kot:

$$\Delta G = \Delta G_1 + \Delta G_2 = -\Delta n\mu_1 + \Delta n\mu_2 = \Delta n(\mu_2 - \mu_1) \quad (15.4)$$

Prehod snovi iz prvega v drugo stanje se bo spontano zgodila le, če bo sprememba proste entalpije negativna. Iz zgornje enačbe vidimo, da bo sprememba proste entalpije negativna, če bo kemijski potencial v drugem stanju manjši kot v prvem stanju. Ugotovitev lahko strnemo v naslednjo zakonitost: snov spontano prehaja iz stanja z višjim kemijskim potencialom v stanje z nižjim kemijskim potencialom. Če sta kemijska potenciala v obeh stanjih enaka, je sistem v ravnovesnem stanju. Kisik oz. katerikoli plin se bo npr. v krvi raztapljal le, če je njegov kemijski potencial v raztopini manjši kot v zraku, v nasprotnem primeru pa se bo iz krvi izločal.

Primer 15.1: enote za energijo v biokemiji

Pri fiziki smo navajeni, da je energija ekstenzivna količina, zato imata v fiziki H in G enoto J. Drugače je pri biokemiji, kjer energijo ponavadi izražajo na mol snovi in je torej intenzivna količina. Pri biokemiji imata H in G zato ponavadi enoto kJ/mol in sta pravzaprav povezani z našima molarno entalpijo in kemijskim potencialom. Primer: osrednji pojem pri opisovanju biokemijskih reakcij je sprememba standardne proste entalpije reakcije $\Delta G^{0'}$ (kot boste spoznali kasneje je ta količina neposredno povezana s ravnotežno konstanto reakcije pri standardnih pogojih). V našem jeziku je sprememba standardne proste entalpije reakcije enaka razliki kemijskih potencialov produktov in reaktantov pri standardnih pogojih.

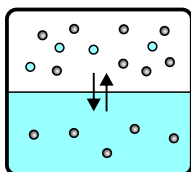
$$\Delta G^{0'} = \mu_0 \text{ produkti} - \mu_0 \text{ reaktanti}$$

Pri standardnih pogojih (t.j. če zmešamo 1 M raztopine reaktantov in produktov) bo reakcija stekla v smer produktov, če bo kemijski potencial produktov manjši kot kemijskih potencial reaktantov oz. če bo $\Delta G^{0'} < 0$.

15.3 Kemijski potencial plinov in raztopin

Živa bitja smo v prvem približku "vreče, napolnjene z vodno raztopino," zato je dobro poznavanje termodinamike raztopin nujno za razumevanje mnogih fizioloških procesov. Preden si v prihodnjih poglavjih razložimo procese kot so osmotski tlak ali raztapljanje plinov, na raztopine pogledimo s stališča proste entalpije in kemijskega potenciala. Slika 15.4 shematično predstavlja tipičen sistem z raztopino: v vodi je raztopljen topljenec, oba pa sta v stiku z zrakom. Molekule vode lahko prehajajo iz zraka v raztopino, zato bo v ravnovesju kemijskih potencial vode v zraku enak kemijskemu potencialu vode v raztopini.

Če je topjenec hlapljiv (taki so npr. vsi plini), lahko tudi topjenec prehaja med vodo in zrakom in bo v ravnovesju tudi kemijski potencial topljenca v zraku in v raztopini enak (pozor: za ravnovesje ni potrebno, da je kemijski potencial vode enak kemijskemu potencialu topljenca, ampak le da je za vsako posamezno snov enak v obeh stanjih). Če kemijski potencial ene od snovi ni enak v obeh oblikah, sistem ne bo v ravnovesju in bo snov prehajala iz višjega na nižji kemijski potencial.



Slika 15.4: Fiziološki sistemi so pogosto v stiku z zrakom, zato lahko v njih voda in topjenci prehajajo med zrakom in raztopino. Prehajanje vsake od snovi je odvisno od razlike med kemijskih potencialom te snovi v zraku in raztopini. Snov prehaja v smer proti nižjemu potencialu, če pa sta oba potenciala enaka, je snov v ravnovesju.

Pri oceni kemijskega potenciala se moramo spomniti njegove definicije (en. 15.3): kemijski potencial neke snovi bo tem manjši, čim manjša bo molarna entalpija snovi in čim večja bo molarna entropija snovi. Entropija bo tem večja, čim bolj bo snov razurejena, pri razmisleku o entalpiji pa se moramo spet spomniti njene definicije (en. 13.10) in jo prepisati v molarno obliko: $\bar{H} = \bar{W}_n + p\bar{V}$, kjer je $\bar{V}$ prostornina enega mola snovi. Entalpija bo torej v splošnem tem manjša, čim več vezi s sosedami tvorijo molekule, čim manjšo potencialno energijo zaradi zunanjih sil imajo (npr. gravitacijsko ali energijo v zunanjem električnem polju) in čim manjši je produkt $p\bar{V}$.

Zgornje ugotovitve poskusimo še podrobneje razčleniti. Pri tem bomo predpostavili, da je snov v zraku idealni plin, raztopina pa je idealna razredčena raztopina. Podobno kot pri gravitacijskem potencialu so tudi pri kemijskem relevantne le spremembe potenciala oz. razlike do standardnega stanja, ki ga bomo označili z indeksom 0. Opisali bom štiri glavne prispevke h kemijskem potencialu v raztopinah, trije bodo entalpijski, eden pa entropijski:

1. Vezi med molekulami (entalpijski prispevek)

Začnimo z najbolj osnovnim razlogom za prehajanje snovi med stanji: ustvarjanje vezi med molekulami. Več kot ima molekula vezi s sosedami, bolj energijsko je to zanjo ugodno. V razredčenih raztopinah se molekule topjenca

med seboj praktično nikoli ne srečajo, zato so v takih raztopinah v prvi vrsti pomembne vezi med topljencem in vodo. Čim močnejše vezi z vodo lahko ustvari neka snov, tem bolj je *hidrofilna*, in obratno, če neka snov z vodo ne tvori vezi, pravimo da je *hidrofobna*.

Razliko molarne entalpije med vezanim in nevezanim stanjem označimo z $\Delta \bar{H}_v$. Čim bolj je neka snov hidrofilna, tem bolj negativna je ta razlika. Pri hidrofobnih snoveh je ta razlika lahko celo pozitivna, saj se zaradi prisotnosti hidrofobne molekule prekinejo vezi med molekulami vode, zaradi česar je prehajanje molekul v vodo energijsko neugodno.

Enako kot za molekule topljenca velja seveda za molekule vode, ki so tudi "hidrofilne." Razliko entalpij v vezanem in nevezanem stanju smo pri vodi že srečali - povezana je namreč z izparilno toploto vode: $\Delta \bar{H} = M_{H_2O} q_i$. Vezavna entalpija je pogosto odvisna od temperature, a ta odvisnost v splošnem ni enostavna, zato se ji tu ne bomo imeli časa posvetiti.

2. Potencialne energije molekul (entalpijski prispevek)

Drugi vpliv na kemijski potencial snovi je vpliv potencialnih energij, ki jih imajo molekule zaradi zunanjih potencialov, npr. gravitacijskega potenciala (pri fizioloških procesih tega ponavadi ni treba upoštevati, saj so vsi deli sistema na praktično enaki višini) ali električnega potenciala (tega moramo nujno upoštevati pri vseh elektrofizioloških procesih). Iz mehanike se spomnimo, da je gravitacijska potencialna energija enaka $W_p = mgz$. Odmik kemijskega potenciala od standardnih pogojev zaradi vpliva težnosti (molarne potencialne energije) bo torej:

$$\mu = \mu_0 + Mgz, \quad (15.5)$$

kjer je M molska masa molekul, z pa višina njihovega položaja (predpostavili smo, da je v standardnem stanju višina enaka 0). Kasneje, ko bomo obravnavali prekomembranski potencial v celicah, bomo videli, da lahko na podoben način zapišemo tudi vpliv električnega potenciala, t.j. elektrokemijski potencial.

3. Produkt $p\bar{V}$ (entalpijski prispevek)

Tretji vpliv na kemijski potencial snovi izhaja neposredno iz definicije proste entalpije, iz katere je razvidno, da je kemijski potencial snovi odvisen od produkta $p\bar{V}$. Intuitivno ta prispevek že poznamo: voda, ki je nestisljiva ($\bar{V}$ je

praktično konstanten), teče od višjega tlaka k nižjemu, saj ima pri slednjem nižji kemijskih potencial. Po drugi strani ta prispevek za idealne pline ni relevanten, saj je pri njih produkt $p\bar{V}$ pri dani temperaturi konstanten (spomnimo se plinske enačbe). Pravzaprav tega člena pogosto ni potrebno upoštevati niti pri vodi, saj je tudi tlak vode pri marsikaterem sistemu povsod enak in se produkt $p\bar{V}$ med procesi ne spreminja.

4. Entropija oz. neurejenost sistema (entropijski prispevek)

Razmislek o kemijskih potencialih v raztopinah končajmo z zapisom entropijskega dela kemijskega potenciala. Za plinasto stanje smo že pokazali, da so spremembe entropije pri dani temperaturi odvisne od logaritma tlaka (en. 14.3). Entropijski del kemijskega potenciala dobimo, če spremembo molarne entropije pomnožimo s temperaturo. Odmik entropijskega dela kemijskega potenciala plina od standardnih pogojev bo torej enak

$$\mu_{\text{plin}} = \mu_0 + RT \ln \frac{p}{p_0}, \quad (15.6)$$

Za topljence v vodi entropije sicer nismo izračunali, a intuicija nam pravi, da je njihova neurejenost tem večja, čim bolj so molekule razmetane po vodi oz. z drugimi besedami, čim manjša je koncentracija snovi. Izkaže se, da je izraz za entropijo topljencev v idealnih razredčenih raztopinah podoben kot za entropijo idealnih plinov, le da je potrebno tlak zamenjati s koncentracijo. Entropijski člen za kemijski potencial topljenca v vodi pri dani temperaturi je torej:

$$\mu_{\text{topljenec}} = \mu_0 + RT \ln \frac{c}{c_0}, \quad (15.7)$$

pri čemer smo z indeksom 0 spet označili standardne pogoje.

Na koncu moramo razmisliti še o entropiji topila, t.j. vode. Za začetek spet sledimo intuiciji: več kot bo v vodi raztopljenih snovi, bolj bodo molekule vode razurejene. Pričakujemo torej, da bo kemijski potencial vode tem manjši, čim večja bo koncentracija topljenca. Daljši račun pokaže, da lahko entropijski prispevek h kemijskem potencialu vode pri dani temperaturi zapišemo kot

$$\mu_{\text{H}_2\text{O}} = \mu_0 - RT\bar{V}_{\text{H}_2\text{O}} \sum c_i, \quad (15.8)$$

pri čemer smo upoštevali, da je lahko v vodi raztopljenih več različnih topljencev, katerih koncentracije smo označili s c_i . Koncentracije moramo v zgornjo enačbo vnašati v molarnih enotah (mol/l). Pri tem moramo poudariti, da je entropiji vode vseeno, kakšne vrste molekul so raztopljene v njej, pomembna je le skupna koncentracija raztopljenih delcev $\sum c_i$. Kasneje bomo videli, da je ta entropijski člen odgovoren za nekaj zanimivih lastnosti raztopin, ki pa so vse neodvisne od vrste raztopljenih molekul ampak le od njihove celotne koncentracije. Take lastnosti imenujemo *koligativne* lastnosti, prvo pa bomo spoznali že kar v naslednjem razdelku.

15.4 Osmozni tlak

Eden od osnovnih gradnikov živih bitij so celične membrane, ki celice in celične organele razmejujejo v različne funkcionalne enote. Temeljna značilnost celičnih membrane je njihova selektivna prepustnost, pri čemer so tipično mnogo bolj prepustne za vodo kot za topljence. Voda lahko tako preko membran prosto prehaja v smer proti nižjemu kemijskem potencialu, to prehajanje vode pa imenujemo *osmoza*. V prejšnjem razdelku smo ugotovili, da je kemijski potencial vode v fizioloških sistemih najbolj odvisen od skupne koncentracije topljencev v njej, t.j. od zadnjega člena v en. 15.8. Ta člen je za fiziološke procese tako pomemben, da si je njegov glavni del prislužil svoje ime - imenujemo ga *osmozni tlak* in označimo s Π :

$$\Pi = RT \sum c_i. \quad (15.9)$$

Ker je enota za koncentracijo mol na liter, lahko s pomočjo primerjave s plinsko enačbo hitro ugotovimo, da je osmozni tlak zares "tlak", saj ima isto enoto (Pa). Ker je osmozni tlak entropijskega izvora, je koligativna lastnost in njegova vrednost ni odvisna od vrste topljencev, temveč le od njihove celotne koncentracije. Še več, za entropijo je pravzaprav pomembno le, koliko "delcev" je raztopljenih, zato moramo pri snoveh, ki v vodi disociirajo upoštevati vse disociirane delce. Z namenom, da se to dejstvo poudari, so za merjenje koncentracije vseh osmotsko aktivnih delcev uvedli količino *osmolarnost* z enoto Osm. Vse bo bolj jasno z naslednjim primerom: če npr. v 1 l vode raztopimo

1 mol NaCl, bo celotna koncentracija raztopljenih delcev 2 mol/l (en mol Na⁺ in en mol Cl⁻). Osmolarnost eno molarne raztopine NaCl je torej 2 Osm.

Vpliv osmotskega tlaka je lepo viden v preprostem poskusu s cevko v obliki črke U, ki ima na sredini membrano, prepustno le za vodo (slika 15.5A). Na eno stran cevke damo raztopino, na drugo pa enako količino čiste vode. Kemijski potencial vode je nižji v raztopini, zato bo voda vdirala proti raztopini in se bo gladina raztopine začela dvigovati. Ravnovesje se bo vzpostavilo, ko bo na obeh straneh vode enak kemijski potencial. Pri opisovanju tega poskusa moramo pri kemijskem potencialu vode upoštevati entropijski člen (enačbo 15.8), pa tudi člen z $p\bar{V}$, saj se zaradi dvigovanja gladine ob membrani spreminja hidrostatski tlak. Zapišimo ravnovesno zahtevo, da je na levi in desni strani membrane enak kemijski potencial:

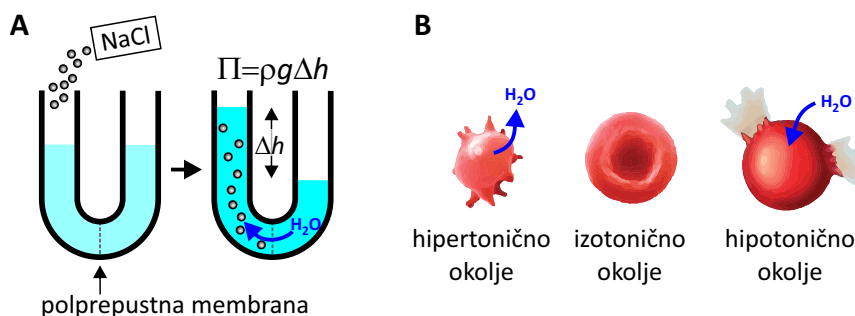
$$\mu_L = \mu_D \Rightarrow p_L \bar{V}_{\text{H}_2\text{O}} - RT \bar{V}_{\text{H}_2\text{O}} \sum c_i = p_D \bar{V}_{\text{H}_2\text{O}} .$$

Ko iz zgornje enačbe pokrajšamo molarno prostornino vode, ugotovimo, da bosta kemijska potenciala enaka natanko takrat, ko bo razlika hidrostatskih tlakov vode na levi in desni strani membrane zaradi razlike višin ($p_L - p_D = \rho g \Delta h$) ravno uravnovesila osmotski tlak. V ravnovesju bo torej veljalo: $\Pi = \rho g \Delta h$.

Osmotski tlak je glavni nadzornik prehajanja vode med predelki v tkivih in celicah. V ravnovesju morajo biti osmotski tlaki povsod enaki, v nasprotnem primeru voda prehaja v predelke z višjim osmotskim tlakom. Situacija v živih tkivih pa je mnogo bolj zapletena kot pri cevki v obliki črke U. Žive celice namreč neprestano regulirajo prepustnost membran za različne topljence, pri čemer se celice v različnih tkivih obnašajo različno. Ker k osmotskemu tlaku prispevajo le snovi, ki preko membrane ne morejo prehajati, so fiziologi za merjenje osmotskega tlaka uvedli količino *toničnost*, ki ustreza celotni koncentraciji snovi, ki ne morejo prehajati membrane.

Vpliv osmotskega tlaka je dobro viden pri rdečih krvnih celicah, ki nimajo citoskeleta in se težko upirajo spremembam toničnosti okolja (slika 15.5B). Če jih prestavimo v hipertonično okolje (t.j. okolje z manjšo koncentracijo snovi), bo voda začela uhajati iz celic in celice se bodo skrčile. Če jih po drugi strani prestavimo v hipotonično okolje (t.j. okolje z manjšo koncentracijo snovi), bo voda začela vdirati v celice, celice bodo nabrekale in v skrajnem primeru celo počile.

Toničnost je odvisna od prepustnosti celičnih membran, le ta pa v telesu ni vedno in povsod enaka. Raztopina, ki je izotonična v nekem fiziološkem okolju, zato ni nujno povsem izotonična v drugem. Na to moramo biti še posebej



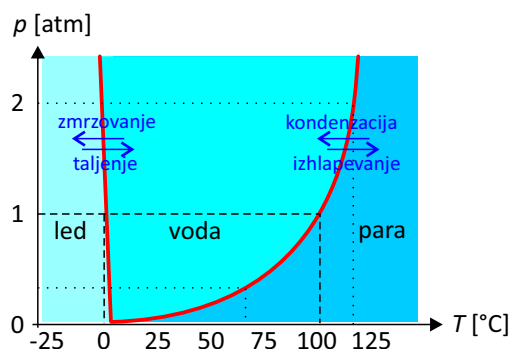
Slika 15.5: Prikaz vpliva osmotskega tlaka. Kemijski potencial vode je tem manjši, čim več je v njej raztopljenih snovi (en. 15.8), zato voda zato teče v smer proti večji koncentraciji raztopljenih snovi. **A)** Cevka v obliki črke U je na sredini predeljena z membrano, ki je prepustna le za vodo. Ko v levi krak raztopine natresemo topljenec, se bo na levi strani vodi znižal kemijski potencial, zato bo voda iz desne strani začela vdirati na levo. Ravnoesje se vzpostavi, ko je kemijski potencial vode na obeh straneh membrane enak, t.j. ko je osmotski tlak enak hidrostatskemu tlaku, do katerega pride zaradi razlike višin Δh . **B)** Celične membrane so za vodo dobro prepustne, za večino topljencev pa ne. V izotoničnem okolju je koncentracija snovi enaka kot v celici. Če celico prestavimo v hipertonično okolje (koncentracija snovi v njem je večja kot v celici), bo začela voda uhajati iz celice in celica se bo skrčila. Če celico prestavimo v hipotonično okolje (koncentracija snovi v njem je manjša kot v celici), bo voda začela vdirati v celico, celica bo začela nabrekati in lahko v skrajnem primeru celo poči.

pozorni pri nadomeščanju izgubljenih telesnih tekočin, saj morajo nadomestne tekočine poskrbeti za nadomestilo izgubljenih ionov in hranil, hkrati pa morajo imeti tudi ustrezno toničnost za določeno situacijo. Za nadomeščanje večjih izgub krvi zato ne obstaja univerzalna fiziološka raztopina, ampak je na razpolago več različnih vrst z različnimi lastnostmi. Raztopine v katerih so večinoma različni ioni imenujemo *kristaloidne raztopine*, včasih pa uporabljajo tudi t.i. *koloidne raztopine*, ki toničnost uravnavajo z različnimi makromolekulami, ki preko membran ne morejo prehajati.

15.5 Fazni diagram vode in vlažnost zraka

Vse vrste življenja na Zemlji so zelo odvisne od vode ter njenega prehajanja med agregatnimi stanji. Za človeško telo je npr. izhlapevanje vode eden glavnih mehanizmov vzdrževanja telesne temperature. Iz razprave o kemijskih

potencialih vemo, da bo pri danem tlaku in dani temperaturi voda spontano prehajala iz stanja z višjim v stanje z nižjim kemijskim potencialom, v ravnovesju pa bosta kemijska potenciala vode v obeh agregatnih stanjih enaka. Ker so interakcije med molekulami vode zelo zapletene, ne znamo napisati enostavne formule za odvisnost kemijskega potenciala vode od temperature in tlaka. To odvisnost pa si znamo razložiti na intuitivnem nivoju: višja, kot je temperatura vode, večje je termično gibanje in molekule lažje pretrgajo medsebojne vez ter preidejo v stanje z večjo neurejenostjo (pri čemer je plinasto stanje je bolj neurejeno kot tekoče, to pa je bolj neurejeno kot trdno). Tlak po drugi strani snov stiska in z višanjem tlaka postajajo bolj ugodna bolj stisnjena stanja (tu je voda posebnost med snovmi, saj je v tekočem stanju gostejša kot v trdnem).



Slika 15.6: Fazni diagram vode prikazuje meje, pri katerih lahko različna agregatna stanja vode soobstajajo v ravnovesju. Mejo med vodo in vodno paro si lahko po eni strani predstavljamo kot odvisnost temperature vrelišča od tlaka, po drugi pa kot odvisnost nasičenega delnega tlaka vodne pare v zraku od temperature. Če je delni tlak vode v zraku nižji od nasičenega, bo voda hlapela, če je višji pa bo kondenzirala. Črtni črti označujeta vrelišče pri normalnih pogojih, pikčasti pa na vrhu Mount Everesta in v ekonom loncu.

Obstojnost agregatnih stanj vode pogosto prikažemo v t.i. *faznem diagramu*, ki v prikazuje ravnovesne meje med fazami vode v odvisnosti od temperature in tlaka (slika 15.6). Mejo med vodo in vodno paro na faznem diagramu si lahko predstavljamo kot odvisnost temperature vrelišča od tlaka. Če se pri danem tlaku vode pomikamo proti višji temperaturi, bo tekoče stanje slej ko prej postalo nestabilno in voda bo zavrela ter vsa izhlapela. Pri normalnem zračnem tlaku je temperatura vrelišča znanih 100 °C, s spreminjanjem tlaka pa se ta meja precej hitro spreminja: na vrhu Mount Everesta pade na približno

70 °C, če pa je tlak višji od normalnega (npr. v ekonom loncu ali v avtoklavu), lahko voda doseže tudi višjo temperaturo - pri tlaku 2 atm je temperatura vrelišča npr. približno 120 °C.

Za fiziologijo je zanimiv še drug pogled na mejo med vodo in vodno paro. Na faznem diagramu lahko vidimo, da sta v sistemu s čisto vodo pri sobni temperaturi možni le tekoča in plinasta faza. Ravnovesje med fazama bi imeli, če bi bil tlak vode in vodne pare zelo nizek, pri 25 °C je to približno 3 kPa. Pri fizioloških pogojih je tlak seveda precej višji, a spomniti se moramo, da je ta tlak predvsem posledica tlaka drugih plinov v zraku in ne le vodne pare. Mejni tlak na diagramu si moramo torej predstavljati kot mejni delni tlak vodne pare v zraku, ki ga imenujemo tudi *nasičeni parni tlak*. Če je delni tlak vodne pare v zraku nižji od nasičenega, bo voda izhlapevala, če pa bo višji bo kondenzirala.

Za ravnovesje vode pri normalnih pogojih je torej ključno, kolikšen je delni tlak vode v zraku oz. koliko vode je v zraku. To lahko po eni strani opišemo s pojmom absolutna vlažnost, ki pove koliko mase vodne pare je v dani prostornini zraka, še bolj pogosto pa vlažnost zraka opisujemo z *relativno vlažnostjo*, ki je definirana kot razmerje med dejanskim delnim tlakom vodne pare v zraku in nasičenim parnim tlakom:

$$\eta = \frac{p}{p_{\text{nasič.}}} . \quad (15.10)$$

Voda lahko torej izhlapeva, dokler je relativna vlažnost zraka manjša od 100%. Pri normalnih pogojih je za zdravega človeka ugodna relativna vlažnost zraka nekje okoli 50%, če je vlažnost manjša, bo izhlapevanje prehitro, če bo večja (npr. v tropskih okoljih), pa s potenjem ne bomo več mogli odvajati odvečne toplote in se lahko pregrejemo.

Ker je nasičen parni tlak vode ($p_{\text{nasič.}}$) zelo odvisen od temperature (slika 15.6), je pri dani količini vode v zraku (t.j. pri danem delnem tlaku vodne pare) od temperature zelo odvisna tudi relativna vlažnost zraka - z višanjem temperature relativna vlažnost pada. To lastnost poznamo vsi očalarji, saj se nam očala zarosijo vedno, ko iz mrzlega okolja vstopimo v toplo in vlažno sobo (razmislite, kaj se zgodi v tem primeru!). Po drugi strani so s tem povezane težave s preveč suhim zrakom v zaprtih ogrevanih prostorih pozimi. Pri slednjih moramo biti še posebej pazljivi pri oskrbovanju šibkih bolnikov, ki bi se lahko z vdihavanjem preveč suhega zraka ali plinov iz jeklenke zelo hitro izsušili. V pljučih je namreč med zrakom in tkivi ogromna površina, zato voda iz tkiv hitro izhlapi, izdihani zrak pa ima praktično 100% vlažnost.

Črta med ledom in vodo na faznem diagramu prikazuje odvisnost tempe-

temperature ledišča od tlaka. Pri tej meji ni tako močne odvisnosti od tlaka in je ledišče vedno približno pri 0 °C. Zanimivost vode v primerjavi z drugimi snovmi je, da je ta meja nagnjena v levo, saj je pri višjih tlakih tekoča voda bolj stabilna od ledu (led ima manjšo gostoto od vode). Meji med ledom in vodo ter vodo in paro se stakneta v t.i. trojni točki vode, v kateri lahko soobstajajo vsa tri agregatna stanja hkrati, in leži pri temperaturi malo nad 0 °C in pri tlaku le 612 Pa.

Z našim znanjem termodinamike si lahko pojasnimo še eno pomembno lastnost vodnih raztopin. V prejšnjih poglavjih smo videli, da ima voda tem nižji kemijski potencial čim več topljencev raztopimo v njej. V primerjavi s čisto vodo imajo raztopine torej malo nižji kemijski potencial, zato so bolj stabilne in zmrznejo šele pri nižji temperaturi oz. zavrejo šele pri višji temperaturi od čiste vode. Izkaže se, da sta premika temperature ledišča in vrelišča vode v prvem približku kar sorazmerna osmotskemu tlaku vode. Fiziološka raztopina npr. zavre pri temperaturi približno 100,15 °C, zamrzne pa pri približno -0,5 °C. Morska voda je približno štirikrat bolj slana od fiziološke raztopine, zato zamrzne pri približno -2 °C. Odvisnost temperature ledišča in vrelišča od osmotskega tlaka ima tudi praktično vrednost: izkoriščajo jo *osmometri*, t.j. inštrumenti za merjenje osmolarnost raztopin.

15.6 Raztapljanje plinov

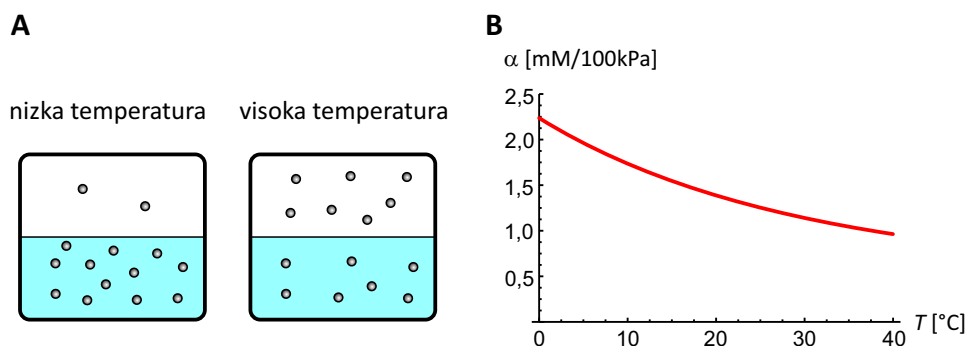
Poleg prehajanja vode med tekočim in plinastim stanjem je za fiziološke procese zelo pomembno tudi prehajanje drugih plinov med zrakom in raztopinami. Intuitivno sklepamo, da se raztopi tem več plina, čim več ga je v plinastem stanju nad raztopino. Izkaže se, da v ravnovesju za mnoge pline v prvem približku velja kar sorazmerna odvisnost koncentracije plina v raztopini od delnega tlaka plina nad raztopino:

$$c = \alpha p . \quad (15.11)$$

kjer je c molarna koncentracija plina v raztopini, p delni tlak plina nad raztopino, α pa je topnostni koeficient. Zgornja zveza se imenuje tudi *Henryjev zakon*, po angleškem kemiku Williamu Henryju, ki zakon odkril v začetku 19. stoletja (včasih ta zakon zapišejo tudi kot $p = Kc$, pri čemer se K imenuje Henryjev koeficient, $K = 1/\alpha$).

Topnostni koeficient je v prvi vrsti odvisen od razlike entalpij molekul plina v plinastem in raztopljenem stanju - čim več vezi tvorijo molekule plina z

vodo, tem raje se plin topi in večji bo topnostni koeficient. Poleg tega je topnostni koeficient odvisen tudi od temperature. Intuitivno lahko sklepamo, da se topnostni koeficient hidrofilnih plinov z višanjem temperature manjša, saj bo pri višjih temperaturah sistem težil k čim bolj neurejenemu stanju, t.j. k stanju, pri katerem so molekule čim bolj "razmetane" med zrakom in raztopino (slika 15.7A). Za mnoge pline meritve zares pokažejo tako odvisnost, za kisik je npr. odvisnost topnosti od temperature precej velika (slika 15.7B), saj se v vodi pri temperaturi 37 °C raztopi kar 30% manj kisika kot pri sobni temperaturi. Topnostni koeficienti za nekaj plinov so predstavljeni v tabeli 15.1.



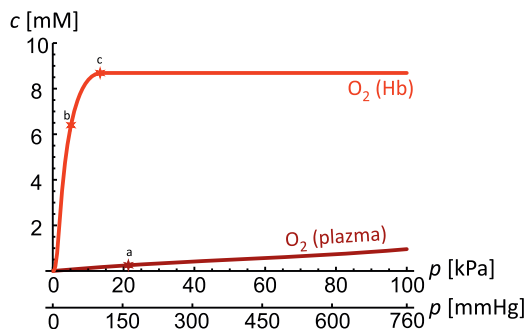
Slika 15.7: **A)** Shematični prikaz zmanjševanja topnosti plinov s temperaturo. Če lahko molekule plina z molekulami vode tvorijo vezi (se pravi, da je plin hidrofilen), je raztapljanje energijsko ugodno in pri nizki temperaturi bo raztopljeno veliko plina. Z zviševanjem temperature se večja termično gibanje, zato lahko vedno več molekul zapusti raztopino in se preseli v plinasto stanje, v katerem je entropija večja. **B)** Odvisnost topnostnega koeficienta kisika v vodi od temperature (povzeto po [12]). Koeficient se s temperaturo hitro zmanjšuje, pri telesni temperaturi se v vodi raztopi približno 30% manj kisika kot pri sobni temperaturi.

Kri je tudi vodna raztopina, zato se v njej raztapljajo vsi plini, ki so v zraku. Od teh sta za fiziologijo najbolj pomembna kisik in ogljikov dioksid, ki se izmenjujeta pri dihanju. Slika 15.8 prikazuje odvisnost koncentracije teh dveh plinov v krvi v odvisnosti od njunega delnega tlaka. Iz slike vidimo, da bi se nam pri normalnih pogojih, ko je delni tlak kisika v zraku 21 kPa, v krvi raztopilo le malo kisika. Na srečo sta tu fiziki priskočili na pomoč evolucija in biokemija, zato je glavni prenašalec kisika v krvi hemoglobin, katerega koncentracija v krvi je nekaj več kot 2 mM, vsaka molekula hemoglobina pa lahko nase veže 4 molekule kisika. Poleg tega je vezava kisika na hemoglobin ugo-

plin	O ₂	N ₂	CO ₂
α [mM/100kPa]	1,3	0,6	33

Tabela 15.1: Topnostni koeficient za tri fiziološko pomembne pline pri temperaturi 25 °C ([3]). Topnostni koeficient nam pove, koliko molarna raztopina plina bi nastala v vodi, če bi bil delni tlak plina nad raztopino enak normalnemu zračnemu tlaku (100 kPa).

dna in se hemoglobin s kisikom napolni (saturira) že pri delnem tlaku kisika približno 15 kPa (to pride še posebej prav, ker je povprečni delni tlak kisika v alveolih nekaj manjši kot v zunanjem zraku). Opozorimo naj še, da zaradi sorazmernosti med delnim tlakom plina nad raztopino in njegovo koncentracijo v raztopini, v medicini tudi vsebnost plinov v krvi pogosto merijo kar z ustreznim delnim tlakom plina oz. ponavadi kar v mmHg.



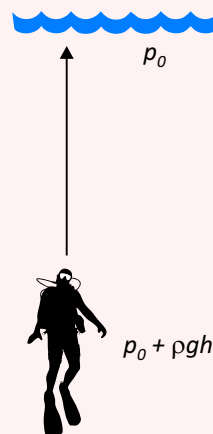
Slika 15.8: Shematični prikaz odvisnosti koncentracije raztopljenega kisika od njegovega delnega tlaka. Pri normalnem delnem tlaku kisika v zraku (približno 20 kPa, točka *a*) je v krvni plazmi raztopi le malo kisika. V krvi se praktično ves kisik prenaša vezan na hemoglobin, katerega vezavna krivulja ima značilno sigmoidno obliko, nasiči pa se že pri delnem tlaku kisika približno 15 kPa. Točki *b* in *c* označujeta delna tlaka kisika v venski krvi in alveolih, iz česar vidimo, da se koncentracija kisika v krvi v pljučih poveča za približno 2 mM. V medicini delne tlake ponavadi merijo v mmHg, zato je na sliki prikazana tudi os s to enoto.

Če je v raztopini veliko raztopljenega plina, se bo ob nenadnem padcu tlaka nad raztopino začel plin v obliki mehurčkov izločati iz raztopine. V vsakdanjem življenju ta pojav srečamo vsakič, ko odpremo steklenico z gazirano

pijačo, v medicini pa hitro izločanje plinov iz raztopine srečamo pri *dekompresijski bolezni*, do katere lahko privede nepazljivo potapljanje z jeklenko (primer 15.2).

Primer 15.2: dekompresijska bolezen

Potapljač z jeklenko diha zrak pod tlakom, ki je enak zunanjemu tlaku vode. Na veliki globini zato vdihuje zrak pod velikim tlakom, zaradi česar se mu v krvi in tkivih raztopi več plinov kot na površini. Če se potapljač na veliki globini zadržuje dalj časa, nato pa hitro izplava na površje, se mu zunanji tlak v hipu zelo zmanjša. Plini, ki so bili raztopljeni v krvi in tkivih, se zato začnejo izločati v kri v obliki mehurčkov, ki lahko zamašijo kapilare v organih in privedejo do t.i. kompresijske bolezni. Dekompresijski bolezniki se lahko izognemo s počasnim dviganjem na površje, kar omogoči, da se plini iz krvi in tkiv sprostijo počasi in jih lahko sproti izdihamo skozi pljuča.



Izračunajmo, kolikšna prostornina dušika se izloči iz 1 dl krvi, če se potapljač hitro dvigne s 40 m globine na površje!

Tlak vdihanega zraka iz jeklenke na globini 40 m je enak 500 kPa, delni tlak dušika pa je 78% le-tega. Koncentracija dušika v krvi na globini 40 m bo zato

$$c = \alpha p = 0,6 \text{ mM}/100\text{kPa} \cdot 0,78 \cdot 500 \text{ kPa} = 2,34 \text{ mM} .$$

Pri tem smo za topnost dušika vzeli kar podatek iz tabele 15.1.

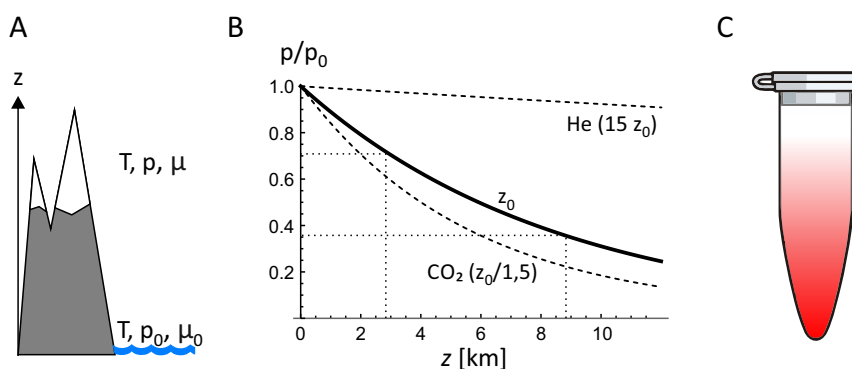
Ko se potapljač hitro vrne na površino, mu delni tlak dušika v pljučih pade na 78 kPa, koncentracija v krvi raztopljenega dušika pa je zato lahko le še

$$c = 0,6 \text{ mM}/100\text{kPa} \cdot 78 \text{ kPa} = 0,47 \text{ mM} .$$

Razlika koncentracij, 1,9 mM, se v obliki mehurčkov izloči iz krvi. Iz 1 dl krvi se torej izloči 0,19 mmol dušika. Ker so na gladini približno standardni pogoji, lahko prostornino izločenega dušika ocenimo kar iz podatka, da je prostornina enega mola plina enaka približno 22 l. Iz 1 dl krvi se torej izloči približno $22 \text{ l} \cdot 0,00019 \approx 4 \text{ ml}$ dušika.

15.7 Barometrska formula

Pri mehaniki smo v poglavju o hidrostatskem tlaku omenili, da se tlak v plinih z višino ne spreminja linearno kot v vodi, ampak eksponentno (plini so v nasprotju z vodo stisljivi). Oboroženi z znanjem termodinamike poskusimo to odvisnost tudi izračunati (kasneje bomo zelo podoben račun ponovili pri računanju elektrokemijskega potenciala in prekomembranske napetosti).



Slika 15.9: Prikaz barometrske formule. **A)** Pri gladini morja (na višini $z = 0$) je tlak plina p_0 , njegov kemijski potencial pa μ_0 . Na višini z je tlak plina p , kemijski potencial pa μ . V termodinamskem ravnovesju je kemijski potencial plina povsod enak, $\mu = \mu_0$. **B)** Po barometrski formuli pada tlak eksponentno z višino z značilno dolžino $z_0 = RT/Mg$. Za zrak pri sobni temperaturi ($M \approx 29$ g/mol in $T \approx 293$ K) je $z_0 \approx 8,5$ km. Črtkani črti označujeta tlak na Mount Everestu ($p \approx e^{-1}p_0 \approx 0,37p_0$) in na Triglavu ($p = e^{-2864/8500}p_0 \approx 0,71p_0$). Značilna dolžina z_0 bi bila pri višji temperaturi daljša, pri večji masi plina pa manjša. Graf prikazuje tudi relativno padanje tlaka za helij, ki ima približno 15 krat manjšo maso od zraka, ter za ogljikov dioksid, ki ima približno 1,5 krat večjo maso. **C)** Analogno spreminjanju zračnega tlaka v atmosferi tudi pri ultracentrifugaciji molekul v epruveti ne nastane ostra koncentracijska meja ampak eksponentna.

Predstavljajmo si idealni plin v prostoru brez vetra in pri dani temperaturi (slika 15.9A). V ravnovesju mora biti kemijski potencial plina povsod enak (če kemijski potencial plina ne bi bil povsod enak, bi molekule plina tekale k nižjemu kemijskem potencialu in sistem ne bi bil v ravnovesju). Spomnimo se, kako je kemijski potencial plina odvisen od višine (en. 15.5) ter od tlaka (en. 15.6) in zapišimo, da je kemijski potencial na višini z enak kot kemijski potencial na višini 0:

$$Mgz + RT \ln \frac{p}{p_0} = 0. \quad (15.12)$$

Pri tem prvi člen opisuje odvisnost molarne potencialne energije od višine (en. 15.5), drugi člen pa je entropijski (en. 15.6), kemijski potencial na višini 0 pa je kar 0. Ko zgornjo enačbo antilogaritmiramo, dobimo t.i. barometriško formulo, ki opisuje odvisnost tlaka zraka od višine:

$$p = p_0 e^{-Mgz/RT} = p_0 e^{-z/z_0}, \quad (15.13)$$

kjer je p_0 tlak na višini 0, $z_0 = \frac{RT}{Mg}$ pa je značilna dolžina eksponentnega padanja, ki je sorazmerna temperaturi in obratno sorazmerna molekulski masi plina, $z_0 = \frac{RT}{Mg}$ (slika 15.9B).

Obnašanje značilne dolžine je v skladu z našo intuicijo o prosti entalpiji. Sistem po eni strani teži k čim nižji energiji, po drugi k čim višji entropiji, temperatura sistema pa to ravnotežje uravnava. Pri nizki temperaturi je entropijski člen majhen v primerjavi z entalpijo in sistem bo najnižjo G dosegel v stanju s čim nižjo entalpijo. Pri visoki temperaturi bo člen TS prevladal nad H in sistem bo najnižjo G dosegel tako, da se bo premaknil proti stanju s čim večjo entropijo. Nižja, kot bo temperatura, bolj bodo torej molekule plina v prostoru »padle na tla,« oziroma krajša bo značilna dolžina z_0 . Višja, kot bo temperatura, bolj razmetane bodo molekule po vsem prostoru in daljša bo z_0 .

Značilna dolžina z_0 je obratno sorazmerna molekulski masi plina, zato je za helij približno osem krat večja kot za dušik in kisik. Molekule helija bodo pri dani temperaturi bolj razmetane po prostoru kot molekule težjih plinov. Ker parcialni tlak helija z višino pada počasneje, ga je na velikih višinah relativno več kot težjih plinov. Helij zato bolj »izpareva« iz atmosfere v vesolje, zaradi česar bomo po nekaterih ocenah v nekaj sto letih porabili vso njegovo zalogo na Zemlji.

Značilna dolžina za zrak pri sobni temperaturi je približno $z_0 = 8500$ m (slika 15.9B), kar slučajno ustreza višini Mount Everesta. V vsakdanjem življenju padanja zračnega tlaka z višino niti ne opazimo, saj je tlak pri npr. 5 m visokem stropu sobe praktično enak kot pri tleh (v tem primeru je razmerje tlakov $p/p_0 = e^{-5/8500} = 0,9994$). Po drugi strani je tlak na najvišji gori od tlaka pri gladini morja manjši ravno za faktor $e \approx 2,7$.

V Barometriški formuli se skriva pomembna splošna značilnost termodinamskih sistemov: v ravnovesju se snov med različnimi možnimi stanji porazdeli glede na njihovo energijo po t.i. *Boltzmannovi porazdelitvi*, po kateri je delež zasedenost stanja i z energijo W_i sorazmeren faktorju $e^{-W_i/k_B T}$ (ta faktor imenujemo tudi *Boltzmannov faktor*). Najbolj zasedena so torej vedno

stanja z najnižjo energijo, proti višjim energijam pa se bo zasedenost manjšala eksponentno. Z višanjem temperature bi se zasedenost stanj izenačevala, pri absolutni ničli pa bi bile vse molekule v stanju z najmanjšo energijo. Če ima npr. protein več možnih konformacij, bodo v raztopini s veliko proteini vedno prisotne vse konformacije, ki pa bodo porazdeljene v skladu z Boltzmannovo porazdelitvijo: največ proteinov bo v konformaciji z najnižjo energijo, proteinov v konformacijah z višjimi energijami pa bo eksponentno vse manj. Intuitivno smo se s porazdelitvijo snovi med različnimi stanji srečali že pri razmišljanju o ravnotežju med energijskimi in entropijskimi efekti pri prosti entalpiji (slika 15.3).

Topljenci v raztopini se s stališča entropije obnašajo podobno kot plini, zato lahko pričakujemo, da se bo koncentracija topljenca v epruveti ravno tako nižala eksponentno z višino. Pri raztopinah moramo sicer upoštevati tudi vzgon, a vseeno bo značilna dolžina približno sorazmerna Boltzmannovemu faktorku RT/Mg . V praksi je ponavadi značilna dolžina veliko daljša od velikosti epruvete in razlike koncentracij niti ne opazimo. Drugače je, če s pomočjo ultracentrifuge pospešek povečamo (pri tem ne smemo pozabiti, da pospešek v epruveti z oddaljenostjo od osi centrifuge narašča, $a_r = r\omega^2$, primer 2.3). V epruveti ne nastane ostra koncentracijska meja, ampak se koncentracija spreminja postopoma, v skladu z Boltzmannovo porazdelitvijo (slika 15.9C). Merjenje sedimentacijskega ravnovesja pri ultracentrifugaciji raztopin proteinov je ena najstarejših metod za določanje molske mase proteinov oz. sledenje njihovi oligomerizaciji.

Poglavje 16

Transport toplote in snovi

Termodinamiko bomo zaključili z opisom prevajanja toplote med telesi z različno temperaturo in pretakanjem snovi med predelki. Zanimivo bo spoznanje, da lahko zelo različne transportne pojave (transport toplote, snovi, električnega naboja...) vse opišemo na podoben način in da pri mnogih takih pojavih velja Ohmov zakon, ki smo ga spoznali že v osnovni šoli pri opisovanju električnega toka.

16.1 Prevajanje toplote

V vsakdanjem življenju se s prevajanjem toplote pogosto srečujemo, zato imamo o njem dobro intuitivno predstavo. Zamislimo si npr., da se pozimi znajdemo v hladnem prostoru. Vsi vemo, da nas bo v takem primeru zeblo tem bolj, čim hladnejši je prostor. Nadalje vemo, da nas bodo pred izgubo toplote varovala primerna oblačila – zeblo nas bo manj, če si nadenemo čim debelejšo izolacijo iz čim boljšega toplotnega izolatorja (debela puhasta jakna bo boljša od tanke platnene). Nazadnje pa tudi vemo, da se ob hudem mrazu intuitivno zvijemo v klobčič, s čimer si zmanjšamo površino preko katere izgubljammo toploto.

Izkaže se, da je naše intuitivno razumevanje prevajanja toplote povsem v skladu z natančnim fizikalnim opisom. Količina, ki opisuje, koliko toplote izgubljammo na časovno enoto, se imenuje *toplotni tok*, ki ga z enačbo definiramo kot:

$$P = \frac{Q}{t} \quad (16.1)$$

V skladu z zgornjim opisom je toplotni tok med dvema telesoma, ki sta v to-

plotnem stiku, sorazmeren razliki temperatur med telesoma (ΔT) in površini toplotnega stika (S) ter obratno sorazmeren debelini izolacije med telesoma (L), na toplotni tok pa vpliva tudi, iz katere snovi je izolacija. Velja torej:

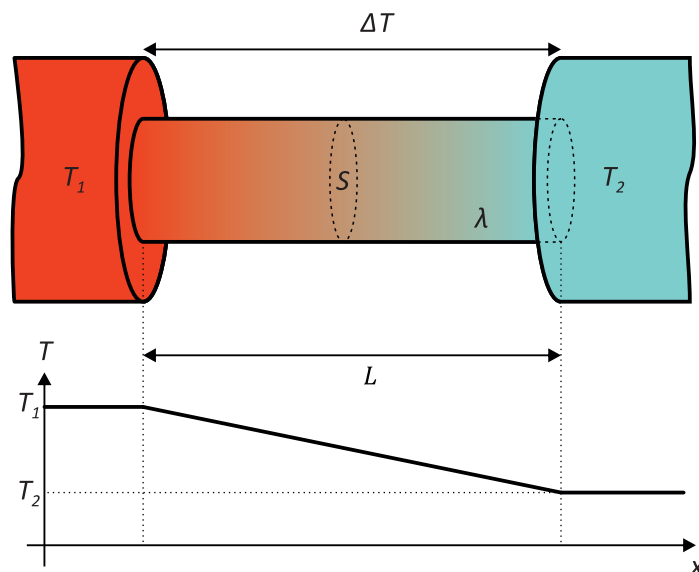
$$P = \frac{\lambda S}{L} \Delta T \quad (16.2)$$

pri čemer smo z λ označili *toplotno prevodnost* snovi, iz katere je narejena izolacija (uporablja se tudi izraz *koeficient toplotne prevodnosti*). Čim boljši toplotni izolator je snov, tem manjša je njena vrednost λ . Vrednosti toplotne prevodnosti za nekatere tipične materiale so navedene v tabeli 16.1. V tabeli vidimo, da je zrak zares odličen toplotni izolator, več kot 20-krat boljši od vode. Dober toplotni izolator je tudi prazen prostor (vakuum), saj se v njem toplota s pomočjo termičnega gibanja snovi sploh ne more prenašati. Kasneje bomo v poglavju o elektromagnetnem valovanju videli, da se lahko toplota preko vakuumu vseeno prenaša v obliki termičnega sevanja.

snov	aluminij	voda	les	volna	stiropor	zrak
λ [W/mK]	240	0,6	0,15	0,039	0,033	0,026

Tabela 16.1: Okvirne vrednosti toplotne prevodnosti nekaterih snovi ([13]). Zrak je odličen toplotni izolator. Toplotna prevodnost telesnih tkiv je ponavadi sorazmerna njihovi vsebnosti vode in je torej malo manjša od toplotne prevodnosti vode.

Enačba 16.2 velja v stacionarnem primeru, t.j. če se temperatura teles v toplotnem stiku ne spreminja. V takem primeru se tudi toplotni tok s časom ne spreminja, poleg tega pa se temperatura v izolaciji med telesoma spreminja kar linearno z razdaljo od enega do drugega telesa (16.1). Za topla telesa v hladnem okolju je dolgotrajnejše stacionarno stanje možno le, če se v njih neprestano sprošča nova toplota, ki nadomešča oddano. Ko si želimo pozimi prostor ogreti na določeno temperaturo, mora biti v njem izvor toplote z močjo, ki je enaka toplotnemu toku, ki se izgublja preko sten prostora. Podobno moramo toplokrvna bitja uravnavati svojo stalno telesno temperaturo z neprestanim uravnovešanjem oddane toplote in toplote, ki jo v telesu proizvedemo z metabolizmom.



Slika 16.1: Toplotni tok med telesom z visoko temperaturo (T_1) in telesom z nizko temperaturo (T_2) je sorazmeren razliki temperatur ($\Delta T = T_1 - T_2$), površini toplotnega stika (S), ter toplotni prevodnosti stika (λ), ter obratno sorazmeren debelini izolacije (L). Če se temperaturi teles s časom ne spreminjata, temperatura v izolaciji linearno pada od T_1 do T_2 .

16.2 Transport snovi z difuzijo

V prejšnjem razdelku smo opisali, kako razlika v temperaturah povzroči toplotni tok, ki teče od toplejšega proti hladnejšemu telesu. Spomnimo se, da je na molekularnem nivoju prehajanje toplote povezano s termičnim gibanjem molekul, ki si z naključnim medsebojnim trkanjem izmenjujejo energijo. Z naključnim trkanjem med molekulami je povezana tudi difuzija snovi v raztopini (o njej smo govorili že v razdelku 12.2) in izkaže se, da pri difuziji veljajo podobne zakonitosti kot pri prevajanju toplote, le da pri difuziji govorimo o snovnem (masnem) toku, ki ga poganja razlika v termodinamskih potencialih oz. koncentracijski razlika (spomnimo se, da je v raztopinah je termodinamski potencial v prvi vrsti odvisen od koncentracije snovi). Analogno z enačbo 16.2 lahko za stacionarni pretok snovi med dvema predelkoma različnima koncentracijama snovi zapišemo

$$\Phi_n = \frac{SD}{L} \Delta c, \quad (16.3)$$

kjer snovni tok $\Phi_n = n/t$ pove, koliko molov snovi se pretoči v določenem času (enota je mol/s), S je površina preko katere teče snov, L je razdalja po kateri teče snov, D je difuzijska konstanta snovi, ki smo jo srečali že v en. 12.3, Δc pa je razlika koncentracij med predelkoma (v enoti mol/l). Difuzijska konstanta torej pri pretoku snovi igra podobno vlogo kot termična prevodnost pri toplotnem toku - čim manjša je difuzijska konstanta, tem manjši bo snovni tok, do katerega pride zaradi razlike v koncentracijah.

16.3 Transport preko bioloških membran

V bioloških sistemih se pomemben del transporta snovi vrši preko celičnih membran, katerih glavna vloga je razmejevanje različnih funkcionalnih predelkov in regulacija transporta molekul med njimi. Celične membrane so zelo tanke (L je zelo majhen, le nekaj večji od velikosti povprečne molekule), hkrati pa je v njih difuzija zapletena in jo težko opišemo le s preprosto difuzijsko konstanto. Za opisovanje difuzije snovi preko membrane se zato ponavadi ne uporablja enačbe 16.3, temveč malo drugačen zapis:

$$\Phi_n = PS\Delta c, \quad (16.4)$$

kjer je P *prepustnost membrane*, ki ima enoto m/s (kljub temu, da ima prepustnost enako enoto kot hitrost, gre za dve povsem različni količini). Hitrost difuzije preko membrane je torej odvisna od razlike koncentracij, površine membrane in njene prepustnosti. Prepustnost membrane je lahko različna za različne snovi, poleg tega pa jo lahko celice z različnimi mehanizmi tudi regulirajo - spomnimo se npr., da se med nastankom akcijskega potenciala prepustnost membrane za kalijeve in natrijeve ione zelo spremeni. Kasneje bomo pri obravnavanju električnih pojavov spoznali, da gonilna sila za difuzijo ionov preko membrane ni le razlika njihovih koncentracij temveč tudi prekomembranska električna napetost.

Omenimo naj še, da v celicah poleg pasivne difuzije, ki jo opisujemo z enačbo 16.4, obstajata še dva načina transporta snovi preko membrane. Prvi je t.i. *olajšani transport*, pri katerem prehajanje snovi preko membrane poteka s pomočjo različnih membranskih proteinov, t.i. prenašalcev. Olajšani transport je tudi pasiven (snovni tok teče v smer proti nižji koncentraciji), a ni odvisen le od razlike koncentracij, temveč tudi od dostopnosti prostih prenašalcev. Z višanjem koncentracijske razlike se tak transport saturira (t.j. doseže vrednost, preko katere ne more), saj v membrani zmanjka prostih prenašalcev. Druga

pomembna vrsta prekomembranskega transporta je t.i. *aktivni transport*, pri katerem celice z različnimi mehanizmi snov črpajo v smeri proti večji koncentraciji, a za to porabljajo energijo (največkrat v obliki molekul ATP). Znan primer takega transporta so natrij-kalijeve črpalke, ki vzdržujejo prekomembranski gradient teh ionov.

16.4 Enoten pogled na transportne pojave, Ohmov zakon

Pri obravnavanju tekočin po ceveh smo omenili, da je pretakanje tekočin analogno pretakanju električnega naboja, ter da je Hagen–Poiseuillev zakon (enačba 9.11) analogna Ohmovemu zakonu iz elektrike. Tudi pogled na opis toplotnega toka (enačba 16.2) in opis toka snovi (enačbi 16.3 in 16.4) razkrije enako podobnost. V vseh primerih namreč velja, da je tok (električni, toplotni, prostorninski...) sorazmeren količini, ki tok poganja (električna napetost, razlika temperatur, razlika tlakov...), ter obratno sorazmeren upor. Viskozni upor cevi smo definirali z enačbo 9.12, podobno pa lahko definiramo tudi *toplotni upor*:

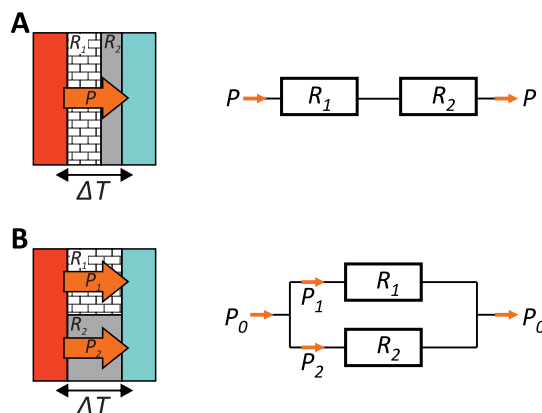
$$R_t = \frac{L}{\lambda S} \quad (16.5)$$

in upor za difuzijski tok snovi preko membrane

$$R_d = \frac{1}{PS} \quad (16.6)$$

ter ustrezna Ohmova zakona zapišemo kot: $P = \Delta T / R_t$ in $\Phi_n = \Delta c / R_d$.

Analogija z Ohmovim zakonom nam pomaga, ko tokovi ne tečejo po homogeni snovi, temveč tečejo vzporedno ali zaporedno po različnih snoveh. V takih primerih lahko namreč brez težav izračunamo skupni upor sistema: upor zaporednih upornikov se sešteva (za skupni upor velja: $R_S = R_1 + R_2 + \dots$), upor vzporednih uporov pa izračunamo iz seštevka obratnih vrednosti (za skupni upor velja: $1/R_S = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots$). Poleg tega v vseh naštetih primerih velja, da se celotna količina toka ohranja (niti električni naboj, niti toplota, niti snov ne morejo izginiti ali nastati iz nič), zato skozi zaporedno vezana upornika teče enak tok (slika 16.2).



Slika 16.2: Seštevanje uporov pri toplotnem toku. A) Če sta med toplim in hladnim telesom dve plasti različne izolacije, toplotni tok teče najprej skozi eno in nato še skozi drugo plast. Gre torej za "zaporedno vezavo" izolaciji in velja $P = \Delta T / R_S$, kjer je skupni upor obeh izolacij $R_S = R_1 + R_2$. B) Če sta izolaciji ena zraven druge, toplotni tok skozi njiju teče vzporedno. Izolaciji sta torej "vezani vzporedno," zato velja $P_0 = P_1 + P_2$ ter $P_0 = \Delta T / R_S$, kjer skupni upor izračunamo iz $1/R_S = 1/R_1 + 1/R_2$.

16.5 Približevanje ravnovesju

Če v hladnem okolju vroče telo ne proizvaja svoje toplote, se ohlaja dokler ne doseže ravnovesja oz. temperature okolice. Na začetku je razlika temperatur med telesom in okolico največja, zato telo toploto takrat izgublja najhitreje. Med ohlajanjem se razlika temperatur manjša, zato telo izgublja vedno manj toplote (enačba 16.2) in se tudi ohlaja vse počasneje. Iz tega lahko sklepamo, da je ohlajevanje proces, ki je eksponentno odvisen od časa: na začetku poteka hitro, nato pa vse počasneje. Podobno velja tudi za segrevanje hladnega telesa na temperaturo okolice. Podrobnejši račun pokaže (MaFijski primer 16.1), da za približevanje ravnovesju velja

$$\Delta T(t) = \Delta T_0 e^{-t/\tau}, \quad (16.7)$$

pri čemer je ΔT temperaturna razlika med telesom in okolico, τ pa je značilni čas ohlajanja oz. ogrevanja in je enak produktu toplotne kapacitete telesa ter upornosti izolacije:

$$\tau = R_t C . \quad (16.8)$$

Enačba se ujema z našo predstavo o ohlajanju oz. segrevanju teles: približevanje končni temperaturi je tem počasnejše (τ je tem večji), čim boljša je izolacija in čim večjo toplotno kapaciteto ima telo. Toplotna kapaciteta je namreč povezana s količino toplote, ki jo mora telo oddati, da se ohladi (enačba 13.5, ki smo jo spoznali pri kalorimetriji) – vsi si dobro predstavljamo, da imajo majhna telesa majhno toplotno kapaciteto in se bodo zato ohlajala hitreje od velikih teles.

Podobno kot za toplotni tok velja tudi za pretok snovi. Če koncentracija snovi v nekem predelku ni enaka koncentraciji snovi v okolici in se snov z okolico lahko izmenjuje, se bo na začetku izmenjevala hitro, potem pa vedno počasneje, saj se bo s časom manjšala razlika koncentracij, ki tok snovi poganja. Tudi tu gre torej za eksponenten proces. Podrobnejši račun pokaže, da se razlika koncentracij med predelkom in okolico s časom spreminja po enačbi

$$\Delta c(t) = \Delta c_0 e^{-t/\tau} , \quad (16.9)$$

pri čemer je značilni čas približevanja ravnovesju enak

$$\tau = R_d V . \quad (16.10)$$

V tem primeru je torej približevanje tem počasnejše, čim večji je difuzijski upor in čim večja je prostornina predelka. Prostornina tu igra podobno vlogo kot toplotna kapaciteta pri izmenjevanju toplote – obe opisujeta, kako velika zaloga (toplote oz. snovi) se mora med približevanjem ravnovesju izmenjati z okolico.

MaFijski primer 16.1: približevanje ravnovesju

Pokažimo, da je približevanje ravnovesju eksponenten proces, ki ga lahko opišemo z enačbama 16.7 in 16.8. Račun bomo naredili le za izmenjevanje toplote, analogen primer za izmenjevanje snovi lahko bralec za vajo opravi sam.

Pred začetkom računanja razmislimo, kaj se dogaja z vročim telesom s temperaturo T_1 , ki je v hladni okolici s temperaturo T_2 . Zaradi razlike temperatur telo izgublja toploto ter se zaradi tega ohlaja. Okolica je v primerjavi s telesom zelo velika, zato se zaradi prejete toplote ne bo ogrela in bo temperatura T_2 konstantna. Temperaturna razlika se s časom manjša, zato se manjšal tudi toplotni tok, ki ga telo izgublja (količina toplote na sekundo) in posledično se bo telo ohlajevalo vedno počasneje. Ker temperaturna razlika vpliva na velikost toplotnega toka, ta pa vpliva nazaj na hitrost

zmanjševanja temperaturne razlike, račun ne bo enostaven. Pa začnimo. Zaradi izgubljanja toplote se telesu temperatura niža po enačbi 13.5:

$$Q = C \Delta T_1 , \quad (16.11)$$

pri čemer pa temperatura vplova nazaj na hitrost izgubljanja toplote, kar opisuje Ohmov zakon (enačbi 16.2 in 16.5):

$$P = \frac{Q}{t} = -(T_1 - T_2)/R_t , \quad (16.12)$$

pri čemer je minus v enačbi zato, ker je pri pozitivni temperaturni razliki toplotni tok negativen (telo toploto izgublja). Enačbi sta torej medsebojno sklopljeni, poleg tega pa se količina toplote, ki jo telo izgublja, vseskozi manjša. Pri reševanju moramo enačbi zato prepisati v diferencialno obliko, ki ne predpostavlja konstantnega toplotnega toka. Upoštevamo torej, da telo v vsakem kratkem času (dt) izgubi le malo toplote (dQ), kar povzroči majhno znižanje temperature (dT_1), toplotni tok v tem kratkem času pa je $P = dQ/dt$. Enačbi se tako zapišeta kot

$$dQ = C dT_1 \quad \text{in} \quad \frac{dQ}{dt} = -(T_1 - T_2)/R_t \quad (16.13)$$

Enačbi lahko sedaj združimo, pri čemer pa zaradi lažjega računanja najprej vpeljimo novo spremenljivko za razliko temperatur in njeno majhno spremembo:

$$u = T_1 - T_2 \quad \text{in} \quad du = dT_1 . \quad (16.14)$$

Pri tem smo upoštevali, da je T_2 konstantna in je zato majhna sprememba u kar enaka majhni spremembi T_1 . Če združimo enačbi 16.13, tako dobimo

$$C \frac{du}{dt} = -\frac{1}{R} u . \quad (16.15)$$

Iz te enačbe je jasno vidno, da je hitrost spreminjanja temperaturne razlike sorazmerna temperaturni razliki in izkušeni matematiki v taki enačbi že vidijo eksponentno odvisnost. Do rezultata pridemo tako, da na eno stran enačbe zapišemo vse člene, ki vsebujejo u , na drugo pa vse člene s t , hkrati pa na eno stran postavimo tudi vse konstante:

$$-RC \frac{du}{u} = dt . \quad (16.16)$$

To enačbo sedaj integriramo od časa 0 (temperaturno razliko ob tem času zapišimo z u_0) do poljubnega časa t (temperaturno razliko ob tem času zapišimo kot $u(t)$):

$$-RC \int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{u} = \int_0^t dt . \quad (16.17)$$

Rezultat integracije je

$$-RC (\ln u(t) - \ln u_0) = t , \quad (16.18)$$

oziroma

$$-RC \ln \frac{u(t)}{u_0} = t . \quad (16.19)$$

Nazadnje še prestavimo produkt $-RC$ na drugo stran enačbe in enačbo antilogaritmiramo:

$$u(t) = u_0 e^{-t/RC} . \quad (16.20)$$

Če upoštevamo še $u = \Delta T$ in $\tau = RC$, dobimo ravno enačbi [16.7](#) in [16.8](#).

Dodatek

Pogoste predpone

faktor	predpona	simbol	faktor	predpona	simbol
10^1	deka	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hekto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	mega	M	10^{-6}	mikro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	piko	p
			10^{-15}	femto	f

Tabela 16.2: Pogoste predpone.

Grška abeceda

alfa	α	A	eta	η	H	ni	ν	N	tau	τ	T
beta	β	B	theta	θ, ϑ	Θ	ksi	ξ	Ξ	ipilon	υ	Υ
gama	γ	Γ	jota	ι	I	omikron	$\omicron$	O	fi	ϕ, φ	Φ
delta	δ	Δ	kapa	κ	K	pi	π	Π	hi	χ	X
epsilon	ϵ	E	lambda	λ	Λ	ro	ρ	P	psi	ψ	Ψ
zeta	ζ	Z	mi	μ	M	sigma	σ	Σ	omega	ω	Ω

Tabela 16.3: Grška abeceda. Pri mali črki fi sta možna dva zapisa, ki ju ne smemo zamenjevati.

Odводи in integrali

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
C (konstanta)	0	C (konstanta)	$x C$
x	1	x	$\frac{1}{2}x^2$
x^n	$n x^{n-1}$	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
e^x	e^x	e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\ln x$	$1/x$	$1/x$	$\ln x$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$C f(x)$	$C f'(x)$	$C f(x)$	$C \int f(x) dx$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	$f(x) + g(x)$	$\int f(x) dx + \int g(x) dx$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$		
$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$		

Tabela 16.4: Osnovna pravila za računanje odvodov in nedoločenih integralov. Pri nedoločenih integralih je rezultat določen le do konstante natančno, ki pa smo jo v zgornjem zapisu izpustili, saj pri se pri računanju določenih integralov pokrajša.

Literatura

- [1] Vira slik:
Galileo: National Maritime Museum, Greenwich, London, UK;
Harvey: National Portrait Gallery, London, UK.
- [2] Podolskiy, Dmitriy I., et al. "Analysis of cancer genomes reveals basic features of human aging and its role in cancer development." *Nature communications* 7 (2016): 12157.
- [3] Atkins, Peter, Julio De Paula, and James Keeler. *Atkins' physical chemistry*. Oxford university press, 2018.
- [4] The importance of quantitative systemic thinking in medicine
- [5] Wilson, Alan M., et al. "Locomotion dynamics of hunting in wild cheetahs." *Nature* 498.7453 (2013): 185.
- [6] Franklin, Kirsten, Paul Muir, Terry Scott, and Paul Yates. *Introduction to biological physics for the health and life sciences*. Wiley, 2019.
- [7] Yamada, Hiroshi, and F. Gaynor Evans. "Strength of biological materials." (1970).
- [8] Herman, Irving P. *Physics of the human body*. Springer, 2016.
- [9] Szczepanek-Parulska, Ewelina, et al. "Comparison of diagnostic value of conventional ultrasonography and shear wave elastography in the prediction of thyroid lesions malignancy." *PloS one* 8.11 (2013): e81532.
- [10] Več avtorjev: *Praktikum iz biofizike*. MF.
- [11] Anusavice, Kenneth J., Chiayi Shen, in H. Ralph Rawls, ur. *Phillips' science of dental materials*. Elsevier Health Sciences, 2012.

[12] <https://water.usgs.gov/software/DOTABLES/>

[13] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_thermal_conductivities