

Biofizika za medicino

Zapiski s predavanj iz biofizike
za študente medicine in dentalne medicine

Jure Derganc

Januar 2021

V tej verziji skripte so že upoštevani popravki do 14. 1. 2021. Vsem študentom, ki so prispevali popravke, se najlepše zahvaljujem!
Popravki se še naprej zbirajo na [tem naslovu](#).

Kazalo

I	Uvod	8
1	Kvantitativno opisovanje pojavov	9
1.1	Kvalitativno ali kvantitativno?	9
1.2	Zapisovanje količin, enote	11
1.3	Osnovne matematične funkcije	13
1.3.1	Premo sorazmerje in linearna odvisnost	13
1.3.2	Obratno sorazmerje	15
1.3.3	Potenčne odvisnost	15
1.3.4	Eksponentna odvisnost	16
1.3.5	Logaritemska funkcija	17
1.3.6	Kotne funkcije	17
1.3.7	Enote v enačbah in matematičnih funkcijah	18
1.4	Grafi, logaritemska skala in linearizacija	20
1.5	Še več matematike	26
1.5.1	Vektorji	26
1.5.2	Stopnje prostosti	28
1.5.3	Odvod in integral	28
II	Mehanika	33
2	Gibanje	34
2.1	Opisovanje gibanja	34
2.2	Vrtenje	36
3	Vzroki gibanja in ravnovesje: sile in navori	43
3.1	Sile	43
3.2	Navori	45
3.3	Gibalna in vrtilna količina	48

3.4	Ravnovesje, sile v telesu in težišče	49
4	Energija	54
4.1	Delo, energija in moč	54
4.2	Ravnovesje in potencialna energija	61
5	Nihanje	65
5.1	Harmonično nihanje	66
5.2	Dušenje, vzbujanje in resonanca	69
5.3	Nihanje molekul in spektroskopija	71
6	Sile in tlaki v snovi	73
6.1	Tri osnovne vrste snovi	73
6.2	Sile, tlaki, napetosti, stisljivost	74
6.3	Hidrostatski tlak, vzgon	76
7	Deformacije trdnih snovi	80
8	Površinska napetost	86
8.1	Laplace-ov zakon za napetost ukrivljenih površin	89
8.2	Močenje površin in kapilarni efekt	91
9	Gibanje tekočin	94
9.1	Opisovanje tekočin v gibanju, viskoznost	94
9.2	Gibanje v tekočini	97
9.3	Tok v ceveh in žilah	99
9.4	Idealne tekočine in Bernoullijeva enačba	103
9.5	Krvni obtok	104
10	Viskoelastičnost	107
III	Termodinamika	109
11	Uvod v termodinamiko	110
12	Termično gibanje in temperatura	112
12.1	Termično gibanje v plinih in plinska enačba	112
12.2	Difuzija	116

12.3 Merjenje temperature	118
13 Notranja energija in prvi zakon termodinamike	121
13.1 Notranja energija	121
13.2 Notranja energija idealnega plina	123
13.3 Delo, toplota in prvi zakon termodinamike	124
13.4 Kalorimetrija	127
13.5 Stiskanje in razpenjanje plinov	131
13.6 Entalpija	132
14 Entropija in drugi zakon termodinamike	138
14.1 Spontanost procesov in preprost pogled na entropijo	138
14.2 Izmenjevanje toplote in sprememba entropije	140
14.3 Drugi zakon termodinamike	142
15 Osnove termodinamike fizioloških procesov	147
15.1 Prosta entalpija in ravnovesje pri fizioloških pogojih	147
15.2 Kemijski potencial in prehajanje snovi med različnimi stanji	153
15.3 Kemijski potencial plinov in raztopin	154
15.4 Osmozni tlak	158
15.5 Fazni diagram vode in vlažnost zraka	160
15.6 Raztapljanje plinov	163
15.7 Barometrijska formula in Boltzmanov faktor	168
15.8 Ravnotežje v kemijskih reakcijah	170
16 Transport toplote in snovi	173
16.1 Prevajanje toplote	173
16.2 Transport snovi z difuzijo	175
16.3 Transport preko bioloških membran	176
16.4 Enoten pogled na transportne pojave, Ohmov zakon	177
16.5 Približevanje ravnovesju	178
IV Električni in magnetni pojavi	182
17 Osnove elektrostatike	183
17.1 Električni naboj v bioloških sistemih	183
17.2 Sila med točkastima nabojema	185

17.3 Električno polje	186
17.4 Dipol	189
17.5 Nabita površina, kondenzator	191
18 Električno polje v snovi	194
18.1 Kovine: Faradayeva kletka	194
18.2 Neprevodne snovi	195
18.3 Ionske raztopine: senčenje naboja	197
19 Električni tok	201
19.1 Ohmov zakon	201
19.2 Električni tok v raztopinah	203
19.3 Izmenični tok	207
19.4 Tok skozi kondenzator: reaktanca	209
19.5 Tok skozi telo in impedanca telesa	213
20 Izvori električne napetosti in toka v telesu	218
20.1 Prekomembranski potencial	218
20.2 Tkiva kot izvori električnega toka	223
21 EKG	227
22 Magnetizem	233
22.1 Magnetno polje	233
22.2 Izvor magnetnega polja je tudi električni tok	235
22.3 Sila na električni naboj v magnetnem polju	239
22.4 Magnetna indukcija	240
V Valovanje in sevanje v diagnostiki in terapiji	244
23 Valovni pojavi	245
23.1 Osnovne značilnosti valovanj	245
23.2 Energija valovanja	248
23.3 Odboj in lom	253
23.4 Seštevanje valovanj – interferenca	255
23.5 Uklon	258
23.6 Sipanje	263
23.7 Stojече valovanje	264
23.8 Spekter	265

24 Zvok in ultrazvok	268
24.1 Osnovne lastnosti	268
24.2 Jakost zvoka in decibeli	271
24.3 Prehajanje med snovmi	273
24.4 Sluh in govor	274
25 Ultrazvočno slikanje	278
25.1 Osnovne značilnosti	278
25.2 Nastanek slike	280
25.3 Dopplersko ultrazvočno slikanje	285
25.4 Biološki učinki ultrazvoka	287
26 Elektromagnetno valovanje	288
26.1 Osnovne lastnosti	288
26.2 Kvantna slika	291
26.3 Termično sevanje	294
26.4 Laser	295
26.5 Svetlobna spektroskopija	296
27 Optika	299
27.1 Leče	299
27.2 Povečevalno steklo	303
27.3 Mikroskop	304
27.4 Napake leč	306
27.5 Oko	307
27.5.1 Optične lastnosti	307
27.5.2 Mrežnica	308
27.5.3 Svetlobna občutljivost	309
27.5.4 Zaznavanje barv	309
27.5.5 Kratko in daljnovidnost	310
27.5.6 Ostrina vida	310
28 Rentgen	312
28.1 Izvor rentgenskih žarkov – rentgenska cev	313
28.2 Interakcija s snovjo	318
28.3 Nastanek slike	320

29 Ionizirajoča sevanja	324
29.1 Vrste ionizirajočega sevanja	325
29.2 Vpliv ionizirajočega sevanja na tkivo	327
29.3 Detektorji ionizirajočega sevanja	329
30 Osnove nuklearne medicine	332
30.1 Jedra, izotopi in jedrska energija	333
30.2 Jedrski razpadi in radioaktivnost	335
30.3 Uporaba radioaktivnosti v terapiji in slikovni diagnostiki	339
31 Slikanje z magnetno resonanco	343
31.1 Osnovni princip slikanja z MR	344
31.2 Relaksacijski časi in nastanek kontrasta med tkivi	346
31.3 Gradient magnetnega polja in nastanek prostorske slike telesa	348
A	353

Del I

Uvod

Poglavje 1

Kvantitativno opisovanje pojavov

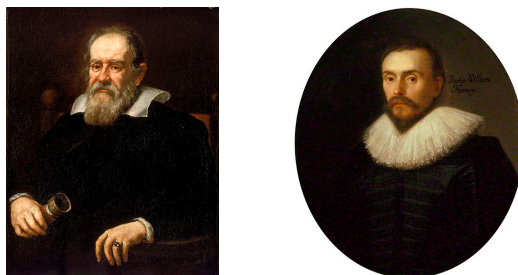
1.1 Kvalitativno ali kvantitativno?

Predstavljajmo si srednjeveškega zdravnika pri delu. Vse svoje pripomočke ima spravljene v eni sami torbi. Ko pristopi k bolniku, ga najprej pozorno pogleda v oči, mu z roko potipa čelo ter razišče, ali je bolnik *vroč*, *bled* ali morda *poten*. Nato se na osnovi teh *kvalitativnih* opazanj in svojih občutkov odloči o načinu zdravljenja. Od srednjega veka do danes se je marsikaj spremenilo. Ko danes bolnik pride k zdravniku, ga ta včasih niti v oči ne pogleda in ga takoj pošlje na laboratorijske preiskave. Po opravljenih preiskavah se bolnik k zdravniku vrne s šopom izvidov, na katerih je množica izmerjenih parametrov in grafov: vrednost krvnega tlaka, vrednost holesterola, saturacija krvi s kisikom, EKG ... Zdravnikova izbira načina zdravljenja nato v veliki meri temelji prav na teh izmerjenih številkah. Z drugimi besedami, sodobna medicina postaja vse bolj *kvantitativna* znanost.

Pogosto na prvo mesto med kvantitativnimi znanostmi postavljamo fiziko, ki je tesno povezana z natančnim opazovanjem in ponovljivimi meritvami ter matematično analizo eksperimentalnih rezultatov. S takim preprostim pogledom pa delamo krivico ostalim znanostim, saj se je znanost vedno razvijala kot celota in so bili fiziki od nekdaj le eni izmed »filozofov narave¹«. Tako ni presenetljivo, da začetke kvantitativne medicine najdemo hkrati z začetki kvantitativne fizike, tj. v severni Italiji, ob koncu 16. stoletja. V času, ko je v Padovi služboval Galileo Galilei, je tam študiral tudi angleški zdravnik William

¹Spomnimo se naslova znamenite Newtonove knjige, v kateri je prvič objavil tri zakone narave, ki jih danes imenujemo Newtonovi zakoni: *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* oz. *Matematične osnove naravne filozofije*.

Harvey, ki je kasneje odkril princip delovanja krvnega obtoka. Njegova knjiga *De motu cordis* (1628), v kateri je predstavil svoje raziskave, predstavlja enega od začetkov uporabe kvantitativnih metod v medicini. Zdravniki v 16.



Slika 1.1: Sodobnika Galileo Galilei (1564–1642) in William Harvey (1578–1657). Prvi je bil eden od začetnikov uporabe kvantitativnih metod v fiziki, drugi v medicini (sliki povzeti po [1]).

stoletju so bili dobri anatomi in so se dobro zavedali pomena srca, žil in krvi, vendar še niso imeli dobrih mikroskopov in zato niso poznali mikroskopsko tankih kapilar, ki povezujejo arterijski in venski obtok. Pri razumevanju krvnožilja so se tako naslanjali na antično razlago, da kri neprestano nastaja v jetrih ter ponika v ostalih organih. Harveyjev razmislek in račun, ki sta antično razlago postavila pod vprašaj, sta bila z današnjega stališča preprosta, v tistih časih pa nič manj kot revolucionarna: iz anatomije srca je ocenil, da srce ob vsakem utripu prečrpa približno 60 cm^3 krvi. Ko je to število pomnožil s številom srčnih utripov v eni uri, je izračunal, da srce v eni uri prečrpa več kot 200 litrov krvi oziroma približno trikratnik celotne človekove teže! Ker si je težko predstavljati, da toliko snovi vsako uro nastane v jetrih in hkrati ponikne v organih, je sklepal, da kri ne nastaja in ponika, temveč kroži. Preprosta kvantitativna meritev in izračun sta torej sprožila novo medicinsko odkritje in nakazala začetek novega obdobja v medicini.

Pogled v oči in pogovor s pacientom bosta vedno ostala najboljša osnovna medicinska metoda, vseeno pa so danes tudi številke nedeljiv del medicine. Dobra medicina je tista, ki je podprta z dokazi, in ravno kvantitativna analiza je eden od temeljev sodobnega znanstvenega dokaza, saj omogoča objektivnost in primerljivost različnih meritev. Številke in grafe vsakodnevno srečujemo tako v kliniki, kot tudi v osnovnih raziskavah, npr. v znanstvenih člankih, ki opisujejo delovanje novih zdravil. Eden od predpogojev za uspešno razumevanje sodobne medicine je torej dobro poznavanje osnovnih orodj kvantitativne znanosti. V prvem poglavju bomo zato osvežili naše znanje o nume-

ričnem zapisovanju količin in risanja grafov, ponovili osnovne matematične funkcije in enačbe ipd. Pozorni bralec bo ugotovil, da je vsebina tega poglavja pravzaprav bolj matematika kot fizika. To ni naključje, saj je matematika pač abeceda sodobnih kvantitativnih znanosti.

1.2 Zapisovanje količin, enote

Pri zapisovanju količin s številkami ni pomembna le številka ampak tudi *enota*, v kateri količino zapišemo. Višina 5 metrov in volumen 5 litrov sta oba »5«, pa hkrati dve povsem različni količini in ju ne moremo seštevati kot navadnih števil. V Sloveniji so pacienti s temperaturo 36 zdravi, v ZDA pa pri isti vrednosti ne bi bili več med živimi, saj tam telesno temperaturo merijo v stopinjah Fahrenheitov in 36 °F ustreza približno našim 2 °C. Da se izognemo neprijetnim nesporazumom ali celo usodnim napakam, moramo biti torej pri zapisu količin pozorni na oboje, na številko in enoto.

Isto količino lahko zapišemo z različnimi enotami. Dolžino mezinca na roki avtorja tega teksta lahko npr. povsem ekvivalentno zapišemo na več načinov:

$$7,62 \text{ cm} = 0,0762 \text{ m} = 7,62 \cdot 10^4 \mu\text{m} = 3 \text{ palce} ,$$

pri čemer smo upoštevali, da je starinska enota »palec« (inča) enaka 2,54 cm. Katerega od zgornjih zapisov uporabimo, je odvisno od situacije — v ZDA bi verjetno uporabili zadnjega, saj tam kratke dolžine merijo v palcih.

Velikostni red uporabljene enote lahko prilagodimo s pomočjo standardnih predpon: centimeter npr. pomeni stotina metra. Seznam najbolj pogostih predpon je prikazan v tabeli [A.1](#) v dodatku na strani [353](#). Poleg tega pri matematičnem opisovanju pride prav tudi grška abeceda, ki je prikazana v tabeli [A.2](#) v dodatku na strani [354](#). Opozorimo naj še, da v nekaterih državah namesto decimalne vejice uporabljajo decimalno piko, kar lahko povzroči dodatne nesporazume. Npr.: **huda zmeda lahko nastane, če številke z decimalno vejico vnašamo v osebni računalnik, ki je nastavljen na ameriške nastavitve.**

Po dogovoru naj bi vsi uporabljali standardizirane enote, določene v *mednarodnem sistemu enot* z okrajšavo SI (iz francoščine, *Système International d'Unités*), v katerem so osnovne enote za maso (kg), dolžino (m), čas (s), električni tok (A), temperaturo (K), množino snovi (mol), in svetilnost (cd). Ker pa je navada železna srajca, v mnogih primerih še vedno uporabljamo stare

enote. Za merjenje krvnega tlaka tako ponavadi ne uporabljamo SI enote paskal ($\text{Pa} = \text{kg}/\text{ms}^2$) ampak enoto »milimeter živega srebra« ($1 \text{ mmHg} \approx 133 \text{ Pa}$), pa še to enoto v pogovoru pogosto izpustimo in se zanašamo na to, da bomo enoto ugotovili iz konteksta. Podobnih primerov je še več in ne preostane nam drugega, kot da smo na enote vseskozi pozorni in jih nikoli ne privzamemo brez razmisleka.

Da je pazljivost pri uporabi enot izjemno pomembna, priča tudi naslednja zgodba. Leta 1999 je ameriška vesoljska agencija NASA na planet Mars poslala dragocen raziskovalni satelit Mars Climate Orbiter, ki pa je ob vstopu v Marsovo atmosfero nesrečno zgorel in razpadel. In kaj je povzročilo to nesrečo? Preprosto: program v računalniku na satelitu je narobe izračunal parametre pristanka, saj je bil napisan za podatke v SI enotah, inženirji pa so mu jih vpisali v miljah. V medicini je pazljivost pri enotah še posebej pomembna, saj je razlika med mg ali μg zdravila lahko razlika med življenjem in smrtjo pacienta.

Pogosto moramo enote iz enega zapisa pretvarjati v drugega. To najlažje naredimo tako, da v računu staro enoto nadomestimo z ustrezno količino nove enote, pri čemer pridno uporabljamo ulomkovo črto. Spodaj navajamo štiri tipične primere pretvarjanja enot.

Primer 1.1: pretvarjanje enot

Hitrost 60 km/h pretvorimo v m/s :

$$\frac{60 \text{ km}}{\text{h}} = \frac{60 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{600 \text{ m}}{36 \text{ s}} = 16,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Primer 1.2: včasih pretvarjanje v SI enote ni potrebno

Izračunajmo, kolikšno pot v pol ure naredi avtomobil, ki se vozi s hitrostjo 60 km/h . Je v tem primeru sploh potrebno enote iz km in h pretvarjati v SI enoti m in s ? Seveda ne, saj lahko kar brez pretvarjanja enot na pamet izračunamo, da je prevožena pot enaka 30 km . Pri računanju torej ravnamo po pameti in enot po nepotrebnem ne pretvarjamo v SI enote.

Primer 1.3: enote v imenovalcu zahtevajo pazljivost

Še posebej moramo biti pazljivi, če je enota v imenovalcu. Čeprav npr. brez razmišljanja vemo, da je 1 m enak 100 cm , pa moramo biti pri pretvorbi iz m^{-1} v cm^{-1} zelo pozorni:

$$1 \text{ m}^{-1} = \frac{1}{\text{m}} = \frac{1}{100 \text{ cm}} = 0,01 \text{ cm}^{-1}.$$

Če bi na hitro napisali, da je 1 m^{-1} enako 100 cm^{-1} , bi se torej zmotili kar za faktor 10000!

Primer 1.4: enote za kote

Enoto imajo tudi koti, na kar moramo biti pazljivi pri vnosu kotov v kalkulator. Najpogostejši enoti za opisovanje kotov sta stopinje (ang. okrajšava *deg*) ter radiani (ang. okrajšava *rad*). Pravemu kotu ustreza 90° oz. $\pi/2$ radianov, polnemu krogu pa 360° oz. 2π radianov, pri čemer besedo »radian« največkrat izpustimo in rečemo npr. kar »pravi kot je enak $\pi/2$ «. Če je kalkulator nastavljen na »deg«, vrednost pravega kota torej vtipkamo kot številko 90, če pa je nastavljen na »rad« pa kot številko 1,57 ($= \pi/2$).

1.3 Osnovne matematične funkcije

V tem razdelku bomo ponovili lastnosti najosnovnejših matematičnih funkcij, ki jih pogosto srečamo pri opisovanju pojavov v naravi. Grafi teh funkcij so predstavljeni na sliki 1.2.

1.3.1 Premo sorazmerje in linearna odvisnost

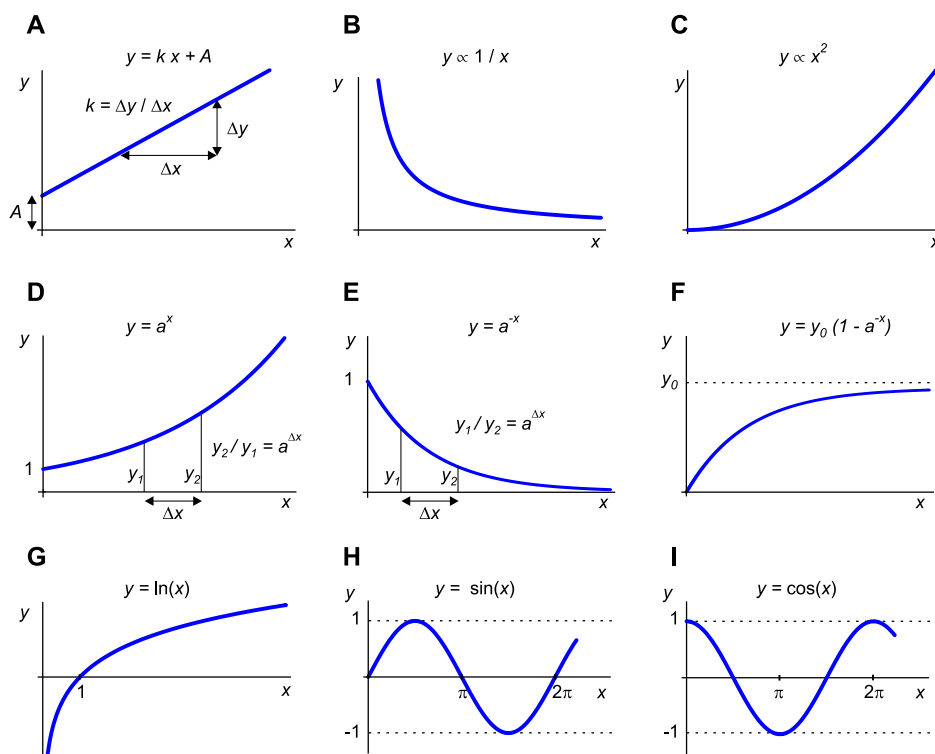
Najpreprostejša zveza med dvema količinama je premo sorazmerje. Izraz » y je sorazmeren x « v splošnem zapišemo z $y \propto x$, če pa smo še bolj natančni, pa z enačbo $y = kx$, pri čemer konstanto k imenujemo *naklonski koeficient*.

Reševanju problemov s sorazmernimi odvisnostmi je enostavno, saj pri njih deluje sklepni (križni) račun. Zavedati pa se moramo, da to preprosto orodje tudi hitro odpove: npr. že pri linearni funkciji, ki se od premege sorazmerja loči le po konstanti A in se zapiše kot

$$y = kx + A. \quad (1.1)$$

Graf linearne funkcije je prikazan na sliki 1.2A, prikaz njene uporabe v praksi pa v primeru 1.5.

Tako pri premem sorazmerju kot pri linearni funkciji velja: če se x poveča za Δx , se y spremeni za Δy ne glede na vrednost x . Naklonski koeficient je lahko pozitiven, nič ali negativen, vendar je povsod enak in ga lahko izračunamo kot $k = \Delta y / \Delta x$.



Slika 1.2: Matematične funkcije, ki jih najpogosteje srečamo pri opisovanju povezav med količinami v naravi. A) Linearna funkcija. B) Obratno sorazmerje. C) Kvadratna funkcija. D) Naraščajoča eksponentna funkcija. E) Padajoča eksponentna funkcija. F) Eksponentno približevanje od nič proti končni vrednosti. G) Logaritemska funkcija. H) Sinusna funkcija. I) Kosinusna funkcija.

Primer 1.5: linearna funkcija in pretvarjanje iz °C v °F

Izračunajmo, koliko stopinj Fahrenheita ustreza temperaturama 37 °C in 42 °C! Temperaturni lestvici sta definirani tako, da med stopinjami Fahrenheita in stopinjami Celzija velja linearna odvisnost, pri čemer je ledišče (0 °C) pri 32 °F, vrelišče vode (100 °C) pa pri 212 °F.

Če se naloge lotimo s sklepnim računom (križnim računom), hitro ugotovimo, da ne pridemo daleč, saj pridemo do deljenja z 0:

$$\begin{array}{ccc} 0^\circ\text{C} & \dots & 32^\circ\text{F} \\ 37^\circ\text{C} & \dots & x \end{array}$$

In tako smo se naučili prve lekcije: **sklepni račun (križni račun) deluje le v primeru, če sta količini premo sorazmerni, tj. če sta linearno odvisni in obe hkrati enaki**

nič.

V našem primeru temperatura pri 0 °C ni enaka 0 °F, zato sklepni račun odpove. Naloga se zato lotimo počasi. Če temperaturo v Fahrenheitih označimo s T_F , temperaturo v stopinjah Celzija pa s T_C , lahko linearno odvisnost med obema zapišemo kot

$$T_F = k T_C + A .$$

Če si to odvisnost narišemo, hitro vidimo, da je vrednost konstante A enaka 32°F, vrednost naklonskega koeficienta k pa je

$$k = \frac{212\text{ °F} - 32\text{ °F}}{100\text{ °C} - 0\text{ °C}} = 1,8 \frac{\text{°F}}{\text{°C}} .$$

Temperaturi 37 °C torej ustreza:

$$T_F = 1,8 \frac{\text{°F}}{\text{°C}} \cdot 37\text{ °C} + 32\text{ °F} = 98,6\text{ °F} .$$

Z enakim računom izračunamo še, da temperaturi 42 °C ustreza 107,6 °F.

1.3.2 Obratno sorazmerje

Bližnji sorodnik premega sorazmerja je obratno sorazmerje, $y = 1/x$, kar preberemo » y je obratno sorazmeren x « (slika 1.2B). Če je lahko linearna odvisnost naraščajoča ali padajoča, imamo pri obratnem sorazmerju ponavadi v mislih le padajoči del: če se x poveča za nek faktor, se bo y za isti faktor zmanjšal.

1.3.3 Potenčne odvisnosti

V splošnem tako odvisnost zapišemo kot $y = x^n$, kjer je n celo število (slika 1.2C). V praksi največkrat srečamo potenci 2 in 3, saj sta povezani z geometrijo: površina telesa je sorazmerna kvadratu njegovega premera ($S \propto d^2$), volumen pa tretji potenci ($V \propto d^3$). Značilnost teh potenčnih odvisnosti je, da naraščajo precej hitreje od linearne: če neka stvar ob nespremenjeni obliki zraste za faktor 1,5, se ji površina poveča za faktor $(1,5)^2 = 2,25$, volumen pa za faktor $(1,5)^3 \approx 3,4$.

Obratna funkcija potenčni je korenska: $y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}$.

1.3.4 Eksponentna odvisnost

V naravi se pogosto zgodi, da je hitrost spreminjanja neke količine sorazmerna velikosti količine same. V takem primeru se količina spreminja eksponentno. Nazoren primer naraščajoče eksponentne funkcije srečamo pri delitvi bakterij, ki imajo dovolj hrane in prostora. Ker iz vsake bakterije ob delitvi nastaneta dve novi, bo število na novo nastalih bakterij v neki časovni enoti sorazmerno številu obstoječih. Število bakterij se bo torej v tem primeru povečevalo eksponentno. Izločanje snovi iz telesa lahko po drugi strani pogosto opišemo s padajočo eksponentno funkcijo: število molekul neke snovi, ki se izločijo v določeni časovni enoti, je pogosto sorazmerno koncentraciji te snovi v telesu in zaradi tega tudi številu molekul te snovi v telesu.

Naraščajočo eksponentno odvisnost zapišemo kot $y = a^x$, padajočo eksponentno pa kot $y = a^{-x}$ (slika 1.2D in E), pri čemer se konstanta a imenuje osnova. Pri tem si je vredno zapomniti, da lahko isto eksponentno odvisnost zapišemo z različnimi osnovami, najpogosteje uporabimo osnovo 2, 10 ali pa »naravno osnovo« e (e je konstanta, katere vrednost je enaka približno 2,7182...). Uporaba različnih osnov za opisovanje iste eksponentne odvisnosti je prikazana v primeru 1.6.

Pri računanju z eksponenti si pomagamo z zvezami:

$$a^0 = 1 \quad (1.2)$$

$$a^1 = a \quad (1.3)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (1.4)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (1.5)$$

$$a^n b^n = (ab)^n \quad (1.6)$$

$$a^{m+n} = a^m a^n \quad (1.7)$$

Iz zadnje od zgornjih zvez lahko izpeljemo pomembno lastnost eksponentne odvisnosti: **če se x spremeni za Δx , se vrednost y spremeni za enak faktor, ne glede na vrednost x .** Vrednost tega faktorja je enaka $a^{\Delta x}$.

Vrednost naraščajoče eksponentne funkcije z večanjem x narašča vedno hitreje, vrednost padajoče eksponentne funkcije pa vse počasneje in se počasi bliža vrednosti 0. Pogosto pa eksponentno funkcijo srečamo tudi, ko količina najprej hitro narašča, nato pa se hitrost naraščanja zmanjšuje, vrednost pa se približuje neki končni vrednosti. Tako odvisnost z enačbo zapišemo kot $y = y_0(1 - a^{-x})$, prikazana pa je na sliki 1.2F.

1.3.5 Logaritemska funkcija

Logaritem je obratna funkcija eksponentne: če je $x = e^y$, potem je $y = \ln x$. Podobno kot pri eksponentni funkciji, so tudi pri logaritemski možne različne osnove, pri čemer naravni logaritem ponavadi zapišemo kot $\ln$, desetiškega kot $\log$, dvojiškega pa kot $\log_2$.

Pri računanju z logaritmi nam pomaga zveza

$$\ln 1 = 0 \quad (1.8)$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad (1.9)$$

$$\ln a^n = n \ln a \quad (1.10)$$

Iz zadnje od zgornjih zvez vidimo, da je vrednost logaritma sorazmerna vrednosti v eksponentu, zaradi česar logaritem pogosto uporabljamo pri opisovanju količin z velikim razponom možnih vrednosti. Lep primer uporabe logaritemske lestvice je vrednost pH, ki meri kislost oziroma bazičnost raztopine in je povezana s koncentracijo (aktivnostjo) H^+ ionov v raztopini. Koncentracije H^+ ionov v tipičnih raztopinah so lahko zelo različne, npr. od približno 10^{-11} mol/l v milnici do več kot 10^{-3} mol/l v želodčni kislini. Glavne razlike v koncentraciji se torej skrivajo v vrednostih v eksponentu, zato vrednost pH definiramo z logaritemsko lestvico:

$$\text{pH} = -\log[H^+] , \quad (1.11)$$

pri čemer koncentracijo po dogovoru podajamo v mol/l. Milnica ima pH torej 11, želodčna kislina pa 3, kar je za uporabo veliko bolj praktično od zapisa z eksponenti. Vrednost pH navadne vode je približno 7, kar pomeni da je koncentracija vodikovih ionov v vodi približno 10^{-7} mol/l.

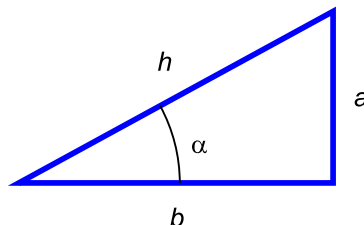
1.3.6 Kotne funkcije

Kotne funkcije $\sin$, $\cos$ in $\tan$ srečamo pri geometriji, ko računamo razmerja stranic v pravokotnem trikotniku:

$$\sin \alpha = \frac{a}{h} \quad (1.12)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{h} \quad (1.13)$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b} \quad (1.14)$$



Funkciji $y = \sin x$ in $y = \cos x$ sta prikazani na slikah 1.2H in 1.2I. Vidimo, da je njuna največja vrednost 1 najmanjša pa -1 . Pri kotu 0 je vrednost sinusa enaka 0, vrednost kosinusa pa 1.

Kotne funkcije so periodične, velja npr. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, zato jih v fiziki uporabljamo tudi za opisovanje periodičnih pojavov.

1.3.7 Enote v enačbah in matematičnih funkcijah

Enote so neločljiv del zapisa količin, zato imajo enačbe s količinami smisel le, če je na obeh straneh enačaja tudi ista enota. Zapis $y = x$ tako nima smisla, če je x enak 1 m, y pa je 1 s. Če količine v enačbah med seboj kombiniramo, se bo enako zgodilo tudi z enotami. Če npr. velja $k = \Delta x / \Delta t$ in je x podan v metrih, t pa v sekundah, bo imel tudi k enoto in sicer m/s.

Nekatere matematične funkcije (npr. eksponentna, logaritemska in kotne funkcije) delujejo na številih, zato moramo biti pri njihovi uporabi za opisovanje količin previdni. Vrednost 2^x lahko npr. izračunamo, če je x številka brez enote, ne pa tudi če je x količina z enoto – zapis $2^{1\text{cm}}$ tako nima smisla. Pri opisovanju naravnih pojavov zato zveze med količinami ponavadi srečamo v obliki, pri kateri se enote v argumentih funkcij pokrajšajo, npr.

$$y = y_0 \ln \frac{x}{x_0}, \quad y = y_0 e^{-t/\tau} \quad \text{ali} \quad y = y_0 \sin(\omega t),$$

kjer so konstante x_0 , τ in ω konstante podane v ustreznih enotah, da se enote v argumentih funkcij pokrajšajo (npr. x_0 v m, τ v s in ω v 1/s). Konstanta y_0 ima enako enoto kot količina y , zato je na obeh straneh enačaja enaka enota. Uporaba eksponente in logaritemske funkcije je podrobneje predstavljena še v primerih 1.6 in 1.8.

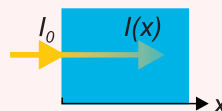
Čeprav naj bi se vedno držali matematično natančnega zapisa, pa kljub temu v matematičnih funkcijah včasih »pozabimo« na enoto, oz. jo pri računanju preprosto izpustimo. To lahko naredimo le, če se iz konteksta dobro razume, v kateri enoti je bila količina zapisana. En tak primer smo srečali pri definiciji vrednosti pH (En. 1.11), kjer je bilo po definiciji potrebno koncentracijo v enačbo vstaviti v enoti mol/l. Če bi koncentracijo vstavili npr. v mmol/l, bi seveda dobili napačen rezultat.

Primer 1.6: absorpcijski zakon in eksponentno padanje

Poglejmo si primer uporabe eksponentne funkcije v praksi. Zapisali bomo t. i. absorpcijski zakon, ki ga bomo kasneje podrobneje obravnavali v poglavju o prehajanju svetlobe skozi raztopine. Absorpcijski zakon pravi, da pri potovanju svetlobe skozi

raztopino njena jakost pada eksponentno s prepotovano razdaljo. V literaturi absorpcijski zakon zapisujejo na več različnih, a ekvivalentnih načinov:

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x} = I_0 2^{-x/x_{1/2}} = I_0 10^{-\epsilon c x},$$



pri čemer jakost vpadne svetlobe označimo z I_0 . Zakon smo zapisali s tremi različnimi osnovami, v vsakem zapisu pa je tudi druga konstanta, s katero opišemo, kako močno se svetloba absorbira v izbrani raztopini:

- μ je absorpcijski koeficient raztopine,
- $x_{1/2}$ je razpolovna debelina v raztopini,
- ϵ je ekstinkcijski koeficient raztopine, c pa je njena koncentracija.

Vsi trije zapisi so povsem ekvivalentni in uporabljamo lahko katerega koli. V fiziki se npr. najpogosteje uporablja zapis z naravno osnovo, v kemiji pa z desetiško. Poglejmo si še nekaj lastnosti zgornjih zapisov.

- Ker morajo biti eksponenti brez enot, lahko iz zgornjih zapisov brez težav ugotovimo, v kakšnih enotah so podane konstante. Ker se razdalja x ponavadi meri v m, koncentracija pa v mol/l, mora biti enota μ enaka m^{-1} , enota $x_{1/2}$ enaka m, enota ϵ pa enaka $\text{l}/(\text{m} \cdot \text{mol})$.

- Kaj nam pove vrednost razpolovne debeline $x_{1/2}$?

To je ravno razdalja, na kateri se jakost svetlobe zmanjša za polovico. Če namreč v enačbo vstavimo $x = x_{1/2}$, dobimo

$$I = I_0 2^{-1} = \frac{1}{2} I_0.$$

- Za kolikšen faktor se spremeni jakost svetlobe po tem, ko v raztopini prepotuje razdaljo treh razpolovnih debelin?

Na tako vprašanje znamo odgovoriti kar brez uporabe enačb! Vsakič, ko svetloba po raztopini prepotuje razdaljo enako razpolovni debelini, se njena jakost prepolovi. Po prepotovanih treh razpolovnih debelinah se bo jakost svetlobe torej trikrat prepolovila. Ker velja $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, se torej po prepotovanih treh razpolovnih debelinah jakost svetlobe zmanjša za faktor 8.

- Izračunajmo še zvezo med absorpcijskim koeficientom in razpolovno debelino. Če v zvezi

$$I_0 e^{-\mu x} = I_0 2^{-x/x_{1/2}}$$

pokrajšamo I_0 , obe strani enačbe logaritmiramo ter ob tem upoštevamo $\ln a^m = m \ln a$, dobimo

$$\ln e^{-\mu x} = \ln 2^{-x/x_{1/2}} \Rightarrow -\mu x \ln e = -x/x_{1/2} \ln 2.$$

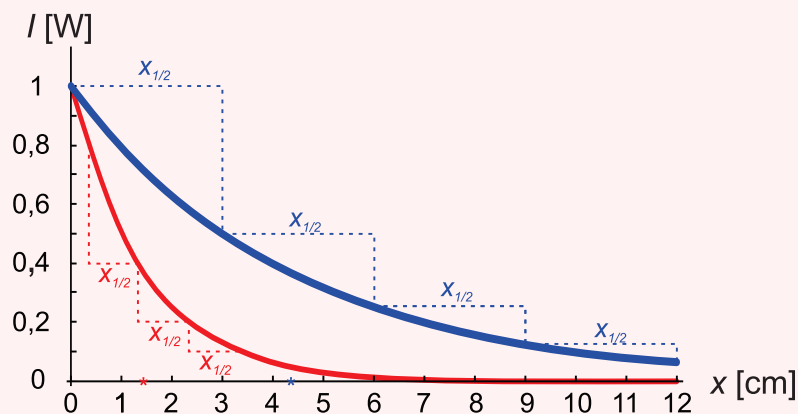
Ko na obeh straneh pokrajšamo x in upoštevamo $\ln e = 1$, dobimo zahtevano zvezo

$$\mu = \frac{\ln 2}{x_{1/2}}.$$

Absorpcijski koeficient in razpolovna debelina sta torej obratno sorazmerna. Večja kot je absorpcija v raztopini, večji je njen absorpcijski koeficient in krajša je razpolovna debelina.

- Poglejmo si še primer grafa, ki prikazuje pojemanje intenzitete žarka svetlobe, ki potuje po namišljeni raztopini. Začetna jakost svetlobe naj bo $I_0 = 1$ W.

Modra črta prikazuje primer za raztopino, v kateri je razpolovna debelina enaka $x_{1/2} = 3$ cm. Intenziteta se torej na vsake 3 cm prepolovi: pri 3 cm je $I = 0,5$ W, pri 6 cm je $I = 0,25$ W itd. Absorpcijski koeficient je v tem primeru enak $\mu = \frac{\ln 2}{x_{1/2}} = 0,23 \text{ cm}^{-1}$.



Rdeča črta prikazuje primer, ko se koncentracija raztopine trikrat poveča in je zato absorpcija v raztopini večja. Jakost o zato pada *hitreje*, razpolovna debelina se *zmanjša* na $x_{1/2} = 1$ cm, absorpcijski koeficient pa se *poveča* na $\mu = 0,69 \text{ cm}^{-1}$.

Zvezdici na vodoravni osi označujeta razdaljo, ki je enaka obratni vrednosti absorpcijskega koeficienta – na tej razdalji se jakost svetlobe zmanjša za faktor $e^{-1} = 1/2,718 \approx 0,37$.

1.4 Grafi, logaritemska skala in linearizacija

Grafi so eno najosnovnejših orodij kvantitativne analize, saj lahko z njimi nazorno prikažemo zveze med količinami. V tem razdelku si bomo ogledali trik, pri katerem graf s spretno spremembo skale na oseh naredimo preglednejši.

Najpogostejša sprememba skale na grafu je logaritemska, ki jo uporabimo za prikazovanje podatkov, katerih vrednosti se raztezajo čez nekaj redov velikosti (spomnimo se, da smo zaradi enakega razloga tudi za pH uporabili logaritemsko lestvico). Pri t. i. semi-log grafih je logaritemska le ena os, pri log-log grafih pa sta logaritemski obe osi.

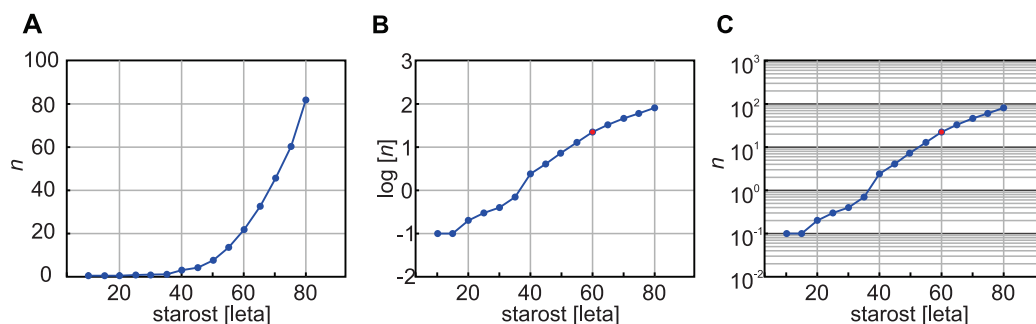
Uporabo logaritemske skale si bomo najboljše ogledali na konkretnem primeru. Na sliki 1.3 so trije različni prikazi pogostosti pojavljanja raka trebušne slinavke pri ženskah v Avstraliji. Izziv pri prikazu teh podatkov je, da se pogostost pojavljanja raka za različne starosti zelo razlikuje: do 40. leta je pogostost pod 1 primerom na 100.000 oseb, do 80. leta pa naraste na skoraj 100 primerov na 100.000. Če graf narišemo z navadno skalo (slika 1.3A), je iz njega zato nemogoče razlikovati vrednosti pod 40. letom, saj so si vse zelo blizu. Temu se izognemo, če na navpično os nanašamo logaritemsko skalo, kar lahko naredimo na dva načina: na navpično os nanašamo vrednosti $\log(n)$ in uporabimo linearno skalo (slika 1.3B), ali pa uporabimo kar logaritemsko skalo, pri kateri pomožne črte niso ekvidistantne (slika 1.3C). Drugi prikaz je celo bolj nazoren, saj je pri prvem za razbiranje vrednosti iz grafa potrebno nekaj možganske telovadbe.

Obstajajo še bolj zapletene spremembe skale, ki jih včasih uporabimo za nazoren prikaz ne-linearnih odvisnosti količin. Poglejmo npr. obratno sorazmerje in padajočo eksponentno funkcijo na sliki 1.2B oz. 1.2E. Obe funkciji sta padajoči in na pogled bi težko ločili, katera odvisnost je na katerem grafu. Edina funkcija, ki jo že na pogled ločimo od drugih je linearna funkcija. Pri ne-linearnih odvisnostih zato včasih spremenimo skalo na osi z namenom, da se nam na grafu prikaže premica. Postopek imenujemo *linearizacija*.

Pri linearizaciji funkcije izvedemo zamenjavo spremenljivk, ki nam omogoči, da tudi zapletene odvisnosti na grafih prikažemo kot linearne. Obratno sorazmerje $y = a/x$ npr. lineariziramo tako, da namesto y v odvisnosti od x narišemo y v odvisnosti od nove spremenljivke z , pri čemer je $z = 1/x$. Ko vlogo neodvisne spremenljivke prevzame z , dobi obratno sorazmerje natanko obliko linearne funkcije, pri čemer je vrednost konstante A enaka 0, vrednosti naklonskega koeficienta k pa ustreza konstanta a :

$$y = a \frac{1}{x} + 0$$
$$y = kz + A$$

Ne samo, da se bo na grafu na ta način izrisala premica, iz njenega naklona bomo torej lahko celo neposredno razbrali vrednost konstante a (slika 1.4A).



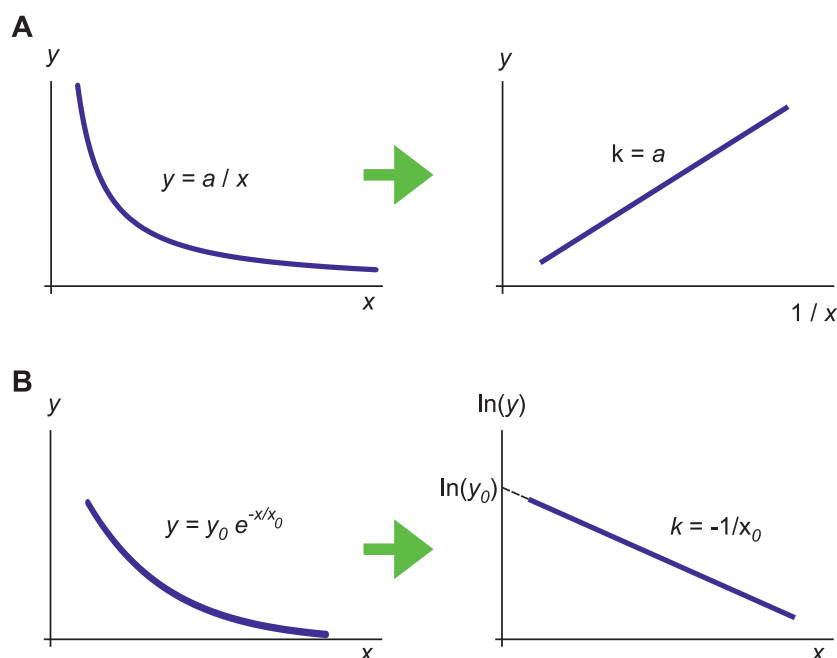
Slika 1.3: Primer uporabe logaritemske skale. Vsi trije grafi prikazujejo isto odvisnost: pogostost pojavljanja raka trebušne slinavke v odvisnosti od starosti (n označuje število primerov raka na 100.000 oseb, podatki so za ženske v Avstraliji in so povzeti po [2]). A) Graf z linearnima osema. Iz njega se lepo vidi, koliko primerov raka je pričakovati pri starostih nad 50 let, podatki za vse nižje starosti pa so tako blizu ničle, da razlik med njimi iz grafa ne moremo razbrati. B) Iste podatke narišemo z logaritmiranjem, tj. na navpično os ne nanašamo vrednosti n ampak vrednost $\log(n)$. Na tem grafu lahko brez težav razlikujemo vrednosti podatkov na celotnem razponu, a se moramo malo potruditi, da vrednosti pravilno odčitamo. Kolikšna je npr. pogostost raka pri starosti 60 let? C) Graf lahko še lepše predstavimo z logaritemsko skalo in ustreznimi pomožnimi črtami. Glavne črte na takem grafu so pri potencah deset, pomožne pa pri ustreznih vmesnih vrednostih: med 1 in 10 so pomožne črte pri vrednostih 2,3,4 ..., med 10 in 100 so pomožne črte pri 20, 30, 40 ... Na tem grafu brez težav razberemo, da je vrednost n pri 60 letih malo nad prvo pomožno črto nad 10^1 , tj. malo nad 20. Tudi z vrednostmi pri nizkih starostih ni težav: vidimo, da pri 20 letih za rakom trebušne slinavke zboli 0.2 ženske od 100.000, pri 40 pa malo nad 2 od 100.000.

Iz eksponentne funkcije linearno dobimo z logaritmiranjem, tj. izvedemo zamenjavo spremenljivke y v $z = \ln y$. Primerjajmo logaritem eksponentne funkcije $y = y_0 e^{-x/x_0}$ z linearno:

$$\ln y = -\frac{1}{x_0} x + \ln y_0$$

$$z = k x + A$$

Pri eksponentni funkciji torej namesto y v odvisnosti od x narišemo $z = \ln x$ v odvisnosti od x in spet se bo na grafu prikazala premica (slika 1.4B). Naklon premice k bo enak $-1/x_0$, če pa premico podaljšamo do izhodišča, pa iz njenega presečišča z navpično osjo razberemo še vrednost $\ln y_0$. Pravzaprav se



Slika 1.4: Dva primera linearizacije funkcij. A) Linearizacija obratnega sorazmerja $y = a/x$. Premico dobimo, če namesto y v odvisnosti od x narišemo y v odvisnosti od $1/x$. Naklon premice je enak a . B) Eksponentno funkcijo lineariziramo z logaritmiranjem: namesto y v odvisnosti od x narišemo $\ln y$ v odvisnosti od x . Spet lahko iz grafa neposredno razberemo vrednosti konstant eksponentne funkcije.

tudi z uporabo logaritemske skale, ki smo jo prikazali na sliki 1.3, eksponentne odvisnosti linearizirajo. Še več, če na grafu z logaritemsko lestvico vidimo premico, takoj vemo, da graf prikazuje eksponentno odvisnost. Ker je na sliki 1.3C približno premica, lahko torej sklepamo, da se prikazana pogostost raka z leti povečuje približno eksponentno. Če bi se pojavljanje raka z leti povečevalo drugače (npr. linearno, kvadratno ali kubično s časom), na logaritemskem grafu ne bi dobili premice.

Primer zapletene linearizacije je tudi znamenit Arrheniusov diagram, ki ga uporabljajo v kemiji in je predstavljen v primeru 1.7, primer 1.8 pa prikazuje uporabo log-log grafa.

Primer 1.7: Arrheniusov diagram

Arrheniusov diagram, ki ga v kemiji uporabljajo za določanje aktivacijske energije, je lep primer uporabe linearizacije grafa. Pri preprostih kemijskih reakcijah zvezo med konstanto reakcijske hitrosti k , aktivacijsko energijo W_a in temperaturo T opiše enačba

$$k = Ae^{-W_a/RT},$$

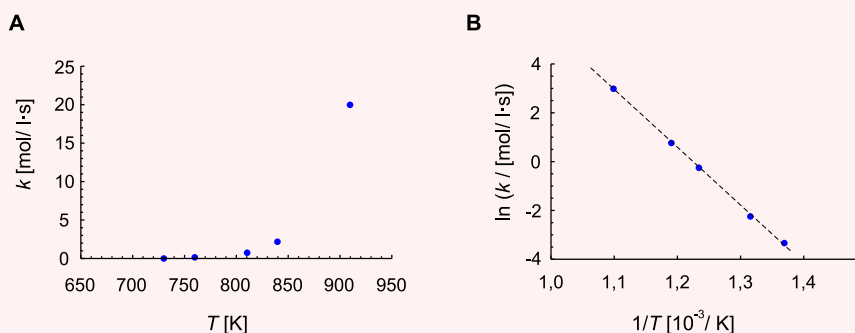
kjer je A neka konstanta, R pa plinska konstanta. V eksperimentu izmerijo k v odvisnosti od T . Če narišemo graf $k(T)$, dobimo hitro naraščajočo funkcijo iz katere bi težko kaj ugotovili (slika A, eksponent v zgornji enačbi je sicer negativen, a je tudi temperatura v imenovalcu in je zato celotna funkcija naraščajoča). Arrheniusovo enačbo lineariziramo tako, da narišemo $\ln k$ v odvisnosti od $1/T$ (slika B):

$$\ln k = -\frac{W_a}{R} \frac{1}{T} + \ln A.$$

Aktivacijsko energijo nato določimo iz grafa, saj je naklon dobljene premice enak $-W_a/R$.

Za ilustracijo si pogledjmo tipični kemijski primer: določanje aktivacijske energije za razpad etanala (povzeto po [3]). V tabeli sta najprej zapisana izmerjena k in T , za linearizacijo pa moramo izračunati še $\ln k$ in $1/T$ ter nato v graf narisati prvega v odvisnosti od drugega.

T [K]	730	760	810	840	910
k [mol/l·s]	0,035	0,105	0,789	2,17	20
$1/T$ [10^{-3} / K]	1,37	1,32	1,23	1,19	1,10
$\ln(k/(\text{mol/l} \cdot \text{s}))$	-3,4	-2,3	-0,23	0,77	3,0



A) Graf odvisnosti k od T – krivulja je naraščajoča, kaj več pa o njej na prvi pogled težko rečemo. B) Linearizirana krivulja, na kateri prikazujemo $\ln k$ v odvisnosti od $1/T$ (točke z višjo temperaturo so na tem grafu na levi strani). Na tem grafu takoj vidimo, da meritve zares ustrezajo Arrheniusovi enačbi, saj ležijo na premici. Poleg tega lahko iz naklona premice brez težav določimo aktivacijsko energijo, saj je naklon enak $-W_a/R$.

Primer 1.8: alometrija

Zanimive primere uporabe matematične analize v živem svetu najdemo v alometriji. Alometrija je veda, ki preučuje spreminjanje fizioloških značilnosti organizmov v odvisnosti od njihove velikosti. Tipično vprašanje alometrije je npr.: ali je med hitrostjo bitja srca miši in slona kakšna povezava? Izkaže se, da take povezave pogosto zares obstajajo in jih lahko v splošnem opišemo z enačbo:

$$f = am^{\alpha}, \quad (1.15)$$

kjer je f neka telesna značilnost, m je masa organizma v kg, a in α pa sta alometrični konstanti, ki definirata odvisnost med f in m .

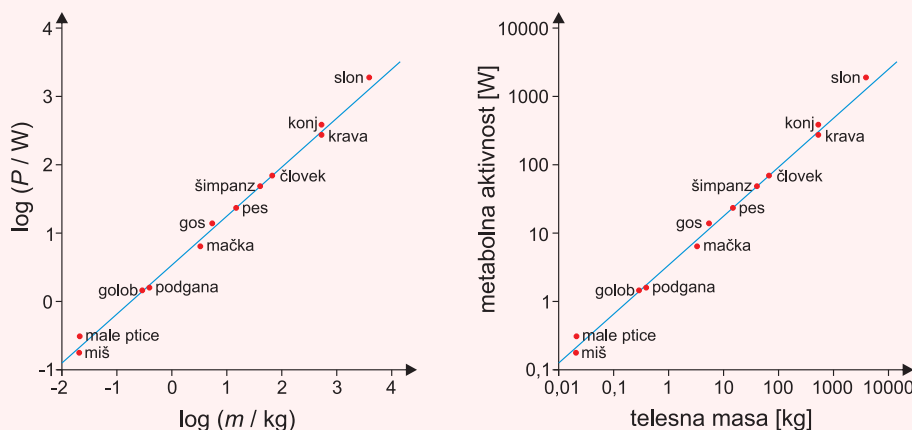
Enostaven primer alometričnih povezav so povezave med velikostjo, površino in prostornino telesa. Ker se gostota telesa z velikostjo ne spreminja bistveno, lahko predpostavimo, da je prostornina telesa kar približno sorazmerna masi, $V \propto m$. Če predpostavimo, da oblika telesa ni bistveno odvisna od višine, velja, da je prostornina telesa sorazmerna tretji potenci višine ($V \propto h^3$), površina pa drugi ($S \propto h^2$). Za površino telesa torej velja alometrična zveza $S \propto m^{2/3}$.

Alometrične zveze najlepše prikažemo v log-log grafih, saj z logaritmiranjem En. 1.15 dobimo:

$$\ln f = \alpha \ln m + \ln a. \quad (1.16)$$

Če torej narišemo $\ln f$ v odvisnosti od $\ln m$, dobimo v grafu premico, katere naklon je enak alometrični konstanti α .

Ena bolj znanih alometričnih zakonitosti je t. i. Kleiberjev zakon, ki povezuje metabolno aktivnost organizma z njegovo maso in velja za živali od miši do slona. Spodnja slika prikazuje log-log graf Kleiberjevega zakona (povzeto po [4]; za vajo navajamo dva različna, a ekvivalentna prikaza):



Vse točke v log-log grafu padejo na premico, kar pomeni, da zveze med metabolno aktivnostjo in maso telesa niso naključne, ampak so podvržene alometrični zvezi. Dobljena premica ima naklon približno 0,75 (če po x osi premaknemo za štiri enote, se po y osi premaknemo približno za tri enote, pri čemer ena enota na log-grafu seveda

pomeni faktor 10). Od miši do slona torej velja, da je metabolna aktivnost organizma sorazmerna masi na potenco 0,75.

Zakaj je alometrični eksponent α za metabolno aktivnost ravno 0,75? Če bi predpostavili, da so vse celice v telesu živali približno enako velike in porabijo približno enako energije, bi bila energijska poraba organizma sorazmerna številu celic in posledično njegovi masi in vrednost α bi bila približno 1. Druga možnost bi bila, da je poraba energije sorazmerna sposobnosti telesa, da odvečno energijo oddaja s toploto. Po tem scenariju bi bila energijska poraba sorazmerna površini telesa, in bi bil α enak $2/3 = 0,67$. Dejanska vrednost je med obema ocenama in znanstveniki zadovoljive razlage Kleiberjevega zakona pravzaprav še ne poznajo.

Za vajo odčitavanja z logaritamskih lestvic poskusimo iz zgornjega grafa odčitati metabolno aktivnost konja. Iz grafa razberemo, da je ta ravno na sredini med 100 W in 1000 W. Vendar to ni 550 W, saj je skala logaritamska. Upoštevati moramo, da je konj pol enote nad 100 W in je njegova metabolna aktivnost torej $10^{2,5} \text{ W} \approx 300 \text{ W}$. Na srečo pa isti faktorji veljajo tudi na drugih koncih lestvice: na sredini med 1 in 10 je približno vrednost 3, med 10 in 100 približno 30 itd.

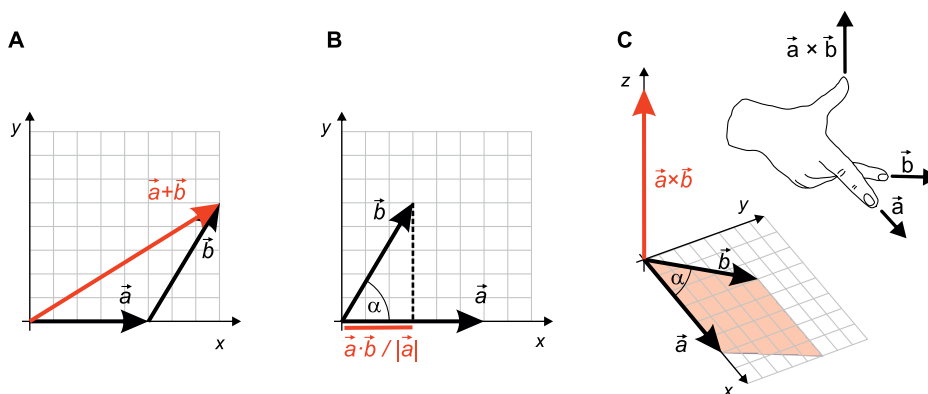
1.5 Še več matematike

Z napredkom znanosti je tudi matematika postajala vse bolj napredna in zapletena. Za obvladovanje črede ovc sta zadostovala štetje in seštevanje. Za določanje površine njiv in travnikov smo se morali naučiti množenja in geometrije. Pri opisovanju obnašanja ionov v možganih pri slikanju z magnetno resonanco, pa ne moremo brez matematične operacije, ki se jih reče vektorski produkt. Nekaterih pojavov v naravi pač ne moremo zadovoljivo opisati brez določenih naprednih matematičnih pojmov. V tem razdelku bomo zato ponovili nekaj matematike, ki je zaradi zapletenosti v kliniki sicer ne bomo srečevali prav pogosto, kljub temu pa je nepogrešljivo orodje pri razumevanju nekaterih pojavov v naravi. Najprej bomo opisali osnovne operacije z vektorji, nato pa še operaciji odvod in integral.

1.5.1 Vektorji

Nekatere količine imajo le velikost, druge pa imajo tudi smer. Prvim rečemo *skalarji* in drugim *vektorji*. Lep primer skalarne količine je temperatura, ki seveda nima smeri. Primer vektorske količine pa je hitrost, saj npr. ni enako, če kri teče po aorti s hitrostjo 5 cm/s stran od srca ali z isto hitrostjo proti srcu. Če lahko vrednost skalarnih količin opišemo le z eno številko, pa za vektorje potrebujemo v splošnem kar tri, saj jih zapišemo po komponentah, ki povedo

velikosti količine v smeri danih koordinatnih osi v prostoru. Vektor hitrosti v prostoru npr. zapišemo kot $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, kjer so v_x, v_y in v_z velikosti hitrosti v smereh osi x, y in z . Vektor v prostoru si najlažje predstavljamo kot puščico, katere smer je enaka smeri količine, dolžina pa njeni velikosti.



Slika 1.5: Prikaz treh najpogostejših matematičnih operacij z vektorji. A) Seštevanje vektorjev. Vektorja lahko seštejemo grafično, tako da začetek drugega vektorja postavimo na konec prvega, lahko pa jih seštevamo po komponentah. V zgornjem primeru je $\vec{a} = (5,0)$ in $\vec{b} = (3,5)$, zato je vsota enaka $\vec{a} + \vec{b} = (8,5)$. B) Skalarni produkt je sorazmeren dolžini projekcije enega vektorja na drugega. Izračunamo ga lahko kot $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$. C) Vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vektor, ki je pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Njegova velikost je enaka ploščini paralelograma med $\vec{a}$ in $\vec{b}$, ki jo izračunamo kot $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha$. Smer vektorskega produkta lahko določimo s prikazanim »pravilom desne roke«: s kazalcem *desne* roke pokažemo v smer prvega vektorja v produktu, s sredincem v smer drugega vektorja v produktu in palec nam bo pokazal v smer vektorskega produkta. Če vrstni red vektorjev zamenjamo, bo vektorski produkt kazal ravno v nasprotno smer.

Seštevanje vektorjev je enostavno, saj jih lahko seštejemo grafično z zlaganjem vektorskih puščic ene za drugo, ali pa preprosto seštejemo vsako komponento posebej (slika 1.5A). Poleg seštevanja vektorjev bomo v nekaterih situacijah srečali tudi dve malo bolj abstraktni operaciji »množenja« vektorjev, to sta skalarni in vektorski produkt.

Skalarni produkt je matematična operacija, ki izračuna dolžino projekcije drugega vektorja na prvega, pomnoženo z dolžino prvega vektorja (slika 1.5B). Dolžine so skalarji, zato je tudi rezultat skalarnega produkta skalar. Skalarni produkt je največji, če sta vektorja vzporedna in enak nič, če sta pravokotna. Zapišemo ga s piko med vektorjema (v angleščini se mu re-

če tudi »dot product«), izračunamo pa s pomočjo kosinusa kota med njima: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$.

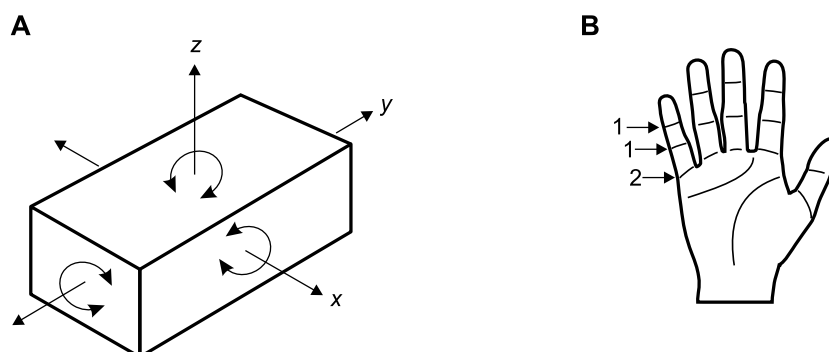
Vektorski produkt dveh vektorjev srečamo npr. pri opisu vrtenja in pa pri opisu pojavov v magnetnem polju. Rezultat vektorskega produkta je vektor, ki je pravokoten na oba vektorja v produktu, njegova velikost pa je enaka ploščini paralelograma, ki ga vektorja oklepata (slika 1.5C). Zapišemo ga s križcem med vektorjema (v angleščini se mu reče tudi »cross product«), njegovo velikost pa izračunamo s pomočjo sinusa kota med vektorjema $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha$. Vektorski produkt dveh vektorjev bo torej največji, če sta vektorja pravokotna in bo enak nič, če sta vektorja vzporedna. Za določanje smeri vektorskega produkta lahko uporabimo katero od mnogih pravil, ki so si jih izmislili v ta namen. Primer »pravila desne roke« je prikazan na sliki 1.5C. Da vektorski produkt ni najbolj običajna matematična operacija, vidimo tudi iz njegove antikomutativnosti, se pravi da je njegov rezultat odvisen od vrstnega reda vektorjev v produktu: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

1.5.2 Stopnje prostosti

Pri opisovanju gibanja pogosto srečamo pojem *prostostna stopnja*. Ta nam pove, koliko neodvisnih podatkov (koordinat) potrebujemo za opis stanja nekega sistema. Za opis položaja točke na premici npr. potrebujemo en podatek (x), za opis položaja točke v ravnini potrebujemo dva podatka (x in y), v prostoru pa tri (x , y in z). Če opisujemo gibanje razsežnega predmeta, poleg treh podatkov o njegovem položaju v koordinatnem sistemu v splošnem potrebujemo še tri podatke o njegovi orientaciji v prostoru (slika 1.6A). O prostostnih stopnjah govorimo tudi pri opisovanju možnih premikov sklepov – gibanje dveh sklepov na prstu roke je omejeno le na eno prostostno stopnjo, najnižji sklep pa omogoča gibanje v dveh smereh (slika 1.6B).

1.5.3 Odvod in integral

Ko smo se v srednji šoli učili o odvodu in integralu (tj. o diferencialnem računu), sta se nam zdela predvsem primera zelo abstraktne in neuporabne matematike. A v resnici je ravno obratno. Odvod in integral sta namreč nepogrešljiva pri natančnem opisovanju naravnih pojavov in ni naključje, da je bil eden njunih izumiteljev ravno Isaac Newton. Dejstvo je, da sta ti matematični operaciji malo zahtevnejši in ju zato v ordinaciji ne srečamo. Vseeno pa si bomo tu ogledali njune glavne značilnosti, saj nam bosta omogočala boljše ra-



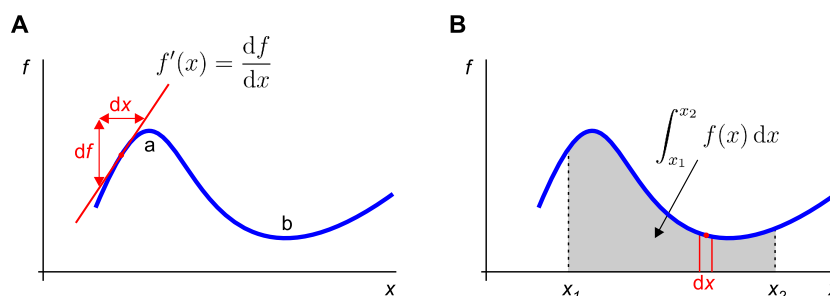
Slika 1.6: A) Za opis položaja predmeta v prostoru potrebujemo šest prostostnih stopenj, saj lahko predmet premikamo v treh neodvisnih smereh ter vrtimo okoli treh neodvisnih osti. B) Vsak od prstov na roki ima dva sklepa z eno stopnjo prostosti, enega pa z dvema. Slednjega lahko namreč premikamo v dveh neodvisnih smereh.

zumevanje nekaterih izpeljav naravnih zakonov, pa tudi boljše razumevanje znanstvene literature.

Odvod funkcije podaja njeno strmino, tj. naklonski koeficient tangente na to funkcijo v izbrani točki (slika 1.7A). Z drugimi besedami, če je odvod funkcije $f(x)$ velik, se vrednost funkcije s spreminjanjem x zelo spremeni, če pa je odvod funkcije majhen, se njena vrednost s spreminjanjem x spremeni malo. Odvod funkcije $f(x)$ ponavadi označimo s črtico kot $f'(x)$, lahko pa tudi z ulomkom df/dx ali pa s piko $\dot{f}(x)$, pri čemer si diferencial dx lahko predstavljamo kot zelo kratek interval Δx . Ker je strmina funkcije $f(x)$ v splošnem odvisna od x , je seveda tudi odvod $f'(x)$ funkcija neodvisne spremenljivke x . V minimumih in maksimumih funkcije bo njen odvod enak nič, saj je tangenta na funkcijo tam vodoravna. Pri računanju odvodov najbolj pogostih funkcij si pomagamo s pravili, ki so navedena v tabeli A.3 v dodatku na strani 355.

Določeni integral funkcije podaja ploščino med to funkcijo in vodoravno osjo na izbranem intervalu (slika 1.7B). Rezultat določenega integrala je torej številka. Določeni integral funkcije $f(x)$ na intervalu od x_1 do x_2 zapišemo kot $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$. Pri računanju določenih integralov si pomagamo z operacijo, ki je obrata odvajanju: $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1)$, kjer je $F(x)$ t. i. nedoločeni integral, ki je obratna funkcija odvoda: $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F(x) = \int f(x) dx$. Pri računanju integralov najbolj pogostih funkcij si torej pomagamo z obratnimi pravili, kot pri odvajanju (tabela A.3 v dodatku na strani 355).

In zakaj sta odvod in integral pri opisovanju narave tako nepogrešljiva? Izkaže se, da so linearne zveze v fizikalnih zakonih, ki smo se jih učili v osnov-



Slika 1.7: A) Odvod funkcije $f(x)$ je enak njeni strmini, tj. naklonskemu koeficientu tangente na funkcijo. Odvod funkcije v dani točki je torej enak spremembi vrednosti funkcije (df) na zelo kratkem intervalu (dx): $f'(x) = df/dx$. Če funkcija narašča, je odvod pozitiven, če pa pada, je negativen. V ekstremih funkcije je njen odvod enak nič (točki a in b). B) Določeni integral funkcije je enak ploščini pod to funkcijo na danem intervalu. Ta ploščina je enaka vsoti ploščin pravokotnikov z zelo kratkimi stranicami dx , pri čemer je ploščina enega takega pravokotnika pri izbranem x enaka $f(x) dx$.

ni in srednji šoli, le približki dejanskih zvez, ki jih pravilno zapišemo z odvodom in integralom. Vsi npr. poznamo znano zvezo med potjo, hitrostjo in časom: $v = s/t$ oziroma $s = vt$, vendar pa je ta zveza uporabna le, če je hitrost konstantna (kar se v praksi zgodi redko). Če se hitrost s časom spreminja, moramo njeno vrednost izračunati kot $v = ds/dt$, prepotovano pot pa s pomočjo integrala $s = \int_{t_1}^{t_2} v dt$. Podobno je tudi z mnogimi drugimi zvezami med količinami, ki jih bomo srečali pri medicini, npr. z zvezo med prostornino vdihanega zraka in hitrostjo dihanja (pretokom), ki jih v kliniki analiziramo s postopkom imenovanim *spirometrija* (primer 1.9).

Primer 1.9: zveza med prostornino in pretokom vdihanega zraka

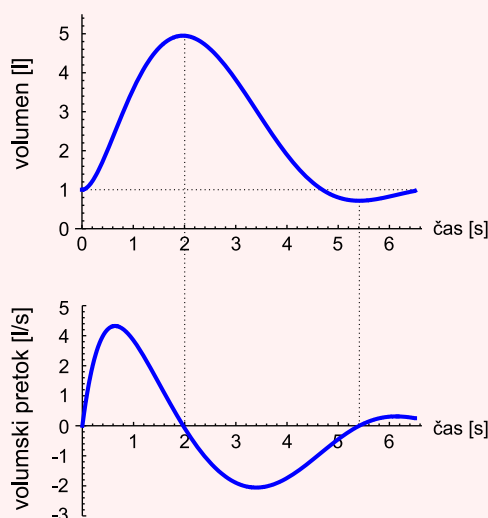
Za razumevanje dihanja moramo dobro razumeti zvezo med prostorninskim pretokom zraka v pljuča in prostornino vdihanega zraka, ki se v kliniki analizira pri postopku imenovanem *spirometrija*. Spoznali bomo, da te zveze ne moremo zadovoljivo opisati brez poznavanja odvoda in integrala.

Med spirometrijo pacient diha v napravo imenovano spirometer, ki določi prostornino vdihanega zraka (V , v litrih) in prostorninski pretok dihanja (Φ_V , v litrih na sekundo), na osnovi katerih nato zdravnik pulmolog sklepa o stanju pacientovih pljuč. Spirometer lahko izmeri le eno količino, drugo pa izračuna iz izmerjene, saj sta vdihnjena prostornina in pretok tesno povezana. Če bi npr. 2 s vdihavali s pretokom 2 l/s, bi se nam prostornina pljuč povečala za 4 l. Velja tudi obratno: če bi se nam prostornina pljuč v 2 s povečala za 4 l, bi lahko sklepali, da je bil pretok zraka med dihanjem

2 l/s. Sklepamo torej, da je med vdihnjeno prostornino zraka in njegovim pretokom povezava:

$$\Phi_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} \text{ oz. } \Delta V = \Phi_V \Delta t. \quad (1.17)$$

Pri svojem razmisleku smo nehote predpostavili, da je prostorninski pretok *konstanten*. Pa je res? Spodnja slika prikazuje dejanske spirometrične meritve:



Vidimo, da prostorninski pretok v resnici sploh ni konstanten, ampak je funkcija časa $\Phi_V(t)$ in se med vdihom spreminja vse od 0 l/s do 4,5 l/s. Katero vrednost pretoka moramo torej pri izračunu povečanja prostornine pljuč vstaviti v En. 1.17?

Z enačbama 1.17 torej ne moremo dobro opisati zveze med vdihnjeno prostornino in pretokom, saj sta preveč poenostavljeni in predpostavljata, da je pretok zraka konstanten. V naravi pa so količine redko konstantne, zato naš preprost linearen opis odpove. Iz zagate nas seveda rešita odvod in integral: En. 1.17 velja tem bolje, čim krajši interval Δt dihanja opazujemo, saj se v zelo kratkem času prostorninski pretok pač ne bo veliko spremenil. Vidimo, da je v splošnem prostorninski pretok pravzaprav odvod prostornine po času, vdihnjena prostornina pa je integral prostorninskega pretoka. Zvezo med njima moramo torej napisati kot

$$\Phi_V = \frac{dV}{dt} \text{ oz. } \Delta V = \int_{t_1}^{t_2} \Phi_V dt, \quad (1.18)$$

kjer smo z ΔV označili prostornino, ki jo vdihnemo med časom t_1 in časom t_2 .

Naša razumevanje odvoda se seveda lepo sklada z zgornjo sliko: ko prostornina narašča, je pretok pozitiven, ko prostornina pada, je pretok negativen in ko je prostornina maksimalna ali minimalna, je pretok enak nič.

Opozorimo naj še, da znamo integrale in odvode enostavno izračunati le za najpreprostejše funkcije, ki so predstavljene v tabeli A.3 v dodatku na strani

355. V resnici pa se pogosto zgodi, da količin v naravi s preprostimi funkcijami kot so e^x , $\sin x$, x^n ipd. sploh ne moremo opisati. Tudi v takih primerih zveze z odvodom in integralom veljajo, le računanje z njimi je težje. V primeru s spirometrijo enačba 1.18 velja, pa čeprav izmerjenih $\Phi_V(t)$ in $\Delta V(t)$ sploh ne znamo zapisati s pomočjo enostavnih funkcij. Računanje integralov in odvodov pa ne predstavlja težave za računalnik v spirometru, ki brez težav na osnovi izmerjenega $\Phi_V(t)$ izračuna $\Delta V(t)$ ali obratno.

Del II

Mehanika

Poglavje 2

Gibanje

Gibanje je osnova naravnih pojavov, zato ni naključje, da so se z vprašanji gibanja intenzivno ukvarjali že stari Grki. Brez gibanja se ne bi nikoli nič zgodilo, kemijske reakcije ne bi potekale, na svetu ne bi bilo življenja in tudi nas ne, da bi o njem razmišljali. Opisovanje narave bomo zato začeli prav z opisovanjem gibanja in njegovega nasprotja ravnovesja, kasneje pa se bomo spomnili še znamenite Newtonove ugotovitve, da so za spremembe gibanja odgovorne sile in navori.

2.1 Opisovanje gibanja

Telo se giblje, če se mu s časom spreminja *položaj* v prostoru. Kako hitro se spreminja položaj opišemo s *hitrostjo*, za opisovanje sprememb gibanja pa uporabimo *pospešek*, ki pove, kako hitro se spreminja hitrost. Če se telo giblje le v eni smeri, npr. v smeri osi x , hitrost gibanja izračunamo kot majhno spremembo položaja (dx) v kratkem času (dt):

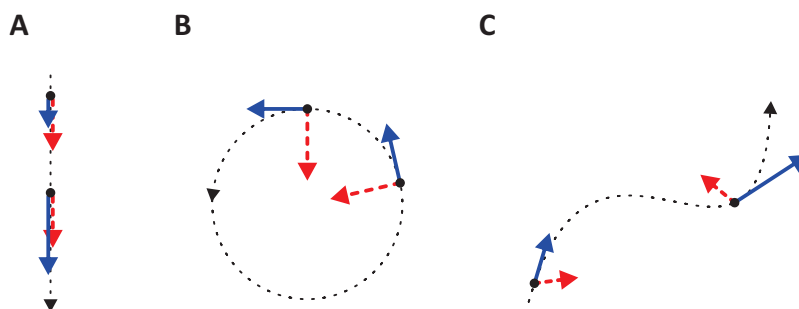
$$v = \frac{dx}{dt}, \quad (2.1)$$

pospešek pa določimo iz podatka, kolikšna je v kratkem času dt (majhna) sprememba hitrosti dv :

$$a = \frac{dv}{dt}. \quad (2.2)$$

Matematiki bi rekli, da je hitrost odvod poti po času, pospešek pa odvod hitrosti po času. Enota za hitrost je m/s , enota za pospešek pa m/s^2 . Nekaj tipičnih velikosti pospeškov iz vsakdanjega življenja je navedenih v primeru 2.1.

V treh dimenzijah so položaj, hitrost in pospešek vektorji. Položaj opišemo s krajevnim vektorjem $\vec{r}$, katerega koordinate so enake koordinatam položaja telesa v prostoru. Vektor hitrosti $\vec{v}$ kaže v smeri gibanja, vektor pospeška $\vec{a}$ pa kaže v smer spreminjanja hitrosti. Če je hitrost konstantna, pravimo, da je gibanje *enakomerno*, če pa je konstanten pospešek, pravimo, da je gibanje *enakomerno pospešeno*. Če gibanje poteka le v eni smeri, je gibanje *premo*. Posebej zanimivo gibanje je *vrtenje* oz. *kroženje*, saj se pri njem telo neprestano giblje, pa se kljub temu po določenem času spet znajde na začetku. Trije primeri gibanja so predstavljeni na sliki 2.1.



Slika 2.1: Shematični prikaz treh gibanj. Pikčasta črta prikazuje spreminjanje položaja s časom, moder vektor je hitrost, rdeč črtkan vektor pa je pospešek. A) Prosti pad. Prosti pad je premo enakomerno pospešeno gibanje, saj se pri njem telo giblje le vzdolž navpične smeri, hkrati pa je pospešek konstanten (enak je težnemu pospešku g). Ker je vektor hitrosti vedno vzporeden vektorju pospeška, se smer hitrosti ne spreminja, povečuje pa se njena velikost. B) Enakomerno kroženje. Velikost hitrosti se ne spreminja, zato pa se neprestano spreminja njena smer. Vektor pospeška je torej vedno pravokoten na vektor hitrosti; hitrost kaže v smeri gibanja, pospešek pa proti osi kroženja. C) V splošnem vektor hitrosti vedno kaže v smeri gibanja, vektor pospeška pa v smeri spreminjanja hitrosti. Pravokotna komponenta pospeška na hitrost skrbi za obračanje smeri hitrosti, vzporedna komponenta pospeška na hitrost pa za spreminjanje velikosti hitrosti. V prvi točki na sliki torej telo pospešuje in zavija v desno, v drugi pa zavira in zavija v levo.

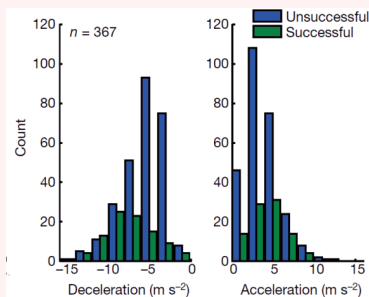
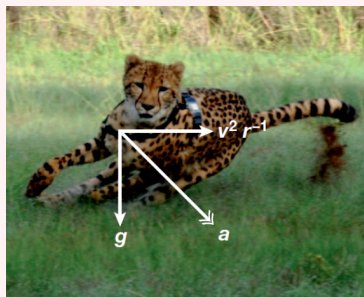
Primer 2.1: pospeški okoli nas

V vsakdanjem življenju smo si pridobili nekaj občutka za velikosti razdalj in časa (predstavljamo si, kaj sta 1 m in 1 s), o velikosti pospeškov pa moramo malo premisliti. Najbolj naraven pospešek na Zemlji je težni pospešek $g \approx 10 \text{ m/s}^2$, s katerim padamo pri prostem padu. Še bolj od prostega pada si verjetno predstavljamo pospeševanje avtomobila. Če pri tipičnem avtu pritisnemo do konca na plin, bo od 0 km/h do 100 km/h pospešil v približno 12 s. Pospešek, ki ga pri tem čutimo, je torej

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{100 \text{ km}}{\text{h} \cdot 12 \text{ s}} = \frac{100000 \text{ m}}{3600 \text{ s} \cdot 12 \text{ s}} = 2,3 \text{ m/s}^2.$$

Pospešek pospeševanja avtomobila je torej precej manjši od g . Človeško telo naj bi brez večjih težav preneslo pospeške do približno petkratnika težnega pospeška ($5g$), zato pri pospeševanju avtomobila ni nevarnosti, da bi se zaradi prevelikega pospeška onesvestili. Drugačna zgodba je pri nesreči. Če se z veliko hitrostjo zaletimo v oviro, se lahko ustavimo v zelo kratkem času in ob tem doživimo ogromen pospešek (pojemek).

Dobri atleti lahko ob začetku teka dosežejo celo nekaj večji pospešek kot navadni avtomobili. Še boljši tekač od ljudi je gepard in nedavna raziskava njegovega teka je pokazala zanimivo podrobnost: za uspešen lov gepard ne potrebuje le velike končne hitrosti teka, ampak predvsem velike pospeške pri pospeševanju, zavijanju in zaviranju (več kot $10g$, glej sliko). Ta ugotovitev niti ni tako presenetljiva, če se spomnimo taktike bega pri mnogih živalih, ki ni le doseganje velike hitrosti, ampak predvsem hitro in nepričakovano zavijanje sem ter tja.



Gepardu so za vrat pritrčili senzorje, ki so natančno beležili njegovo gibanje. Po analizi 367 lovskih tekov se je izkazalo, da je bila uspešnost lova bolj kot s samo hitrostjo teka povezana z doseganjem velikih pospeškov in pojemkov med lovom [5].

2.2 Vrtenje

Vrtenje oz. kroženje je posebna vrsta gibanja (slika 2.1B), ki ga pogosto srečamo, zato si ga oglejmo bolj natančno. Vrtenje je podobno kroženju, le da o

vrtenju ponavadi govorimo, če se telo vrti okoli osi, ki telo prebada, pri kroženju pa telo kroži okoli osi, ki ne gre skozi telo. Vrtiljak se vrti, otrok, ki sedi na vrtiljaku, pa kroži okoli osi vrtiljaka.

Čeprav gre pri vrtenju za gibanje v ravnini in se telesu torej hkrati spreminjata koordinati x in y , pa lahko položaj vrtečega se telesa enolično opišemo tudi le z enim samim parametrom, s kotom zasuka ϕ (tako gibanje ima torej le eno prostostno stopnjo). Vpeljemo lahko tudi *kotno hitrost* ω , ki opisuje, kako hitro se spreminja kot, ter *kotni pospešek* α , ki opisuje, kako hitro se spreminja kotna hitrost:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \quad \text{in} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} . \quad (2.3)$$

Če kote merimo vadianih, pri katerih enote ne pišemo, je enota za kotno hitrost s^{-1} (radian na sekundo), enota za kotni pospešek pa s^{-2} (radian na kvadratno sekundo).

Zveze med kotom, kotno hitrostjo in kotnim pospeškom (ϕ, ω in α) so enake, kot zveze med potjo, hitrostjo in pospeškom pri premem gibanju (x, v in a). Izkaže se, da je analogija med kotnimi in premimi količinami splošna, in da lahko vse enačbe za premo gibanje enostavno prepisemo v enačbe za vrtenje, pri čemer uporabimo analogije

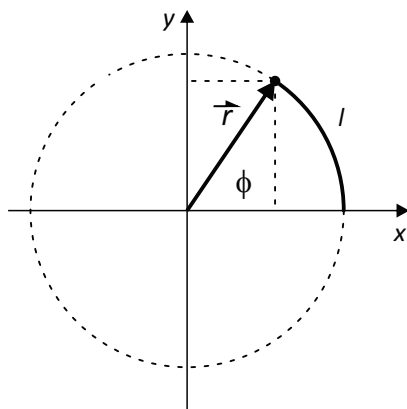
$$x \rightarrow \phi , \quad v \rightarrow \omega \quad \text{in} \quad a \rightarrow \alpha . \quad (2.4)$$

Če npr. pri enakomerno pospešenem gibanju prepotovano pot izračunamo kot povprečna hitrost krat čas, $x = \bar{v}t$, lahko pri enakomerno pospešenem vrtenju opravljen kot izračunamo iz povprečne kotne hitrosti: $\phi = \bar{\omega}t$. Drug primer: ker pri enakomerno pospešenem premem gibanju pot narašča po enačbi $x = \frac{1}{2}at^2$, pri enakomerno pospešenem vrtenju kot narašča po enačbi $\phi = \frac{1}{2}\alpha t^2$. Analogijo med vrtenjem in premim gibanjem bomo kasneje še večkrat srečali.

Pri enakomernem kroženju se velikost hitrosti ne spreminja, neprestano pa se spreminja njena smer (slika 2.1B). Strogo vzeto je torej enakomerno kroženje pospešeno gibanje. Pospešek, ki spreminja smer vektorja hitrosti, kaže proti osi vrtenja, zato ga imenujemo *radialni pospešek* a_r . Izkaže se, da je velikost radialnega pospeška sorazmerna kvadratu kotne hitrosti in radiju kroženja (glej MaFijski primer 2.1):

$$a_r = r\omega^2 . \quad (2.5)$$

Kot bomo videli kasneje, je ta rezultat zelo pomemben za razumevanje delovanja osnovnega laboratorijskega aparata, *centrifuge* (primer 2.3).



Slika 2.2: Pri kroženju je položaj telesa enoznačno določen z radijem kroženja r in s kotom ϕ . Kot po dogovoru merimo od osi x v obratni smeri urinega kazalca. Kotu ϕ ustreza dolžina loka $l = r\phi$ (kot moramo pri tem seveda meriti v radianih). Med kotom ϕ in koordinatama x in y veljata zvezi $x = r \cos \phi$ in $y = r \sin \phi$. Ker je radij konstanten, se pri gibanju spreminja le ϕ , zato je kroženje gibanje z eno prostostno stopnjo.

Pri kroženju lahko definiramo še obhodni čas t_0 , to je čas, ki ga telo potrebuje za en obrat, ter frekvenco vrtenja, ki pove koliko obratov naredi v časovni enoti. Frekvenca je obratna vrednost obhodnega časa

$$\nu = 1/t_0 . \quad (2.6)$$

Enota za frekvenco je ponavadi Hertz, $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$, pogosto pa srečamo tudi RPM, to je **r**otations **p**er **m**inute oz. obrati na minuto. Iz dejstva, da en obrat ustreza obratu za kot 2π , ugotovimo zvezo med frekvenco in kotno hitrostjo:

$$\omega = 2\pi\nu , \quad (2.7)$$

pri čemer je tako izračunana kotna hitrost izražena v radianih na sekundo oz. s^{-1} .

Bolj kot je neka točka oddaljena od osi vrtenja, večjo krožnico opisuje pri vrtenju. Pri dani kotni hitrosti vrtenja se torej bolj oddaljene točke gibljejo z večjo obodno hitrostjo kot točke bližje osi. S pomočjo geometrije (slika 2.2) lahko izpeljemo zveze med kotnimi in obodnimi količinami:

$$l = r\phi , \quad v = r\omega \quad \text{in} \quad a_t = r\alpha . \quad (2.8)$$

Tu je l dolžina loka na krožnici, ki ustreza kotu ϕ , r je radij krožnice, v pa obodna hitrost. Naj opozorimo, da moramo v zgornji enačbi kot ϕ meriti v radi-

anih. Če se zavrtimo za en cel krog, opravimo kot $\phi = 2\pi$ in pot $l = 2\pi r$. Pospešek a_t je tangencialni pospešek, ki je prisoten pri neenakomernem kroženju. V takem primeru se namreč poleg smeri hitrosti spreminja tudi njena velikost, za kar pa poskrbi ravno tangencialni pospešek, ki kaže v smeri gibanja, se pravi v smeri tangente na krožnico. Pri enakomernem kroženju je ω konstanta, $\alpha = 0$, zato velja tudi $a_t = 0$.

Primer 2.2: zobni sveder

Zobni sveder se lahko vrti s frekvenco več kot 250 000 RPM. Izračunajmo obodno hitrost površine svedra, če je radij svedra 0,5 mm?

Iz zvez med obodnimi in kotnimi količinami (en. 2.8) izračunamo

$$v = r\omega = r2\pi\nu = \frac{2\pi \cdot 0,0005 \text{ m} \cdot 250000}{60 \text{ s}} = 13 \text{ m/s} .$$

Za vajo izračunajmo še, koliko obratov naredi sveder med ustavljanjem, če se od polne hitrosti do mirovanja ustavi v dveh sekundah? Predpostavimo, da se ustavlja enakomerno pojemajoče.

Ker se sveder ustavlja enakomerno pojemajoče, je njegova povprečna kotna hitrost ravno polovica začetne, celotni kot, ki ga naredi pri ustavljanju, pa lahko po analogiji z enačbo $s = \bar{v}t$ izračunamo z $\varphi = \bar{\omega}t = 2\pi\bar{\nu}t$. Ker en obrat ustreza kotu 2π radianov, lahko število obratov med ustavljanjem izračunamo iz

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\bar{\omega}t}{2\pi} = \bar{\nu}t = \frac{125000 \cdot 2 \text{ s}}{60 \text{ s}} = 4167 .$$

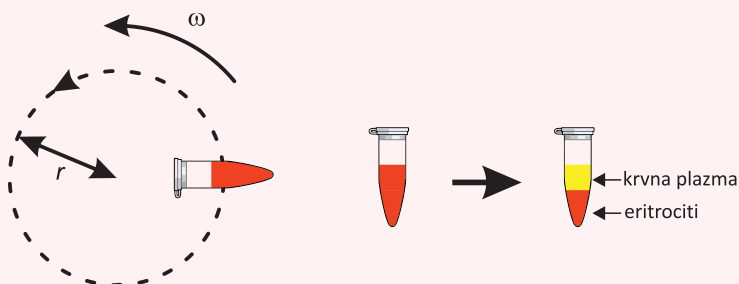
Če bi se sveder zares ustavljal tako dolgo, bi lahko torej med ustavljanjem izvrtal še kar precejšnjo luknjo.

Primer 2.3: centrifuga

Centrifuga je ena najosnovnejših laboratorijskih naprav. Uporabljamo jo za ločevanje delcev ali raztopin glede na gostoto: če epruveto z raztopino zavrtimo, jo izpostavimo radialnemu pospešku in gostejši deli raztopine bodo potonili proti dnu epruvete, redkejši pa ostali zgoraj. Podobno bi se zgodilo tudi zaradi teže, le da je lahko radialni pospešek veliko večji od težnega in zato ločevanje v centrifugi poteka veliko hitreje.



Različni postopki zahtevajo različno velike radialne pospeške. Za ločevanje rdečih krvničk od krvne plazme je ponavadi dovolj nekaj minut vrtenja pri nekaj tisoč g (rdeče krvničke so gostejše od plazme, zato končajo na dnu epruvete), pri delu s proteini pa uporabljamo ultracentrifuge, ki dosežejo več kot 100 000 RPM oziroma več kot 1 000 000 g !



Pri uporabi centrifug moramo biti pazljivi, saj imajo različne centrifuge različne radije rotorja, zato je pri različnih centrifugah za določen pospešek potrebno nastaviti različne hitrosti vrtenja. Če ima centrifuga npr. radij rotorja 25 cm in jo želimo nastaviti na radialni pospešek 2000 g , ji moramo frekvenco vrtenja nastaviti na

$$a_r = r\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_r}{r}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a_r}{r}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2000 \cdot 10 \text{ m}}{\text{s}^2 \cdot 0,25 \text{ m}}} = 45 \text{ Hz} ,$$

kar ustreza frekvenci 2700 RPM. Pri zgornjem računu smo uporabili izraz za radialni pospešek (en. 2.5) in zvezo med frekvenco in kotno hitrostjo (en. 2.7). Če bi bil radij rotorja manjši, bi morali za enak radialni pospešek nastaviti ustrezno večjo hitrost vrtenja.

Centrifuge uporabljajo tudi pri raziskavah vplivov velikih pospeškov na človeško telo, le da so take centrifuge veliko večje in se zato lahko vrtijo počasi (ameriška vesoljska agencija NASA ima npr. centrifugo s premerom več kot 15 m).

MaFijski primer 2.1: izpeljava radialnega pospeška

Za izpeljavo izraza za radialni pospešek bomo morali uporabiti vse svoje znanje matematike! Izraz bomo izpeljali za enakomerno kroženje ($\alpha = d\omega/dt = 0$), vendar velja tudi v splošnem primeru.

Radialni pospešek bomo izpeljali iz osnovnih definicij. Če hočemo izračunati pospešek gibanja, moramo vedeti, kako se pri gibanju spreminja hitrost, slednjo pa lahko izračunamo, če poznamo spreminjanje položaja. Iz slike 2.2 razberemo, da lahko položaj točke, ki v ravnini (x, y) kroži po krožnici z radijem r , zapišemo s krajevnim vektorjem

$$\vec{r} = (x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi) = r(\cos \phi, \sin \phi). \quad (2.9)$$

Vektor $(\cos \phi, \sin \phi)$ je enotski vektor, ki kaže od osi proti točki na krožnici (za vajo lahko s pomočjo Pitagorovega izreka preverite, da je dolžina tega vektorja zares enaka 1). Kot ϕ se med kroženjem spreminja s časom in sicer kot $\phi = \omega t$.

Vektor hitrosti dobimo, če krajevni vektor odvajamo po času:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\omega(-\sin \phi, \cos \phi). \quad (2.10)$$

Pri odvajanju smo upoštevali naslednje:

- vsako komponento vektorja odvajamo neodvisno
- radij kroga r je konstanta
- kot ϕ je funkcija časa, zato moramo $\cos \phi$ in $\sin \phi$ odvajati posredno, upoštevamo pa tudi $\omega = d\phi/dt$:

$$\frac{d}{dt} \cos \phi = -\sin \phi \cdot \frac{d\phi}{dt} = -\sin \phi \cdot \omega. \quad (2.11)$$

Iz dobljenega izraza za hitrost vidimo, da je velikost vektorja hitrosti enaka ωr , njegova smer pa je pravokotna na krajevni vektor $\vec{r}$. Tudi vektor $(-\sin \phi, \cos \phi)$ ima namreč dolžino 1, njegova smer pa je pravokotna smeri vektorja $(\cos \phi, \sin \phi)$. O pravokotnosti $\vec{r}$ in $\vec{v}$ se lahko prepričate tako, da vektorja skalarno pomnožite in rezultat bo enak 0.

Izračunati moramo še pospešek. Dobimo ga z odvajanjem vektorja hitrosti, pri čemer upoštevamo ista pravila kot zgoraj:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r\omega^2(-\cos \phi, -\sin \phi). \quad (2.12)$$

Z enakim razmislekom kot prej ugotovimo, da je velikost vektorja pospeška enaka $r\omega^2$, njegova smer pa je nasprotna smeri krajevnega vektorja $\vec{r}$ in torej kaže proti osi vrtenja. Pospešek je torej res »radialni« pospešek.

Poglavje 3

Vzroki gibanja in ravnovesje: sile in navori

3.1 Sile

Vprašanje o vzrokih gibanja, s katerim so se stari Grki neuspešno ubadali, je uspelo dokončno razrešiti šele Isaacu Newtonu ob koncu 17. stoletja. Newton je ugotovil, da so vzrok za spremembe gibanja *sile*, njegove ugotovitve pa še danes povzamemo v treh Newtonovih zakonih:

1. Če je rezultanta sil na telo enaka nič, se telo giblje premo enakomerno ali pa miruje.
2. Pospešek telesa a je sorazmeren rezultanti sil na telo F , sorazmernostni koeficient pa je masa telesa m :

$$\vec{F} = m\vec{a} . \quad (3.1)$$

3. Če telo 1 deluje na telo 2 s silo $\vec{F}_{12}$, potem telo 2 deluje na telo 1 z nasprotno enako silo, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

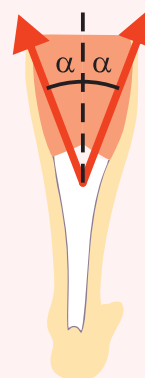
Enota za silo je newton, pri čemer iz 2. Newtonovega zakona (en. 3.1) razberemo, da velja $N = \text{kg m/s}^2$. Ne pozabimo, da rezultanto sil izračunamo kot vektorsko vsoto vseh sil na telo. Čeprav so sile definirane preko Newtonovih zakonov in je njihova glavna lastnost spreminjanje gibanja teles, pa s silami v splošnem opisujemo vsakršno mehansko delovanje telesa na telo in lahko npr. povzročajo tudi deformacije telesa (glej primera 3.3 in 3.4).

Primer 3.1: teža in masa

V vsakdanjem pogovoru pojma *teža* in *masa* pogosto uporabljamo enakovredno, vendar pa je s pojmom *teža* pri fiziki v resnici mišljena *sila teže*, do katere pride zaradi gravitacijskega privlaka. Strogo vzeto se torej masa meri v kilogramih, teža pa v newtonih. Na površini Zemlje je teža človeka z maso 100 kg enaka 981 N. Če bi ta človek potoval na Luno, bi bila njegova masa še vedno 100 kg, teža pa le še 162 N, saj je gravitacijski pospešek na površini Lune približno šest krat manjši, kot na Zemlji.

Primer 3.2: seštevanje sil mišic

V zelo poenostavljenem anatomskem modelu noge je ahilova tetiva napeta z dvoglavo mečno mišico (gastrocnemius). Kolikšna je celotna sila te mišice na ahilovo tetivo, če je vsak od krakov mišice napet s silo $F_M = 300$ N, kot med navpičnico in silama pa je $\alpha = 17^\circ$? Sili mišice kažeta vsaka v svojo smer, zato ju moramo sešteti vektorsko. V našem primeru sta sili simetrični, zato se bosta vodoravni komponenti sil odšteli, navpični pa sešteli. Iz slike razberemo, da je navpična komponenta vsake od sil $F_M \cos \alpha$ in je zato skupna sila na tetivo



$$F_{tetiva} = 2F_M \cos \alpha = 2 \cdot 300 \text{ N} \cos 17^\circ = 574 \text{ N} . \quad (3.2)$$

Primer 3.3: sila trenja

Če se telesi v stiku medsebojno gibljeta, se med njima pojavi *sila trenja*, ki nasprotuje gibanju. Do tega pride, ker na molekularni ravni površina teles ni popolnoma gladka in se med gibanjem molekule enega telesa zatikajo v molekule drugega telesa. Natančen opis trenja je izjemno zapleten, v prvem približku pa se pogosto privzame, da sila trenja ni odvisna od hitrosti gibanja ter da je sorazmerna sili, ki telesi pritiska skupaj:

$$F_t = \mu F_{\perp} , \quad (3.3)$$

kjer je $F_{\perp}$ sila pravokotna komponenta sile med telesi (sila, ki telesi pritiska skupaj), μ pa je koeficient trenja, ki je odvisen od snovi, iz katerih sta telesi, ter gladkosti njunih površin. Tipične velikosti koeficienta trenja za les na les ali jeklo na jeklo so približno 0,5, za led na led 0,05, na hrustancu kolenskega sklepa pa je koeficient trenja celo le reda velikosti 0,001. V primerjavi z lesom ali jeklom ima hrustanec mnogo bolj zapleteno strukturo in je sestavljen iz posebnih proteinov (kolagen, lubricin ...), lipidov in hialuronske kisline, ki omogočajo dobro hidracijo in s tem eno najboljših lubrikacij, kar jih najdemo naravi. Čeprav so ortopedi že zelo uspešni pri izdelovanju umetnih kostnih protez, pa je še zelo daleč do umetnega hrustanca, ki bi bil po lastnostih primerljiv z naravnim. Zato si je vredno zapomniti posledico zgornje enačbe: z naraščanjem telesne teže naraščajo sile trenje v kolenskem sklepu in s tem tudi njegova obraba.

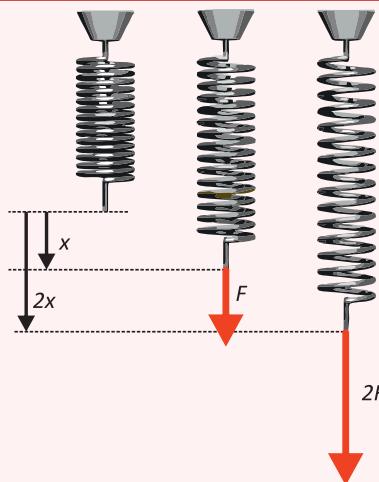
V splošnem je sila trenja lahko odvisna tudi od hitrosti gibanja (če telesi mirujeta pravimo tej sili sila *lepenja*, ki po velikosti ni enaka sili trenja), pa tudi odvisnost od gladkosti površine ni vedno intuitivna. Koeficient trenja med dvema kovinama se npr. s poliranjem površine kovine na začetku res zmanjšuje, a ko kovini spoliramo tako dobro, da na njunih površinah ni več oksidov ali kakšnih drugih atomov, se kovini ob dotiku stakneta in postaneta enotna snov zaradi česar ena mimo druge sploh ne moreta več drseti!

Primer 3.4: Hookov zakon

Zaradi delovanja sil se telesa lahko tudi deformirajo. Pri *elastičnih telesih* je velikost deformacije sorazmerna sili, kar imenujemo Hookov zakon. Šolski primer elastične deformacije je deformacija vzmeti, pri kateri se Hookov zakon zapiše kot

$$F = kx, \quad (3.4)$$

kjer je k konstanta vzmeti, x odmik vzmeti od njenega ravnovesnega stanja, F pa sila, s katero delujemo na vzmet. Bolj kot je vzmet trda, večji ima k in večja sila je potrebna za določeno deformacijo x . Kasneje bomo videli, da Hookov zakon velja tudi za bolj zapletene deformacije: npr. za upogib ali za vzvoj (torzijo) kosti.



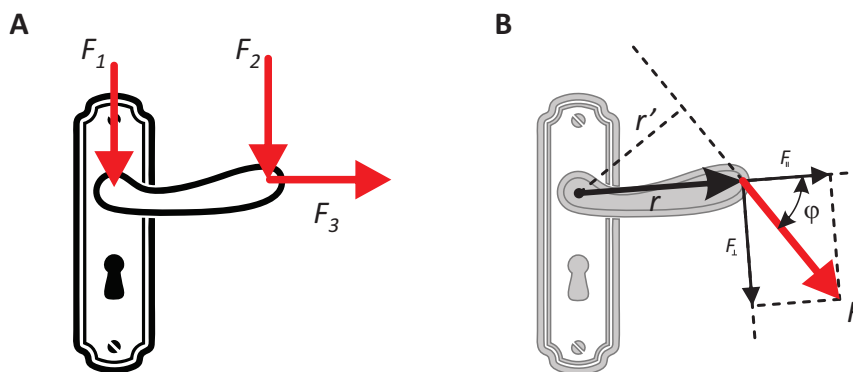
3.2 Navori

Sile torej telesa premikajo, masa pa se premikanju upira. Kako pa je s tem pri vrtenju? Iz vsakdanje izkušnje z odpiranjem kljuke na vratih vemo, da kljuke ne moremo zavrteti le z delovanjem sile, ampak mora biti ta sila tudi pravilno usmerjena (slika 3.1A). Podrobnejši razmislek nas pripelje do zaključka, da je pri vrtenju pomemben *navor*, ki je kombinacija sile, oddaljenosti prijemališča sile od osi vrtenja in njene smeri (slika 3.1B). Z enačbo navor opišemo kot

$$M = Fr \sin \varphi = Fr' = F_{\perp} r, \quad (3.5)$$

kjer smo z M označili navor, F je velikost sile, r razdalja med osjo vrtenja in prijemališčem sile (to razdaljo imenujemo tudi *ročica*), φ pa je kot med silo in vektorjem razdalje. V enačbi 3.5 smo navor zapisali tudi s pomočjo pravokotne razdalje med osjo in nosilko sile (r') ali pa s pravokotno komponento sile

($F_{\perp}$). Enota za navor je Nm. Podobno kot sile so v splošnem tudi navori vektorji (MaFijski primer 3.1), predznak navora pa je odvisen od smeri, v katero navor vrti - navora z nasprotnim predznakom telo vrtita v nasprotnih smereh.



Slika 3.1: . A) Vse tri sile na sliki so enako velike, pa vendar bo lahko le ena od njih zavrtela kljuko na vratih. Katera? B) Za vrtenje telesa je potreben *navor*, ki je odvisen od velikosti sile F , oddaljenosti njenega prijemališča od osi r ter od kota φ (En. 3.5).

V prejšnjem razdelku smo zapisali analogijo med premim gibanjem in vrtenjem. Analogija velja tudi za 2. Newtonov zakon, ki se za vrtenje glasi:

$$M = J\alpha . \quad (3.6)$$

Kotni pospešek telesa α je torej sorazmeren rezultanti navorov na telo M . Masi analogna lastnost telesa pri vrtenju je *vztrajnostni moment* telesa J , za katerega se izkaže, da je odvisen od porazdelitve mase telesa glede na os vrtenja. Čim bliže osi je masa, manjši je vztrajnostni moment in tem lažje lahko telo zavrtimo. Vztrajnostni moment v nasprotju z maso ni »notranja« lastnost telesa, ampak je odvisen od položaja osi vrtenja. Natančnejša analiza pokaže, da je vztrajnostni moment odvisen od kvadrata oddaljenosti od osi vrtenja, in da ga lahko izračunamo po enačbi

$$J = mr^2 \quad \text{oziroma} \quad J = \sum m_i r_i^2 , \quad (3.7)$$

pri čemer levi zapis velja le, če je vsa masa telesa zbrana na enaki razdalji od osi. V splošnem to ne velja in moramo uporabiti desni zapis ter pri določanju vztrajnostnega momenta telesa sešteti prispevke vseh masnih delov, ki so na

različnih razdaljah. Podobno kot masa je tudi vztrajnostni moment aditivna lastnost (primer 3.5).

Primer 3.5: polnjenje centrifuge

Ko centrifugo napolnimo z epruvetami, ji povečamo vztrajnostni moment, zato je polna centrifuga težje zavrteti kot prazna. Izračunajmo, za koliko se spremeni vztrajnostni moment centrifuge, ki jo napolnimo z 12 epruvetami z maso $m = 200 \text{ g}$? Epruvete so na radiju $r = 25 \text{ cm}$, vztrajnostni moment prazne centrifuge pa je $J_c = 0,4 \text{ kgm}^2$. Vztrajnostni moment je aditivna količina, zato lahko vztrajnostni moment epruvet izračunamo kot

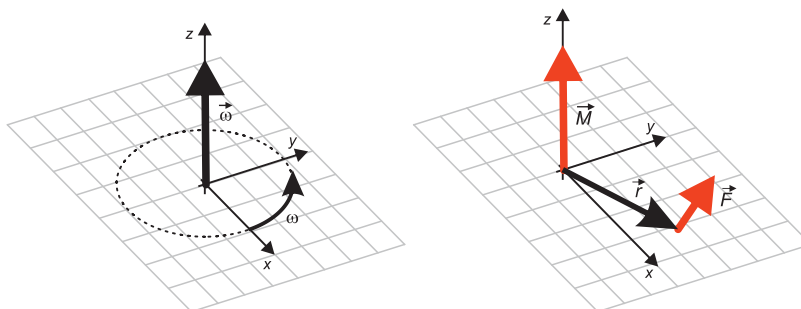
$$J_e = 12mr^2 = 12 \cdot 0,2 \text{ kg} \cdot 0,25^2 \text{ kg}^2 = 0,15 \text{ kgm}^2.$$

Vztrajnostni moment polne centrifuge je torej $J = J_c + J_e = 0,55 \text{ kgm}^2$. Če ima motor centrifuge konstanten navor, bo torej polna centrifuga na končno hitrost pospeševala $0,55/0,4 = 1,375$ krat več časa kot prazna.

MaFijski primer 3.1: kotna hitrost in navor sta v splošnem vektorja

Pri kroženju smo do sedaj govorili le o kroženju okoli ene osi. V praksi pa sile v telesu delujejo v vseh mogočih smereh, zato tudi vse ne vrtijo okoli iste osi. V takih primerih je potrebno tudi količine pri kroženju obravnavati kot vektorje. Spodnja leva slika prikazuje, kako je definiran vektor kotne hitrosti: je pravokoten na ravnino kroženja, njegova velikost pa je sorazmerna velikosti kotne hitrosti. Podobno je pri navoru: navor je vektor, katerega smer kaže v smeri vektorja kotne hitrosti, ki bi jo ta navor povzročal (spodnja desna slika). V vektorskem zapisu lahko tako navor (en. 3.5) izrazimo kar z vektorskim produktom:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (3.8)$$



Vektor pozitivne kotne hitrosti pri kroženju v ravnini $x - y$ kaže v smeri osi z . Če vektorja $\vec{r}$ in $\vec{F}$ ležita v ravnini $x - y$, bo vektor navora $\vec{M}$ v smeri osi z .

3.3 Gibalna in vrtilna količina

Newton svojih zakonov ni zapisal s pomočjo pospeškov (En. 3.1), ampak je uporabil pojma *gibalna* oz. *vrtilna* količina. Taka formulacija Newtonovih zakonov ima svoje prednosti, zato si jo je vredno ogledati.

Izračunajmo spremembo hitrosti telesa, če nanj delujemo s silo (odvodom in integralom se bomo izognili s predpostavko, da je sila konstantna). Spremembo hitrosti lahko izrazimo s pomočjo pospeška, ki pa ga lahko izračunamo iz 2. Newtonovega zakona (En. 3.1). Če sila na telo deluje čas Δt , bo sprememba hitrosti enaka:

$$\Delta \vec{v} = \vec{a} \Delta t = \frac{\vec{F}}{m} \Delta t . \quad (3.9)$$

Če v zgornji enačbi maso prestavimo k hitrosti in vpeljemo *gibalno količino* telesa

$$\vec{G} = m \vec{v} , \quad (3.10)$$

dobimo alternativni zapis 2. Newtonovega zakona:

$$\Delta \vec{G} = \vec{F} \Delta t . \quad (3.11)$$

Izraz $\vec{F} \Delta t$ imenujemo tudi *sunek sile*. Zgornjo enačbo lahko z besedami povzamemo v t. i. **zakon o ohranitvi gibalne količine: Sprememba gibalne količine telesa je enaka sunku sile na telo. Če je rezultanta zunanjih sil na telo enaka nič, se njegova gibalna količina ohranja.**

Analogno gibalni količini lahko vpeljemo tudi *vrtilno količino*:

$$\Gamma = J \omega \quad (3.12)$$

in 2. Newtonov zakon za vrtenje povzamemo v **zakonu o ohranitvi vrtilne količine: Sprememba vrtilne količine telesa je enaka sunku navora na telo. Če na telo ne delujejo zunanji navori, se mu vrtilna količina ohranja.**

Vztrajnostni moment v nasprotju z maso ni »notranja« lastnost telesa, zato se lahko med vrtenjem spreminja. To dejstvo s pridom uporabljajo drsalci med vrtenjem v pirueti: zaradi majhnega trenja na ledu med vrtenjem na telo deluje le zanemarljivo majhen zunanji navor, zato se mora vrtilna količina

ohranjati. Če drsalec med vrtenjem skrči roke, si zmanjša vztrajnostni moment, zaradi česar se mu zaradi zakona o ohranitvi vrtilne količine poveča hitrost vrtenja.

3.4 Ravnovesje, sile v telesu in težišče

V ravnovesju telo miruje, zato bo v ravnovesju pospešek telesa enak nič. Iz 2. Newtonovega zakona torej sledi, da bosta v ravnovesju vsoti vseh sil in vseh navorov na telo enaki nič:

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad (3.13)$$

in

$$\sum \vec{M}_i = 0 . \quad (3.14)$$

Enačbe za ravnovesje intuitivno pozna vsak, ki se je že kdaj usedel na prevesno gugalnico – za ravnovesje na prevesni gugalnici mora težja oseba sedeti bližje osi kot lažja, saj bo le v takem primeru navor sile teže težje osebe nasprotno enak navoru sile teže lažje osebe. Ravnovesje gugalnice je podrobneje predstavljeno na sliki 3.2, ki prikazuje vse sile, ki delujejo na gugalnico. Najprej sta tu sili, s katerima na gugalnico s silo svoje teže pritiskata navpično navzdol obe osebi (F_L in F_D). Na gugalnico mora delovati tudi neka sila navzgor, saj bo lahko le tako vsota vseh sil na gugalnico enaka nič. V našem primeru je to sila v osi (F_O), ki jo pozna vsak, ki je tja že kdaj po pomoti zatlačil prste. Ker so vse tri sile vzporedne, lahko vektorski zapis v enačbi za ravnovesje (en. 3.13) izpustimo in jo napišemo tako, da so na eni strani enačaja sile, ki kažejo v eno smer, na drugi strani enačaja pa sile v nasprotno smer:

$$F_O = F_L + F_D . \quad (3.15)$$

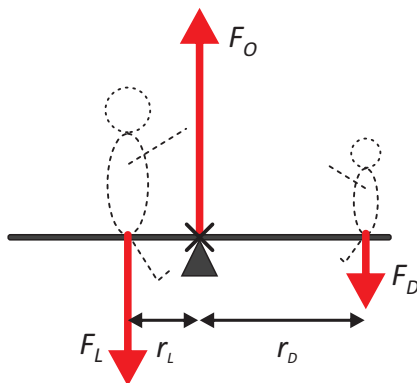
Velikost sile v osi je torej natanko vsota bremen na obeh koncih gugalnice.

Zapišimo še enačbo za ravnovesje navorov na gugalnico (en. 3.14):

$$r_L F_L = r_D F_D . \quad (3.16)$$

Navori, ki gugalnico vrtijo v desno, morajo biti torej po velikosti enaki navorom, ki gugalnico vrtijo v levo. Dolžina ročice sile v osi je nič, zato je tudi navor

sile v osi enak nič ($r_O F_O = 0$) in ta sila v enačbi za navore sploh ne nastopa. Sili teže oseb sta sorazmerni njunima masama ($F_L = m_L g$ in $F_D = m_D g$), zato lahko iz zgornje enačbe potrdimo našo gugalniško intuicijo: v ravnovesju bo razmerje oddaljenosti oseb do osi nasprotno enako njunima masam: $r_L/r_D = m_D/m_L$.



Slika 3.2: Ravnovesje gugalnice. Razmislek o silah in navorih začnemo tako, da si najprej predstavljamo vse sile, ki delujejo na gugalnico. Obe osebi na gugalnico očitno pritiskata navzdol s svojo silo teže (F_L in F_D), iz pogoja za ravnovesje pa lahko nato ugotovimo, da je sila v osi gugalnice (F_O) po nasprotno enaka vsoti sile teže obeh oseb ($F_O = F_L + F_D$). Po drugi strani mora biti zaradi ravnovesja navorov produkt razdalje od osi in teže enak pri obeh osebah ($r_L F_L = r_D F_D$).

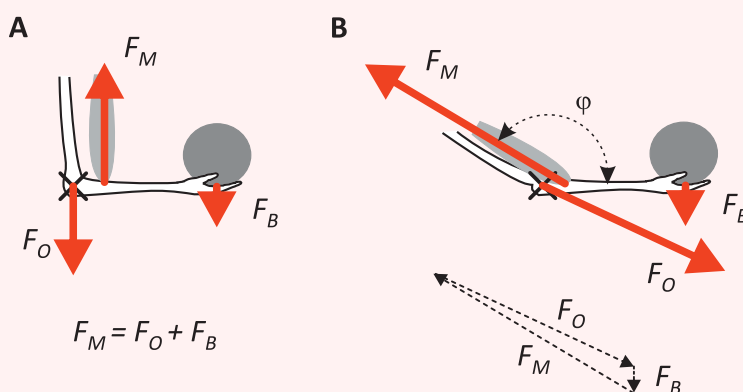
Izkaže se, da za opisovanje ravnovesja velja uporabno pravilo: navore lahko računamo glede na katerokoli os (sistem tako ali tako miruje in se ne vrti okoli nobene osi). Bralec lahko sam preveri, da bi bili rezultati za sile v ravnovesju gugalnice enaki, če bi navore računali glede na namišljeno os, ki bi jo postavili v prijemališče leve ali desne sile. Računanje ravnovesja bo ponavadi najlažje, če os postavimo v prijemališče sile, katere vrednost nas ne zanima ali je ne poznamo. Navor te sile v enačbah tako ne bo nastopal in enačbe bodo lažje za reševanje.

Povezavo med silami in navori je v tretjem stoletju pred našim štetjem poznal že Arhimed, ki se je veliko ukvarjal z vzvodi in je dejal »Dajte mi primerno oporno točko ter dovolj dolg vzvod in premaknil bom Zemljo!« Nam bo razumevanje sil in navorov zelo pomagalo pri računanju obremenitev mišic in kosti v telesu. Skelet je namreč zelo zapleten sistem vzvodov (kosti), ki so med seboj povezani s sklepi, kitami in mišicami – v človeškem telesu je več kot 200 kosti in več kot 600 skeletnih mišic.

Četudi je največja zunanja sila na skelet sila teže, pa se izkaže, da so pri vzdrževanju ravnovesja nekateri deli telesa obremenjeni z bistveno večjimi silami. Enostaven primer računanja obremenitev v telesu je predstavljen v Primeru 3.6 in prikazuje obremenitve med ravnovesjem v roki. Čeprav so realni klinični primeri lahko mnogo bolj zapleteni, saj morajo upoštevati vse mišice in vse kosti, ponavadi pa tudi vektorsko naravo sil in navorov, je osnovni princip računanja enak kot pri gugalnici in izhaja iz pogoja za ravnovesje sil in navorov (en. 3.13 in 3.14).

Primer 3.6: ravnovesje v roki

Poglejmo si zelo poenostavljen primer analize obremenitve roke, v kateri držimo breme. Predpostavimo, da roko drži le ena mišica ter da lahko težo roke zanemarimo. Razdalja med komolcem in mišico je $r_M = 4$ cm, razdalja med komolcem in bremenom je $r_B = 40$ cm, masa bremena pa je 5 kg. S kolikšno silo je napeta mišica?



Če je roka skrčena (slika A), bosta sila bremena na roko in sila mišice na roko navpični. Če pri računanju navorov os postavimo v komolec, lahko takoj zapišemo

$$F_M r_M = F_B r_B .$$

iz česar sledi, da je razmerje velikosti sil v ravnovesju nasprotno enako razmerju oddaljenosti njunih prijemališč od komolca. Sila mišice bo torej 10 krat večja od teže bremena!

Poleg sile bremena in sile mišice na roko deluje še tretja sila! To je sila v komolcu (na sliki je označena s F_O). Njena smer in velikost sta manj intuitivni, a iz pogojev za ravnovesje lahko hitro ugotovimo, da bo morala biti v našem primeru ta sila tudi navpična (če ne bi bila, vodoravna rezultanta sil ne bi mogla biti enaka nič) in da bo po velikosti enaka razliki sile mišice in sile bremena. Sila v komolcu je torej v tem primeru 9 krat večja od teže bremena.

Situacija postane bolj zapletena, če roko iztegnemo ter je kot med mišico in roko enak $\varphi = 140^\circ$ (slika B). Sila bremena bo nespremenjena, zato pa se bo spremenil kot, pod

katerim na roko deluje sila mišice. Le-ta torej na roko ne bo delovala le v navpični ampak tudi v vodoravni smeri. Ker k navoru prispeva le navpična komponenta sile mišice (roka - ročica - je vodoravna), moramo ravnovesje navorov zapisati kot

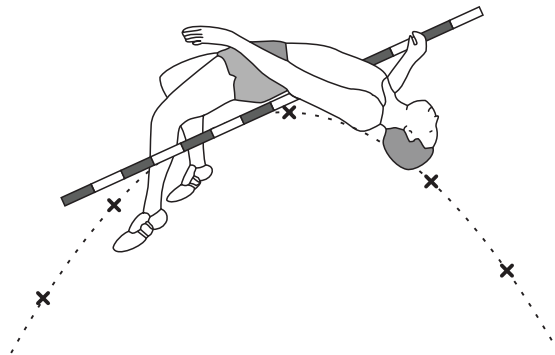
$$F_M r_M \sin \varphi = F_B r_B .$$

Ker je $\sin 140^\circ = 0,64$ bo torej sila mišice pri iztegnjeni roki še za faktor $1/0,64$ večja kot prej, oziroma bo 15,6 krat večja od sile teže bremena! Iz ravnovesja vseh treh sil sledi, da bo vodoravno komponento dobila tudi sila v komolcu, za izračun njene velikosti pa bo potrebno uporabiti znanje iz seštevanja vektorjev.

Z ravnovesjem je tesno povezan pojem *težišča* telesa, ki je definirano kot točka, v kateri bi morali podpreti telo, da se zaradi vpliva teže ne bi prekucnilo. Pri preprostih homogenih telesih si znamo položaj težišča dobro predstavljati: težišče homogene ravne palice je npr. v njenem središču. Pri zapletenejših telesih pa je pri določanju težišča potrebno malo razmisleka. V primeru gugalnice težišče ni na sredi med osebama, ampak je pomaknjeno bližje težji osebi (težišče gugalnice v ravnovesju je namreč ravno tam, kjer je podprta, v osi). Položaj težišča zapletenega telesa, ki je sestavljeno iz delov z masami m_i , lahko izračunamo s pomočjo podobnega razmisleka kot pri gugalnici. Sila podpore v težišču na telo deluje navpično navzgor in je po velikosti enaka sili teže celotnega telesa (masa celotnega telesa je $\sum m_i$). Po drugi strani iz enačbe za ravnovesje navorov sledi, da mora biti navor te sile nasprotno enak navorom sile teže vseh sestavnih delov, ne glede na to, kam postavimo izhodišče koordinatnega sistema: $\vec{r}_t \sum m_i g = \sum m_i \vec{r}_i g$ (z $\vec{r}_t$ smo označili položaj težišča, z $\vec{r}_i$ pa položaje posameznih delov telesa). Ko pokrajšamo težni pospešek, lahko izrazimo enačbo za izračun položaja težišča za poljubno zapleteno telo:

$$\vec{r}_t = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} . \quad (3.17)$$

Težišče je lahko tudi v točki izven telesa, kar dobro poznajo skakalci v višino, ki se med skokom upognejo in s tem svoje težišče postavijo čim nižje (slika 3.3). Poleg tega je težišče uporabno pri opisovanju gibanja zapletenih teles, ki ga lahko opišemo kot gibanje težišča in gibanje delov telesa glede na težišče. Pri skoku v višino se bo tako težišče skakalca, ne glede na njegove gibe, premikalo po paraboli (slika 3.3).



Slika 3.3: . Skakalec se pri skoku v višino upogne nazaj in tako zniža svoje težišče. Težišče je lahko celo izven telesa in se niti ne dvigne preko prečke. Ne glede na skakalčeve gibe med skokom se težišče giblje po paraboli, enako kot kamen pri poševnem metu.

Poglavje 4

Energija

Energija je eden najpomembnejših konceptov sodobne znanosti. Čeprav ima veliko obrazov in jo je težko na enostaven način definirati, je eden redkih pojmov, ki so našli osrednje mesto tako v fiziki, kot tudi v biologiji in kemiji. Energija je količina, ki se neprestano spreminja iz ene oblike v drugo, hkrati pa se njena skupna količina pri vseh znanih naravnih pojavi ohranja. Zakon o ohranitvi energije je torej eden najbolj temeljnih zakonov naše narave. V tem poglavju bomo naredili prve korake v svet energije in njene povezave s silami, v celoti pa bomo zakon o ohranitvi energije spoznali šele v poglavju termodinamika.

4.1 Delo, energija in moč

Iz vsakdanjega življenja vemo, da se pri opravljanju »dela« slej ko prej utrudimo in nam »zmanjka energije«. Ta preprost pogled na delo in energijo ni daleč od natančnega fizikalnega, ki pravi, da se s premagovanjem sile opravi *delo* ter da pri tem energija prehaja iz enega sistema v drugega oziroma se ena vrsta energije spreminja v drugo. Če sila F premaga razdaljo s , pri tem opravi delo A , ki ga v primeru konstantne sile izračunamo iz zveze

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}. \quad (4.1)$$

Vektorski zapis je pomemben, saj je opravljeno delo odvisno od smeri gibanja glede na smer sile. To odvisnost poznamo iz izkušenj pri premagovanju sile teže: če se vzpenjamo (se gibljemo proti sili teže), porabimo največ energije, če se gibljemo vodoravno (pravokotno na silo teže), nam sila teže ne dela

težav, po klancu navzdol (v smeri sile teže) pa nam sila teže celo pomaga pri gibanju. Pogosto se zgodi, da sila med delovanjem ni konstantna in v takem primeru moramo delo izračunati s pomočjo integrala $A = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

Delo je tesno povezano s spreminjanjem energije. Za začetek naštejmo tri osnovne vrste energije:

- *Kinetična energija* je energija, ki jo imajo telesa zaradi svojega gibanja. Telo z maso m in hitrostjo v ima kinetično energijo

$$W_k = \frac{1}{2}mv^2 . \quad (4.2)$$

Sprememba kinetične energije je enaka delu sile, ki povzroči spremembo hitrosti. V primeru konstantne sile lahko to zvezo izpeljemo, če upoštevamo, da je $s = \bar{v}t$, sila pa je $F = ma = m\Delta v/t$.

- *Gravitacijska potencialna energija* je energija, ki jo imajo telesa zaradi svojega položaja gravitacijskem polju Zemlje. Pri majhnih spremembah višine je težni pospešek (g) konstanten in je gravitacijska potencialna energija telesa odvisna le od njegove mase (m) in višine, na kateri je telo (h):

$$W_p = mgh . \quad (4.3)$$

Sprememba gravitacijske energije telesa je po velikosti enaka delu sile teže pri spremembi položaja telesa.

- Energija je lahko spravljena tudi v elastični deformaciji telesa. Najbolj preprost primer take vrste energije je *prožnostna energija* vzmeti

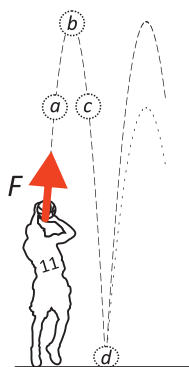
$$W_{el} = \frac{1}{2}kx^2 , \quad (4.4)$$

kjer je k konstanta vzmeti, x pa odmik od ravnovesne dolžine vzmeti. Za prožnostno energijo je vseeno ali vzmet stiskamo ali raztegujemo, saj je odvisna od kvadrata odmika. Sprememba prožnostne energije je enaka delu sile vzmeti pri njenem krčenju oz. raztegovanju (ker sila vzmeti med stiskanjem ni konstantna temveč je odvisna od x , moramo za izračun tega dela uporabiti integral!).

Zgoraj našteje energije spadajo med t. i. mehanske energije. Če med gibanjem v sistemu ni drugih sil razen tistih, ki so povezane z mehanskimi energijami, se celotna mehanska energija sistema ohranja:

$$W_k + W_p + W_{el} = konst. \quad (4.5)$$

V splošnem se med gibanjem težko izognemo drugim silam, saj je trenje praktično vedno prisotno. Prisotno ni le na stiku med trdimi telesi, temveč se *notranje trenje* v snovi pojavi vsakič, ko se molekule snovi gibljejo ena glede na drugo, npr. med gibanjem tekočin, ali med deformacijo trdnih snovi. Ohranitev mehanske energije (en. 4.5) je torej le približek, ki velja tem bolje, čim bolj lahko zanemarimo trenje. Sile, pri katerih se mehanska energija sistema ohranja, imenujemo tudi konservativne sile (pogosto so to sile, ki so odvisne le od položaja telesa, ne pa od njegovega gibanja).



Slika 4.1: Energetika meta žoge. Sila rok (F) opravi delo in žogi dovede energijo. Med letom navzgor se kinetična energija žoge pretvarja v potencialno, med padanjem pa se potencialna energija pretvarja nazaj v kinetično. Ko žoga pade na tla, se kinetična energija pretvori v njeno prožnostno energijo (točka d). Če lahko trenje z zrakom zanemarimo in je žoga idealno elastična, se mehanska energija ohrani in bo žoga odskočila na začetno višino (črtkana črta). V praksi to ni povsem res, zato bo odskočila do manjše višine (pikčasta črta).

Učinek dela in spreminjanje energije iz ene oblike v drugo si lahko nazorno predstavljamo pri navpičnem metu žoge (slika 4.1). Žogo vržemo tako, da nanjo delujemo s silo in ji torej s svojim delom dovedemo kinetično energijo. Med letom navzgor (točka a) se kinetična energija žogi zmanjšuje, hkrati pa se ji povečuje potencialna energija. V najvišji točki leta (točka b) se žoga ustavi, zato je tam kinetična energija enaka nič, potencialna energija pa je največja. Žoga nato pada nazaj proti tloraj (točka c) in kinetična energija se ji spet veča, potencialna pa manjša. Tik preden pade na tla je njena kinetična energija največja, potencialna pa enaka nič. Ko žoga pade na tla, se elastično deformira (točka d) in kinetična energija se pretvori v elastično energijo deformacije žoge. Če je žoga zelo dobra, se vsa elastična energija spremeni nazaj v kinetično in se žoga od tal odbije na enako višino (črtkana črta). V praksi ponavadi to ne

drži in je po odboju na voljo nekaj manj energije kot pred odbojem (pikčasta črta), saj se ob deformaciji nekaj energije spremeni v notranjo energijo žoge. Več o notranji energiji bomo slišali v poglavju termodinamika.

Enota za energijo in delo je *joule*, pri čemer velja $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$. Ko maso 1 kg dvignemo 1 m visoko torej opravimo delo 10 J . Poleg enote joule se v določenih situacijah uporablja tudi stara enota za energijo *kalorija* ($1 \text{ cal} \approx 4,2 \text{ J}$), energije na molekularni skali pa pogosto merimo v enoti *elektronvolt* ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

Pogosto nas zanima, kako hitro se pri opravljanju dela porablja energija. To opisuje količina *moč* (P)

$$P = \frac{A}{t} = Fv, \quad (4.6)$$

katere enota je vat, $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$. Drugi izraz v zgornji enačbi dobimo ob upoštevanju, da je delo sila krat pot, hitrost pa je pot deljeno s časom. Moč sile pri opravljanju dela je torej odvisna od hitrosti, pri kateri ta sila deluje.

Človeško telo v mirovanju troši približno toliko energije kot 100 W žarnica, med fizično aktivnostjo pa se moč telesa lahko poveča tudi za več kot 10 krat (tabela 4.1).

aktivnost	moč [W]
spanje	83
sedenje	120
počasna hoja	265
kolesarjenje s 15 km/h	400
igranje košarke	800

Tabela 4.1: Poraba energije pri različnih aktivnostih (povzeto po [6]).

V zgornjih izrazih smo predpostavili premo gibanje, seveda pa lahko delo in energijo definiramo tudi za vrtenje. S pomočjo analogije med premim

gibanjem in vrtenjem, ki smo jo spoznali v prejšnjem poglavju, lahko takoj zapišemo, da je delo pri vrtenju produkt navora in kota vrtenja:

$$A = M\varphi , \quad (4.7)$$

kinetična energija pri vrtenju pa je odvisna od vztrajnostnega momenta telesa in kotne hitrosti vrtenja:

$$W_k = \frac{1}{2} J \omega^2 . \quad (4.8)$$

Primer 4.1: energetika meta žoge

Za vajo si pogledajmo tri enostavne primere spreminjanja energije pri metu žoge (slika 4.1). a) Najmanj koliko kalorij porabimo za met košarkarske žoge navpično navzgor za $h_0 = 3$ m nad začetni položaj naših rok? Masa žoge je 624 g.

Med metom na žogo delujemo s silo, zato opravljamo delo in z njim žogi dovedemo energijo (kinetično in potencialno), nato pa se med letom mehanska energija (en. 4.5) žoge ne spreminja več (upor zraka zanemarimo). Med letom navzgor se torej kinetična energija žoge manjša, potencialna večja, njuna vsota pa se ne spreminja. V najvišji točki leta se žoga ustavi, zato bo tam $W_k = 0$ in bo vsa energija v potencialni. Delo, ki smo ga opravili pri metu, lahko torej izračunamo iz potencialne energije, ki jo ima žoga v najvišji točki leta:

$$A = W_{celotna} = W_p(max) = mgh = 0,624 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 3 \text{ m} = 19 \text{ J} .$$

Ker velja $1 \text{ cal} \approx 4,2 \text{ J}$, lahko torej zaključimo, da za en met žoge porabimo vsaj 4,5 cal.

b) Kolikšna je bila hitrost žoge, ko smo jo izpustili iz rok, če so se roke med opravljanjem dela iz začetnega položaja iztegnile za $h_r = 20 \text{ cm}$?

Ko žogo izpustimo, se začne njena kinetična energija spreminjati v potencialno. Ker prosto leti le še 2,8 m visoko ($h - h_r$), lahko zapišemo:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - h_r) \Rightarrow v = \sqrt{2g(h - h_r)} .$$

Ko v izraz vstavimo vrednosti, dobimo: $v = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 2,8 \text{ m}} = 7,5 \text{ m/s}$.

c) S kolikšno silo med metom roke delujejo na žogo? Predpostavimo, da je bila sila vseskozi konstantna.

Čeprav bi nalogo lahko rešili le z uporabo sil in pospeškov, si jo pogledajmo s stališča dela in energije. V prejšnji nalogi smo izračunali delo rok, vemo pa tudi na kolikšni razdalji je bilo to telo opravljeno (h_r). Če je bila sila rok konstantna, jo lahko torej izračunamo kot

$$F = \frac{A}{h_r} = \frac{mgh}{h_r} = 94 \text{ N} .$$

d) Kolikšno moč so med opravljanjem dela porabljale mišice?

Moč mišic je odvisna od njihove sile in hitrosti, pri kateri delujejo (en. 4.6). Ker smo v naši nalogi predpostavili, da je sila konstantna (in da gre torej za enakomerno pospešeno gibanje), bo hitrost linearno naraščala in bo največja v trenutku, ko izpustimo žogo. Takrat bo moč mišic enaka

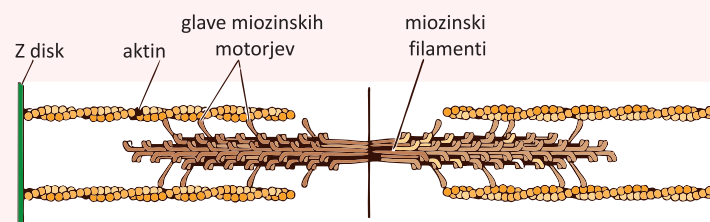
$$P = Fv = 94 \text{ N} \cdot 7,5 \text{ m/s} = 700 \text{ W} ,$$

povprečna moč, s katero so delovale mišice, pa je pol manjša.

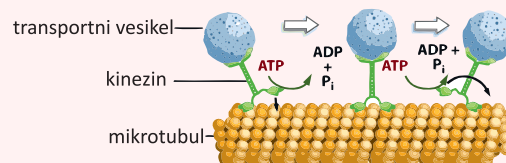
Primer 4.2: molekularni motorji

Čeprav smo do sedaj o delu in energiji govorili na nivoju našega makroskopskega sveta, pa iste zakonitosti veljajo v tudi svetu molekul. Tako je usmerjeno gibanje molekul pogosto povezano s porabo kemične energije (npr. hidrolizo ATP), ki povzroči konformacijsko spremembo proteina. Proteine, ki se pri tem usmerjeno gibljejo, imenujemo *molekularni motorji*. Tak primer srečamo npr. pri krčenju progastih mišic, pri katerih zaradi konformacijskih sprememb v glavah proteina miozina filamenti miozina drsijo po filamentih aktina (slika A). Podoben primer je hoja proteina kinezina, ki pri znotrajceličnem transportu po mikrotubulih prenaša vezikle (slika B). Velikost sile, ki jo pri tem ustvarja, je približno 5 pN, hitrost gibanja pa do 800 nm/s. Poleg molekularnih motorjev, ki povzročajo premo gibanje, obstajajo tudi rotacijski motorji, npr. motorji, ki vrtijo bičke bakterij, ali motorji, ki navijajo DNK v bakteriofage. Rotacijsko gibanje srečamo tudi pri ATP sintazah, proteinih, ki izkoriščajo prekomembranski gradient protonov za produkcijo ATPja (slika C).

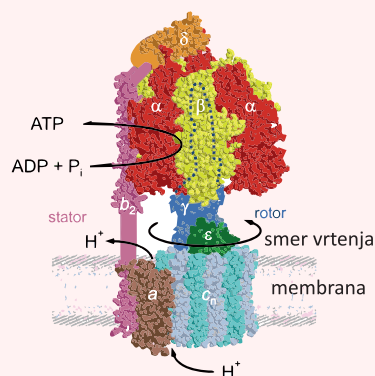
A



B



C

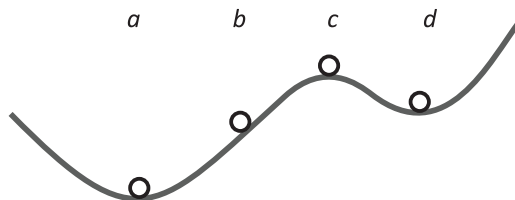


4.2 Ravnovesje in potencialna energija

V prejšnjem poglavju smo ravnovesje opisovali s stališča sil in navorov ter spoznali, da v ravnovesju telo miruje, saj je rezultanta sil in navorov nanj enaka nič. Sedaj bomo naredili še korak naprej ter ravnovesje raziskali tudi s stališča potencialne energije, pri čemer se nam bo na razumevanje narave odprl nov zanimiv pogled.

Začeli bomo s preprostim razmislekom o stabilnosti različnih položajev žoge na hribu (slika 4.2). Na pobočju je žoga v *neravnovesnem stanju* in se odkotali po klancu navzdol (položaj *b*). Ravnovesje lahko dosežemo le na ravni podlagi, ki jo najdemo ali v dolini ali na vrhu hriba. Pri tem s stališča stabilnosti ravnovesja razlikujemo tri možnosti

- Če je žoga na dnu najnižje doline (položaj *a*), je v *stabilnem ravnovesju*.
- Če je žoga na vrhu (položaj *c*), je sicer v ravnovesju, a jo bo že najmanjša zunanja sila spravila iz ravnovesja in žoga se bo odkotalila v dolino. Takemu ravnovesju pravimo *nestabilno ravnovesje*.
- Če je žoga v dolinici pod vrhom (položaj *d*), pa se po majhni zunanji motnji sicer vrne v isti položaj, če pa je motnja večja, se lahko odkotali v kakšno nižjo dolino, npr. v položaj *a*. Položaj *d* se imenuje *lokalno stabilno* ali *metastabilno stanje*.



Slika 4.2: Različna stanja žoge na hribu: stabilno ravnovesje (lega *a*), neravnovesno stanje (lega *b*), nestabilno ravnovesje (lega *c*) in lokalno stabilno ravnovesje (*d*). V splošnem velja, da je sistem v ravnovesju, če se s časom ne spreminja, pa ni v ravnovesju, se spreminja tako, da se ravnovesju približuje.

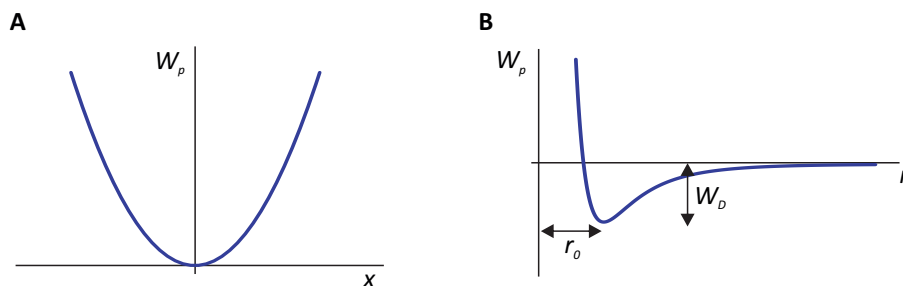
Če na sliko 4.2 pogledamo s stališča potencialne energije, odkrijemo zanimivo pravilo: stabilno ravnovesje je stanje z globalno najnižjo potencialno energijo, nestabilno ravnovesje je stanje z lokalnim maksimumom energije, metastabilno stanje pa je stanje pri katerem ima potencialna energija le lokalni minimum. Matematično bi rekli, da je v ravnovesnih stanjih odvod potencialne

energije po spremembi položaja enak nič. V neravnovesnih stanjih odvod ni enak nič in žogo vleče vleče proti nižji potencialni energiji, pri čemer je velikost sile sorazmerna strmini klanca. Pravimo tudi, da da sila kaže v nasprotni smeri od *gradienta* potencialne energije (matematično obravnavo navajamo v MaFijskem primeru 4.1).

Gornji razmislek je temeljil na preprostem primeru žoge in gravitacijske potencialne energije, vendar pa se za njim skriva ena od globljih zakonitosti narave:

Če mehanski sistem ni v ravnovesju in ga prepustimo samemu sebi, se bo spreminjal proti nižji potencialni energiji. Ravnovesje bo dosegel, ko bo potencialna energija najnižja.

Poleg gravitacijske potencialne energije obstajajo namreč tudi druge vrste potencialne energije, ki imajo podobne lastnosti, v splošnem so vse odvisne le od položaja sistema (in ne od gibanja), in z vsako od njih je povezana ustrezna konservativna sila. Lastnost potencialne energije imata npr. prožnostna energija vzmeti (en. 4.4 in slika 4.3A) in pa interakcijska energija med dvema molekulama (slika 4.3B). V biokemiji ravnovesje definira vrsta energije z imenom *prosta entalpija*, ki ima podobne lastnosti kot mehanske potencialne energije in jo bomo zato v poglavju termodinamika imenovali *termodinamski potencial*.



Slika 4.3: Dva primera potencialnih energij. A) Energija vzmeti (en. 4.4) je odvisna le od odmika vzmeti od ravnovesja (x) in ima vse lastnosti potencialne energije. Najmanjša je v ravnovesju, sila vzmeti pa vedno kaže proti ravnovesju. B) Primer interakcijske energije med dvema molekulama, ki se privlačita, v odvisnosti od razdalje med molekulama (izvor privlačne sile oz. interakcijske energije je v električnem naboju na molekulah, več o tem bomo slišali v poglavju o elektriki). Če sta molekuli zelo daleč stran, se interakcijska energija praktično ne spreminja z razdaljo, kar po drugi strani pomeni, da med molekulama ni sile. Ko se molekuli približujeta, se energija zmanjšuje in med njima torej deluje privlačna sila. Razdalja r_D označuje ravnovesno razdaljo med molekulama, tj. razdaljo, pri kateri je energija najmanjša in pri kateri je rezultanta sil na molekuli enaka nič (molekuli se niti ne privlačita niti odbijata). Če molekuli potisnemo skupaj na razdaljo, ki je manjša od ravnovesne, se elektroni njunih zunanjih orbital začnejo prekrivati in molekuli se začneta odbijati. Globlja kot je dolina, močnejša je vez med molekulama. Če hočemo molekuli ločiti (ju iz ravnovesne razdalje oddaljiti daleč narazen), porabimo disociacijsko energijo W_D . Če pogledamo interakcijsko energijo v bližini ravnovesja, vidimo, da je njena oblika podobna paraboli, ki smo jo srečali pri vzmeti. **Zato si lahko za majhne odmike od ravnovesja molekule predstavljamo kot atome, ki so med seboj povezani z majhnimi vzmetmi.**

MaFijski primer 4.1: sila in potencialna energija

Konservativna sila in ustrezna potencialna energija sta dve plati istega kovanca. Če poznamo eno, lahko izračunamo drugo in obratno. Konservativna sila vedno kaže v smer, v kateri bo potencialna energija čim manjša. Matematično zvezo med njima zapišemo kot

$$\vec{F} = -\nabla W_p = -\left(\frac{dW_p}{dx}, \frac{dW_p}{dy}, \frac{dW_p}{dz}\right), \quad (4.9)$$

pri čemer smo uporabili matematično operacijo ∇ , ki jo imenujemo *gradient* in je posplošitev odvoda. Odvod smo do sedaj srečali pri funkcijah ene spremenljivke $f(x)$, če pa imamo opraviti s funkcijo več spremenljivk (potencialne energije so v splošnem lahko odvisne od več koordinat), njen naklon izračunamo tako, da odvajamo po vsaki spremenljivki posebej in rezultate združimo v vektor.

Kot preprost primer zveze med silo in energijo lahko služi izračun Hookovega zakona (en. 3.4) iz izraza za prožnostno energijo vzmeti. Energija vzmeti je odvisna le od ene koordinate, zato gradienta pravzaprav ne bomo potrebovali in bo dovolj navadno odvajanje:

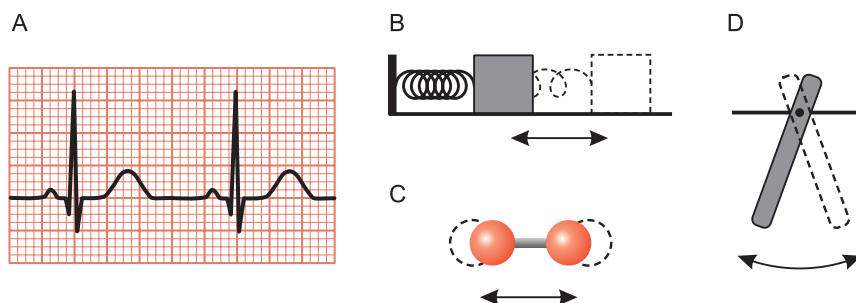
$$F = -\frac{dW_p}{dx} = -\frac{dkx^2}{dx} = -kx. \quad (4.10)$$

Negativni predznak pomeni, da sila vzmeti vedno kaže proti ravnovesju (pri pozitivnih vrednostih x bo sila kazala proti negativnim vrednostim x ter obratno). Če predznak $-$ v Hookovem zakonu izpustimo, z njim opišemo silo, s katero vlečemo vzmet, ki je nasprotno enaka sili vzmeti.

Poglavje 5

Nihanje

Veliko naravnih pojavov se periodično ponavlja. Dan se izmenjuje z nočjo, plima se izmenjuje z oseko, pri kroženju se kljub neprestanemu gibanju vedno znova znajdemo na začetku poti. Tudi srce nam, dokler smo živi, periodično bije. Periodično nihajo tudi vse molekule, ki sestavljajo naš svet. V tem poglavju se bomo spoznali z osnovnimi značilnostmi preprostega nihanja (slika 5.1), kasneje pa nam bo to znanje pomagalo tudi pri razumevanju bolj zapletenih periodičnih pojavov.

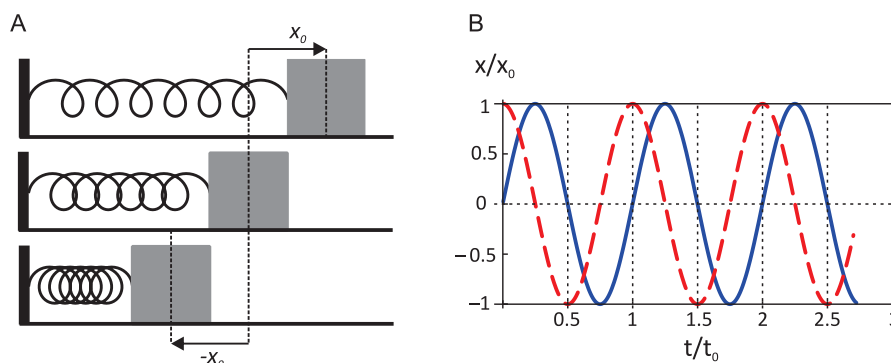


Slika 5.1: Nekaj primerov periodičnih pojavov. (A) Periodično bitje srca se lepo vidi na elektrokardiogramu, na katerem prikažemo spreminjanje električne napetosti na površini telesa v odvisnosti od časa. En majhen kvadratak mreže je ponavadi velik $1\text{ mm} \times 1\text{ mm}$ in v vodoravni smeri predstavlja 40 ms, v navpični pa 0,1 mV. (B) Vzmetno nihalo, pri katerem niha na vzmet pritrjena masa. (C) Nihanje molekule O_2 . Atoma nista toga vezana eden na drugega, zato lahko nihata okoli ravnovesne lege. Tako nihanje si lahko v prvem približku predstavljamo kot nihanje majhnega vzmetnega nihala. (D) Težno nihalo (včasih ga imenujejo tudi fizično nihalo), pri katerem niha na os obešeno togo telo.

5.1 Harmonično nihanje

Harmonično nihanje je tisto, ki ga lahko opišemo s funkcijo sinusne oblike. Najpreprostejši primer harmoničnega nihanja je nihanje vzmetnega nihala na podlagi brez trenja (slika 5.2B). Kot smo spoznali v prejšnjem poglavju, nam lahko z vzmetjo povezane mase služijo kot dober približek za opisovanje atomov v molekuli, zato si bomo tudi nihanje molekul predstavljali kot nihanje majhnih vzmetnih nihalc.

Če vzmet vzmetnega nihala raztegnemo in spustimo, bo nihalo sinusno zanihala okoli ravnovesja, pri čemer se bo energija pretvarjala iz kinetične energije mase v prožnostno energijo vzmeti ter nazaj. Brez prisotnosti trenja se bo celotna energija ohranjala in gibanje se bo periodično ponavljalo. Čas ene periode t_0 imenujemo *nihajni čas*, *frekvenca nihanja* ν_0 pa nam pove, koliko nihajev naredi nihalo v eni sekundi in je obratna vrednost nihajnega časa, $\nu_0 = 1/t_0$ (enako definicijo smo srečali že pri opisovanju kroženja, en. 2.6).



Slika 5.2: A) Nihanje vzmetnega nihala na podlagi brez trenja je najpreprostejši primer harmoničnega nihanja. B) Graf, ki prikazuje odmik vzmetnega nihala od časa, je sinusne oblike. Modra črta prikazuje nihanje nihala, ki je bilo ob času $t = 0$ ravno v ravnovesni legi, črtkana rdeča črta pa prikazuje nihanje nihala, ki je bilo ob času $t = 0$ v skrajni desni legi. Maksimalni odmik nihanja x_0 imenujemo amplituda nihanja, čas enega nihaja t_0 pa nihajni čas.

Poznavanje lastnosti sinusne funkcije nam pomaga, da uganemo enačbo, ki pri harmoničnem nihanju opisuje odvisnost odmika nihala od časa:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t) . \quad (5.1)$$

Maksimalni odmik od ravnovesja v obe smeri x_0 imenujemo *amplituda* nihanja. Vpeljali smo tudi *lastno krožno frekvenco* nihanja, ki jo definiramo z zahtevo, da en nihajni čas ustreza eni periodi sinusne funkcije 2π . Podobno kot pri kroženju (en. 2.7), tudi pri nihaju velja: $\omega_0 t_0 = 2\pi$ oziroma

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 . \quad (5.2)$$

V splošnem je harmonično vsako nihanje, pri katerem je sila, ki sistem vleče nazaj proti ravnovesju, sorazmerna odmiku od ravnovesja. Pomembna lastnost harmoničnega nihanja je, da je frekvenca nihanja *notranja lastnost nihala*, ki ni odvisna od začetnega odmika od ravnovesja ter se s časom ne spreminja. Za vzmetno nihalo tako velja, da je lastna frekvenca nihanja odvisna od njegove mase in trdote vzmeti (glej MaFijski primer 5.1):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} . \quad (5.3)$$

Atomi v molekuli prav tako nihajo s sebi lastnimi frekvencami, ki so odvisne od mase atomov in interakcij med njimi.

Oglejmo si še nihanje visečega togega telesa (slika 5.1D). Tako nihalo imenujemo težno ali fizično nihalo in je podobno matematičnemu, le da je pri slednjem vsa masa nihala zbrana v eni točki. Krajša izpeljava pokaže (MaFijski primer 5.1), da je pri majhnih odmikih od ravnovesja tudi to nihanje harmonično z lastno krožno frekvenco

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\ell_t m g}{J}} , \quad (5.4)$$

kjer je m masa težnega nihala, J njegov vztrajnostni moment ter ℓ_t razdalja težišča nihala od osi. Pri matematičnem nihalu je vsa masa zbrana na razdalji $\ell_t = l$, zato pri njem velja $J = ml^2$ oz. $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

MaFijski primer 5.1: izpeljava lastne frekvence nihanja

Pokažimo, da je lastna krožna frekvenca vzmetnega nihala enaka $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Začnemo pri 2. Newtonovem zakonu, ki pravi, da je sila na maso v vsakem trenutku sorazmerna pospešku mase. Za silo vzmeti velja Hookov zakon (en. 3.4), zato lahko zapišemo za silo na maso zapišemo $-kx(t) = ma(t)$ (negativni predznak smo zapisali, ker sila na maso pri pozitivnih x vleče proti negativnim vrednostim). Ker je pospešek drugi odvod odmika po času ($a = x''$), bo za vzmetno nihalo v vsakem trenutku veljala enačba

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t) . \quad (5.5)$$

Za sinusno nihanje poznamo odvisnost odmika od časa (en 5.1), zato lahko brez težav izračunamo prvi in drugi odvod odmika po času ter preverimo če ustreza zgornji enačbi. Prvi odvod je

$$x'(t) = x_0\omega_0 \cos(\omega_0 t) , \quad (5.6)$$

drugi odvod pa je torej

$$x''(t) = -x_0\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) . \quad (5.7)$$

Če primerjamo zadnjo enačbo z enačbo en. 5.1, ugotovimo, da pri sinusnem nihanju torej velja

$$x''(t) = -\omega_0^2 x(t) \quad (5.8)$$

Iz primerjave enačb 5.5 in 5.8 lahko torej zaključimo, da sinusno nihanje zares ustreza 2. Newtonovem zakonu za vzmetno nihalo, če je le $\omega_0^2 = k/m$. Podobno razmišljanje velja v vseh primerih, pri katerih je drugi odvod odmika po času sorazmeren negativni vrednosti odmika.

Raziščimo še nihanje težnega nihala. Če težno nihalo iz ravnovesja izmaknemo za kot ϕ , ga bo navor sile teže vlekel nazaj v ravnovesje, $M = -mg\ell_t \sin \phi$ (če bo kot pozitiven, bo navor negativen). Navor je po 2. Newtonovem zakonu sorazmeren kotnemu pospešku, $M = J\alpha = M\phi''$, zato lahko zapišemo:

$$\phi''(t) = -\frac{mg\ell_t}{J} \sin \phi(t) . \quad (5.9)$$

Vidimo torej, da fizično nihalo v splošnem ne niha harmonično, saj drugi odvod odmika po času ni sorazmeren odmiku ampak sinusu odmika. Če pa so odmiki majhni, je sinus kota kar približno enak kotu, $\sin \phi \approx \phi$, in velja:

$$\phi''(t) = -\frac{mg\ell_t}{J} \phi(t) . \quad (5.10)$$

Pri majhnih odmikih od ravnovesja zato tudi fizična nihala (in matematično nihalo) nihajo približno harmonično, krožno frekvenco takega nihanja pa razberemo iz zgornje enačbe $\omega_0 = \sqrt{mg\ell_t/J}$.

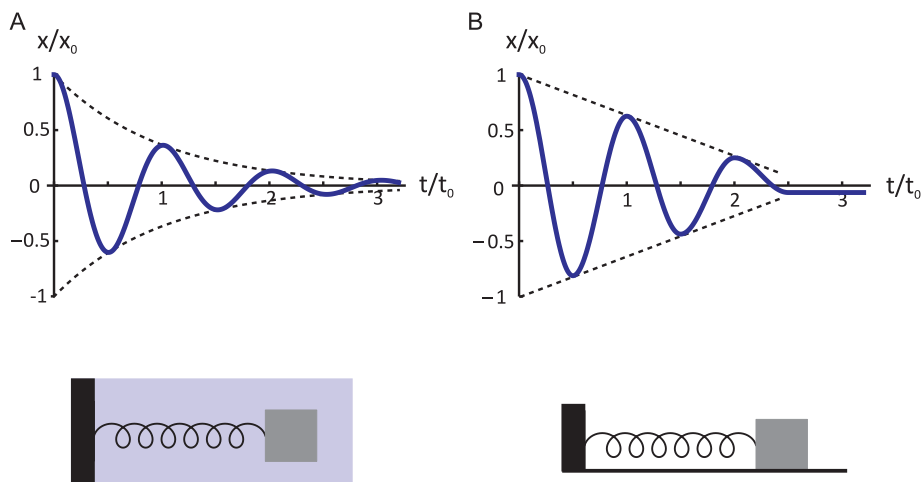
5.2 Dušenje, vzbujanje in resonanca

Pri nihanju realnih sistemov so pogosto prisotne sile trenja. Če takega nihanja dodatno ne vzbuja, se bo zaradi trenja energija nihanja počasi manjšala, dokler se nihanje ne bo povsem zadušilo. Izkaže pa se, da je tudi pri dušenem harmoničnem nihalu frekvenca nihanja lastnost sistema ter ni odvisna od amplitude nihanja in se s časom ne spreminja.

Dušeno nihanje je najbolj raziskano v sistemu, pri katerem je sila trenja sorazmerna hitrosti. Kasneje bomo v poglavju o viskoznosti videli, da sila trenja nastopa pri gibanju v tekočinah (slika 5.3C). Jakost dušenja v takem sistemu opišemo s *koeficientom dušenja* β . Daljša analiza pokaže, da pri takem nihanju amplituda nihanja zamira eksponentno s časom: $x_0 \propto e^{-\beta t}$ (večje kot je dušenje, hitreje nihanje zamira). Frekvenca dušenega nihanja se s časom ne spreminja, le malo manjša je kot v nedušenem primeru:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} . \quad (5.11)$$

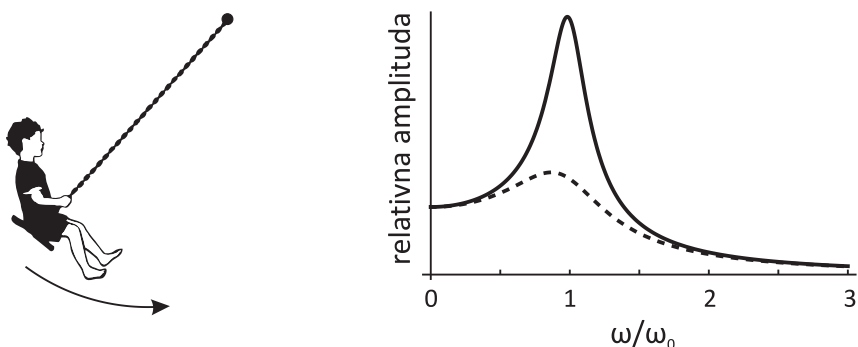
Če je sila trenja zelo velika in je $\beta > \omega_0$, nihalo sploh ne zanika, ampak se le eksponentno vrača proti ravnovesju.



Slika 5.3: Dva primera dušenega nihanja. (A) Pri gibanju v tekočinah je sila upora sorazmerna hitrosti gibanja. Pri takem dušenem nihanju se amplituda manjša eksponentno s časom. (B) Če je sila trenja konstantna, kot npr. pri trenju na podlagi, se amplituda nihanja duši linearno s časom. V obeh primerih se nihanji čas oz. frekvenca nihanja s časom ne spreminjata.

V splošnem sila trenja ni nujno sorazmerna hitrosti. Primer dušenega nihanja s takim trenjem je nihanje mase na vzmeti na podlagi s trenjem (slika 5.3B). V takem primeru se bo amplituda nihanja s časom manjšala kar linearno, frekvenca nihanja pa se zaradi dušenja ne spremeni. Tudi v tem primeru velja, da je lastna frekvenca nihanja lastnost nihala da je hitrost padanja amplitude tem večja, čim večje je dušenje.

Če želimo vzbuditi nihanje mirujočega nihala ali pa le ohranjati nihanje dušenega nihala, mu moramo dovajati energijo. Izkaže se, da za vzbujanje nihala ne potrebujemo velike sile, če le s silo delujemo v pravih trenutkih. To lastnost nihala spozna vsak otrok, ki se je uči gugalnice na gugalnici (slika 5.4). Za uspešno gugalje mora težišče svojega telesa premikati z ravno pravo frekvenco, če pa bo noge premikal prehitro ali prepočasi, se gugalnica ne bo zagugala. Prava frekvenca za vzbujanje je ravno lastna frekvenca nihala. Pojav, ko nihalo vzbujamo z njegovo lastno frekvenco imenujemo *resonanca*. Če nihalo vzbujamo z resonančno frekvenco, mu v vsakem nihaju dovedemo dodatno energijo, zato lahko amplituda nihanja zelo naraste. Pri tem velja, da bolj kot je sistem dušen, nižjo resonančno amplitudo doseže (slika 5.4B).

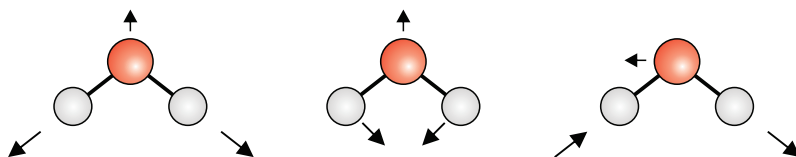


Slika 5.4: Iz izkušnje na gugalnici vemo, da je za vzbujanje nihala potrebna ravno prava frekvenca, ki jo imenujemo resonančna frekvenca. Če noge premikamo prehitro ali prepočasi, gugalnica ne bo zanihala. Diagram na desni prikazuje, kako je amplituda vzbujenega nihanja odvisna od frekvence vzbujanja ω , če je lastna frekvenca nihanja ω_0 . Če je frekvenca vzbujanja majhna, bo nihalo nihalo kar z amplitudo vzbujanja. Največjo amplitudo nihanja nihala dosežemo v resonanci, ko nihalo vzbujamo ravno z njegovo lastno frekvenco ($\omega/\omega_0 = 1$), če pa nihalo vzbujamo s preveliko frekvenco, bo vzbujena amplituda nihanja zelo majhna. Polna črta prikazuje resonanco v sistemu z majhnim dušenjem, črtkana pa resonanco v sistemu z velikim dušenjem.

5.3 Nihanje molekul in spektroskopija

Interakcije med atomi v molekulah si lahko v predstavljamo kot drobne vzmeti, ki atome povezujejo med seboj (slika 4.3). Podobno, kot zaniha vzmetno nihalo, lahko zanihajo tudi atomi v molekuli, frekvenca njihovega nihanja pa je v skladu z enačbo 5.3 odvisna od mase atomov in jakosti interakcije med njimi (vrednost konstante vzmeti k v tem primeru razberemo iz strmine potencialne jame medatomske interakcije v okolici ravnovesja, slika 4.3B). Zaradi majhne mase atomov so lastne frekvence nihanja molekul zelo visoke, tipično nekaj 10 THz (10^{13} Hz), kar so frekvence, ki ustrezajo infrardečemu elektromagnetnemu valovanju.

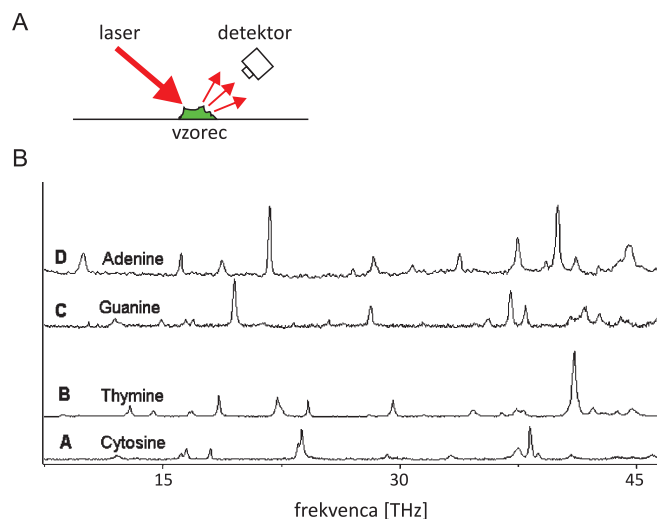
Preprosto vzmetno nihalo niha le v eni smeri in ima le eno lastno frekvenco, gibanje atomov v molekuli pa je lahko veliko bolj raznoliko, saj je število neodvisnih načinov nihanja molekule povezano s številom njenih prostostnih stopenj. V splošnem se vsak lahko atom v molekuli giblje neodvisno v vseh treh smereh, zato je v molekuli z N atomi število vseh prostostnih stopenj enako $3N$. Od teh jih je za nihanje na voljo toliko, kolikor se jih ne porabi za gibanje težišča molekule in njene rotacije okoli težišča. Nelinearne molekule imajo tri prostostne stopnje gibanja težišča in tri rotacije, zato bo pri njih število neodvisnih nihanj in lastnih frekvenc enako $3N - 6$. Linearne molekule imajo eno rotacijo manj, zato bo število neodvisnih nihanj pri njih $3N - 5$. Molekula kisika tako niha le na en način (slika 5.1C), katerega lastna frekvenca je 47 THz, molekula vode pa lahko niha na tri neodvisne načine in ima tri lastne frekvence: 48 THz, 110 THz in 113 THz (slika 5.5). Na lastne frekvence molekule lahko preko interakcij oziroma dušenja vpliva tudi kemijsko okolje molekule, zato ima npr. prosta molekula vode malo drugačne lastne frekvence od molekule vode v tekočem stanju.



Slika 5.5: Molekula vode lahko niha na tri neodvisne načine. V prvem primeru je lastna frekvenca nihanja 110 THz, v drugem 48 THz, v tretjem pa 113 THz.

Lastne frekvence molekule so neposredno povezane z njeno strukturo, zato je spekter lastnih frekvenc nihanja molekule njen »prstni odtis«. Z analizo lastnih frekvenc nihanja molekul v snovi lahko torej ugotovimo kemijsko se-

stavo snovi. S tako analizo se ukvarja široko področje znanosti, ki ga imenujemo *spektroskopija*. Poznamo veliko različnih spektroskopskih metod, ki se z razvojem tehnologije tudi neprestano razvijajo. V zadnjih letih se intenzivno raziskuje uporaba spektroskopskih tehnik za medicinsko diagnostiko, saj imajo bolezensko spremenjena tkiva nekoliko drugačno kemijsko sestavo od zdravih in jih z natančno spektroskopsko analizo lahko razločimo. Ena od obetajočih spektroskopskih tehnik je t. i. Ramanova spektroskopija, pri kateri nihanje molekul v vzorcu vzbudimo z laserjem in nato z detektorjem s strani »poslušamo« njihove resonančne frekvence (slika 5.6). To tehniko naj bi bilo v prihodnosti mogoče uporabiti tudi kot del endoskopskega pregleda, zaradi česar bo v marsikaterem primeru odpadla potreba po odvzemu in histološkem pregledu vzorca tkiva.



Slika 5.6: A) Shematski prikaz delovanja Ramanove spektroskopije. Vzorec vzbudimo z laserjem in analiziramo svetlobo, ki se z vzorca siplje v okolico in nosi informacijo o vibracijskem spektru molekul v vzorcu. Ker ima vsaka vrsta molekul svoj značilni vibracijski spekter, lahko na tak način določimo kemijsko sestavo vzorca. B) Primer vibracijskih spektrov dušikovih baz adenina, gvanina, timina in citozina. Zaradi različnih kemijskih struktur dušikovih baz so tudi resonančni vrhovi njihovega nihanja pri različnih frekvencah.

Poglavje 6

Sile in tlaki v snovi

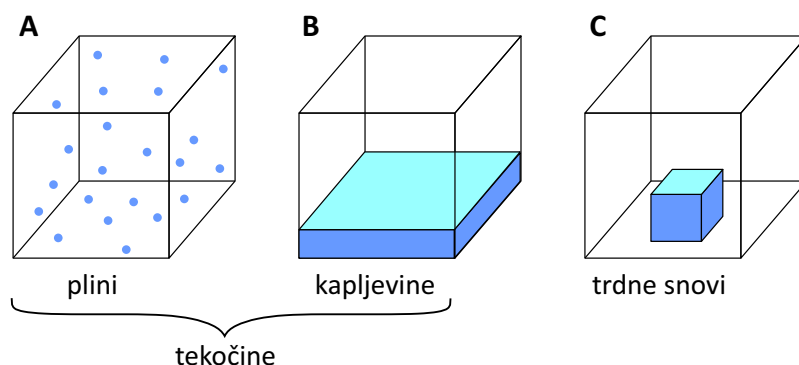
V dosedanjih poglavjih smo obravnavali predvsem vpliv sil na gibanje teles, v nadaljevanju pa si bomo ogledali še, kako lahko zunanje sile telesa deformirajo. Za začetek si oglejmo nekaj splošnih pojmov, s katerimi opisujemo obnašanje teles in snovi pod vplivom sil.

6.1 Tri osnovne vrste snovi

Snovi pogosto razdelimo na tri osnovne skupine: pline, kapljevine in trdne snovi. Glavne razlike njimi so ponazorjene na sliki 6.1, dodaten vpogled pa dobimo, če se spustimo na molekularni nivo. V plinih so interakcije med molekulami prešibke, da bi jih držale skupaj, zato se molekule plina gibljejo neodvisno druga od druge, plin pa napolni vso dostopno prostornino. V kapljevinah so privlačne interakcije med molekulami že dovolj močne, da jih držijo skupaj, a se molekule lahko vseeno gibljejo ena mimo druge. Kapljevine imajo zato svojo prostornino in površino (gladino), hkrati pa lahko tečejo ter svojo obliko prilagodijo okolici. V trdnih snoveh so interakcije med molekulami tako velike, da so molekule trdno vpete ena zraven druge in jih lahko premaknejo šele velike zunanje sile.

Kasneje bomo videli, da delitev na tri skupine snovi dobro velja le v preprostih primerih, veliko snovi (tudi mnoga biološka tkiva) pa ima npr. lastnosti tako trdnih kot tekočih snovi.

Ena najosnovnejših lastnosti snovi je *gostota*, ki pove, kolikšno maso ima določena prostornina snovi, $\rho = m/V$. Tako pri trdnih snoveh kot pri kapljevinah so si molekule blizu skupaj, zato je njihova gostota v prvi vrsti odvisna od molekulske mase atomov, ki snov sestavljajo in je za oboje približno istega



Slika 6.1: Tri osnovne vrste snovi: plini, kapljevine in trdne snovi. Plini napolnijo vso dostopno prostornino in nimajo svoje oblike. Molekule kapljevine se držijo skupaj, a se lahko premikajo ena mimo druge, zato imajo svojo prostornino in gladino. Molekule v trdnih snoveh so trdno vpete ena ob drugo, zato trdne snovi obdržijo svojo obliko. Plini in kapljevine lahko tečejo, zato jih imenujemo tudi tekočine.

reda velikosti. Gostota vode je npr. 1 kg na en liter, gostota aluminija je le 3 krat večja, gostota zlata, ki je ena najgostejših vsakdanjih snovi, pa je približno 20 krat večja. Pri plinih so molekule daleč narazen, zato so plini pri standardnih pogojih približno 1000 krat redkejši. Masa enega litra zraka pri standardnih pogojih je tako le nekaj več kot en gram.

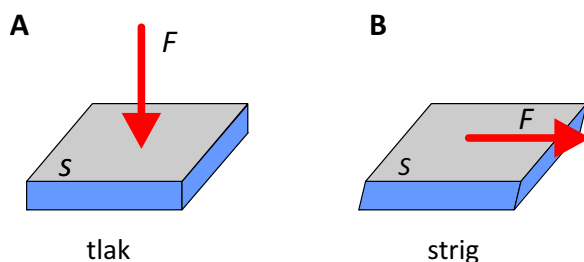
6.2 Sile, tlaki, napetosti, stisljivost

Sile med razsežnimi telesi delujejo preko njihovih površin in so v splošnem zelo zapletene, saj imajo lahko v vsaki točki površine drugačno velikost in smer. Za nas bo dovolj, da si ogledamo le dva najpreprostejša primera delovanja sile na telo: če sile delujejo pravokotno na njegovo površino ali vzporedno s površino. V obeh primerih je vpliv sile na telo odvisen od tega, na kako veliki površini je sila razporejena.

Če je sila pravokotna na površino govorimo o *tlaku*:

$$p = \frac{F}{S}, \quad (6.1)$$

kjer je p tlak, S pa površina, pravokotno na katero deluje sila F . SI enota za tlak je pascal, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$.



Slika 6.2: Dva osnovna načina delovanja sil na snovi. Če sila deluje pravokotno na površino in molekule snovi stiska ali razpenja, govorimo o tlaku (p), če pa je sila vzporedna s površino in molekule snovi potiska eno mimo druge, govorimo o strigu oz. strižni napetosti (τ). V obeh primerih je učinek odvisen od velikosti sile na velikost površine ($p = F/S$ oz. $\tau = F/S$), zato imata obe količini isto enoto pascal.

Če zunanja sila na telo deluje vzporedno s površino, govorimo o *strigu*. Če na trdne snovi delujemo s strižno silo, se deformirajo, plini in kapljevine pa se strižni sili ne morejo upirati in pod njenim vplivom stečejo. Plini in kapljevine se zato imenujejo tudi *tekočine*. Kot bomo videli kasneje, je tudi vpliv strižnih sil povezan s tem, na kako veliki površini delujejo, le da v tem primeru ne govorimo o tlaku, temveč o *strižni napetosti* $\tau = F/S$, ki pa ima enako enoto kot tlak.

V pomoč pri razumevanju razlik med tlakom in strigom nam je lahko naslednja primerjava. Tlak molekule snovi potiska skupaj (ali narazen), zato je njegova posledica sprememba prostornine snovi. Nasprotno strig molekule potiska eno mimo druge in zaradi tega ne povzroči spremembe prostornine. Od tod strigu tudi ime: strig »striže« enako kot rezili pri škarjah, ki zdrsita eno mimo drugega.

S tlakom lahko torej snovi stiskamo ali razpenjamo. Lastnost, ki pove, kako težko je neko snov stisniti, se imenuje *stisljivost* (χ) in je definirana z naslednjo enačbo

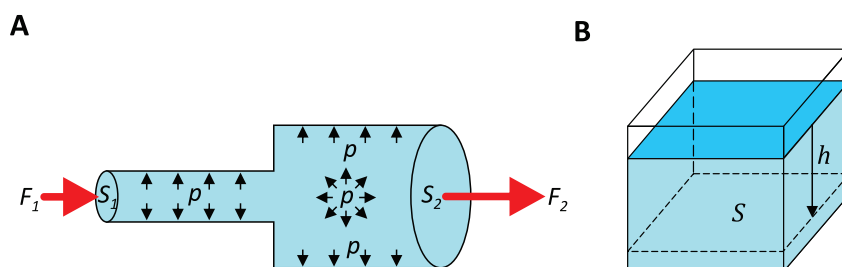
$$\frac{\Delta V}{V} = -\chi \Delta p. \quad (6.2)$$

Stisljivost snov torej povezuje relativno spremembo prostornine s spremembo tlaka na snov. Enota za stisljivost je Pa^{-1} . Večja kot je stisljivost snovi, lažje jo lahko stisnemo. Stisljivosti trdnih snovi in kapljev so ponavadi majhne, saj so njihove molekule že v normalnih pogojih blizu skupaj. Če želimo kapljevino ali trdno snov stisniti za 1 %, potrebujemo zelo velik tlak, tipično

reda velikosti 10^8 Pa oziroma približno 1000 barov (1 bar enak normalnemu zračnemu tlaku, $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$), kar je za normalne razmere zelo veliko. Veliko preprostih trdnih snovi in kapljev, tudi npr. voda, je torej praktično nestisljivih in njihova gostota ni odvisna od delovanja zunanjih sil. Stisljivost plinov pri standardnih pogojih je po drugi strani približno 10^5 krat večja in jih lahko stisnemo brez težav.

6.3 Hidrostatski tlak, vzgon

Molekule v tekočinah se lahko prosto gibljejo, zato se med stiskanjem tekočine preuredijo tako, da se tlak povsod v tekočini poveča enako (če se ne bi bil, bi se molekule gibale od večjega proti manjšemu tlaku). To lastnost je ob preučevanju hidravličnih sistemov prvi zapisal znameniti francoski znanstvenik Blaise Pascal, zato jo danes imenujemo Pascalov zakon (slika 6.3A). Tlak v tekočini ima zato enako vrednost v vseh smereh in je skalarna količina.



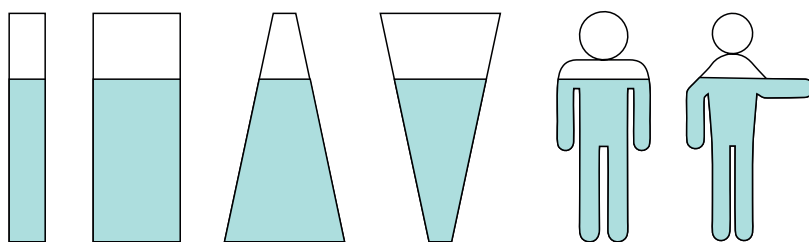
Slika 6.3: A) Pascalov zakon: če tekočino stiskamo, se tlak v njej enako poveča po vsej prostornini. Na osnovi tega principa deluje hidravlični prenos sile, pri katerem majhna sila na strani z majhno površino povzroči veliko silo na strani z veliko površino, $p = F_1/S_1 = F_2/S_2 \Rightarrow F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$. B) Hidrostatski tlak: zaradi sile teže tekočine tlak v njej narašča z globino.

S Pascalovim zakonom sta tesno povezani dve pomembni lastnosti tekočin: hidrostatski tlak in vzgon. Zaradi sile teže namreč vsak del tekočine s svojo težo enakomerno pritiska na površino pod seboj, kar povzroči naraščanje tlaka z globino oz. t. i. *hidrostatski tlak*. Pri nestisljivih kapljevah je gostota (ρ) neodvisna od tlaka, zato lahko hidrostatski tlak brez težav izračunamo (slika 6.3B): pri globini h na spodnjo ploskev s površino S pritiska teža kapljevine nad njo, ki je enaka $F_g = mg = \rho Vg = \rho Shg$. Tlak je sila na površino, zato se pri izračunu tlaka S pokrajša in je naraščanje tlaka odvisno le

od globine in gostote tekočine ($p = F_g/S = \rho gh$). Ponavadi na zgornjo površino kapljevine deluje še zunanji zračni tlak p_0 , zato tlak v tekočini z globino narašča kot

$$p = p_0 + \rho gh . \quad (6.3)$$

Hidrostatski tlak je torej odvisen le od globine v tekočini in je neodvisen od oblike in velikosti posode (slika 6.4).



Slika 6.4: V vseh šestih posodah je enaka višina vode, v kateri posodi pa je tlak na dnu največji? Če ni drugih zunanjih sil razen sile teže, je tlak v tekočini odvisen le od višine tekočine in je torej v vseh posodah enak! Tudi krvožilje je neke vrste »posoda«, zato je krvni tlak v nogah večji kot v glavi.

Enačba 6.3 velja za vse nestisljive kapljevine, npr. za vodo, kri in živo srebro. Enačbo dobro poznajo potapljači, ki vedo, da se tlak v vodi na vsakih 10 m globine poveča za približno 1 bar ($1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ m} \approx 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$). Gostota živega srebra je približno 13,5 krat večja od gostote vode, zato bi bil tlak na isti globini v živem srebru 13,5 krat večji kot v vodi in so včasih živo srebro uporabljali pri merjenju tlaka. V medicini se za tlak tako še danes uporablja enota mmHg (milimeter živega srebra), ki je definirana kot tlak, ki ga pod seboj ustvarja stolpec živega srebra z višino 1 mm (primer 6.1). Plini so stisljivi, zato se pri njih z višino spreminja tudi gostota in je spreminjanje tlaka z višino eksponentno (več o tem še pri poglavju Termodinamika).

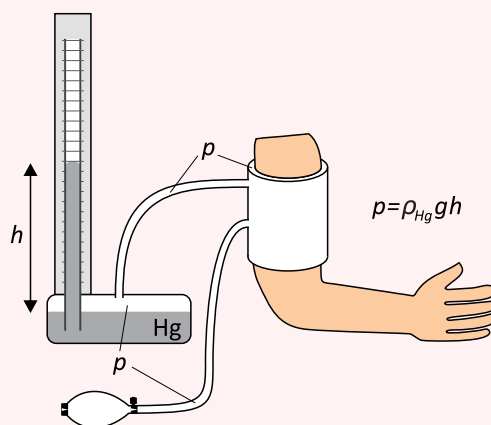
Primer 6.1: zakaj zdravniki krvni tlak merijo v enoti mmHg?

Zdravniki pri merjenju tlaka pogosto ne uporabljajo enote Pa, temveč enoto mmHg (milimeter živega srebra), ki je po velikosti enaka tlaku, ki ga pod seboj ustvarja 1 mm živega srebra. Z upoštevanjem enačbe 6.3 hitro izračunamo

$$1 \text{ mmHg} = \rho_{\text{Hg}} gh = 13534 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 133 \text{ Pa} .$$

Velja tudi, da je $760 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm}$. Enoti mmHg je približno enaka tudi stara enota za tlak torr.

Enota mmHg izvira v prvih merilcih tlaka (manometrih oz. barometrih), ki so velikost tlaka določali preko hidrostatskega tlaka, ki ga pod seboj ustvarja stolpec živega srebra z določeno višino. Kot primer si lahko pogledamo delovanje kliničnega živosrebrnega sfigmomanometra (gr. sphygmōs pomeni pulz), ki je shematično prikazan na spodnji sliki:



V neprodušno zaprti posodi je živo srebro, v katerega je potopljena steklena cevka, zrak nad živim srebrom v posodi pa je po gumijasti cevki povezan z manšeto. Ko z gumijasto žogico načrpamo zrak v manšeto, povečamo tlak v manšeti, enako pa se poveča tudi tlak nad živim srebrom v posodi, zaradi česar se ustrezno dvigne živo srebro v cevki. Povečanje tlaka zraka v manšeti je torej enako tlaku, ki ga pod seboj ustvarja stolpec živega srebra v cevki, zato lahko velikost tlaka v manšeti odčitamo kar neposredno iz višine stolpca živega srebra v mm. Če je višina stolpca živega srebra npr. 110 mm, je torej tlak v manšeti 110 mmHg višji od zunanjega zračnega tlaka.

Ker je živo srebro strupeno, manometrov na živo srebro raje ne uporabljamo več, na njih pa nas bo vedno spominjala enota mmHg.

Podoben razmislek, kot smo ga imeli pri hidrostatskem tlaku nam pomaga razumeti tudi znameniti Arhimedov zakon vzgona. Če v tekočino potopimo telo, deluje tekočina na spodnjo površino telesa z višjim tlakom kot na zgornjo površino (spodnja površina telesa je na večji globini, kjer je tlak višji), stranske sile tlaka na telo pa so si iz nasprotnih strani telesa nasprotno enake in se medsebojno odštejejo. Rezultanta sil na telo torej deluje navpično navzgor in se imenuje *sila vzgona*. Če si predstavljamo, da ima telo preprosto kvadrato obliko, lahko z enakim računom, kot smo ga opravili za hidrostatski tlak, izračunamo, da je sila vzgona enaka teži izpodrinjene tekočine:

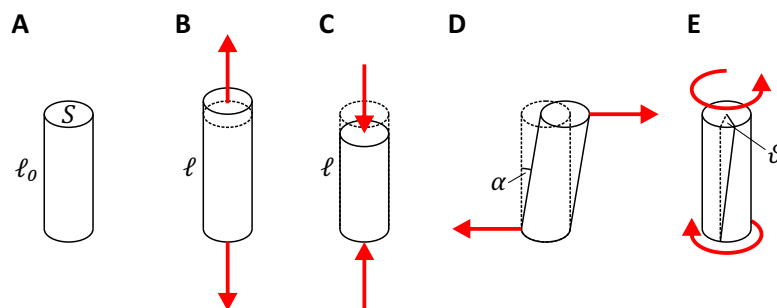
$$F_{\text{vzgon}} = V_{\text{telo}} \rho_{\text{tekocina}} g \cdot \quad (6.4)$$

Arhimedov zakon uporabljajo npr. fizioterapevti, ki računajo obremenitve gležnja ali kolena med telovadbo v bazenu – višje, kot nam sega voda v bazenu, večja je sila vzgona in manjša je sila v sklepu.

Poglavje 7

Deformacije trdnih snovi

V nasprotju s plini in tekočinami imajo trdna telesa svojo obliko, ki se spremeni šele ob delovanju močnih zunanjih sil. Slika 7.1 prikazuje nekaj najpogostejših načinov delovanja zunanjih sil in posledičnih deformacij: natezno, tlačno in strižno deformacijo že poznamo, za razumevanje zlomov kosti v medicini pa je pomembna tudi vzvojna (torzijska), ki je podobna strižni, le da je telo obremenjeno z navorom in ne s silo.

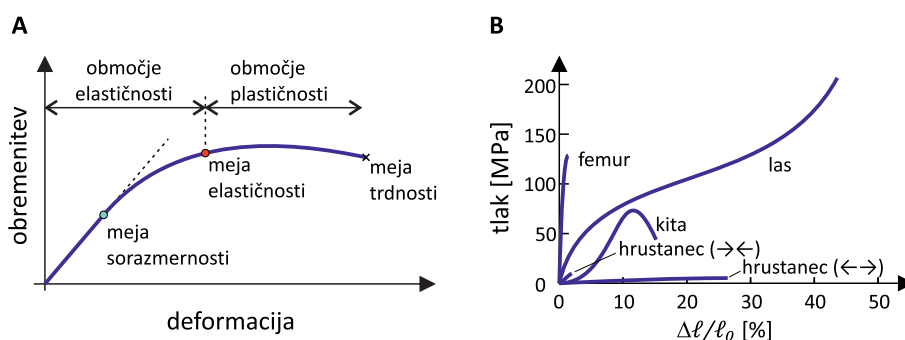


Slika 7.1: Shematični prikaz osnovnih tipov obremenitve in posledičnih deformacij trdnih teles. A) V ravnovesju ima telo dolžino ℓ_0 in površino preseka S . B) Natezna obremenitev. C) Tlačna obremenitev. D) Strižna obremenitev. Pri njej je mera za velikost deformacije kot nagiba α . E) Vzvojna oz. torzijska obremenitev. Mera za velikost deformacije pri njej je kot zasuka ϑ .

Poglejmo si nekaj osnovnih pojmov, s katerimi opisujemo deformacijo trdnih snovi pod obremenitvijo. Prva pomembna lastnost je obrnljivost deformacije: če se telo po prenehanju obremenitve vrne v začetno obliko, gre za *elastično* oz. *prožno* deformacijo, v nasprotnem primeru pa za *plastično* de-

formacijo. Guma je primer zelo prožne snovi, ki se lahko vrne v prvotno obliko tudi po velikih deformacijah, gnetenje plastelina pa je lep primer plastične deformacije.

Mehanske lastnosti nekega telesa pogosto prikažemo na diagramu, na katerem je prikazana odvisnost obremenitve od deformacije (slika 7.2). Za mnoge snovi velja, da je pri dovolj majhni obremenitvi velikost deformacije kar sorazmerna obremenitvi. Sorazmernost med deformacijo in obremenitvijo imenujemo Hookov zakon, ki smo ga že srečali pri idealni vzmeti (primer 3.4). Če se obremenitev poveča preko meje sorazmernosti, je za nadaljnje povečevanje deformacije potrebna vedno manjša obremenitev, deformacija pa je še vedno v območju elastičnosti in je reverzibilna. Šele ko prekoračimo t. i. mejo elastičnosti in preidemo v območje plastičnosti, se telo preoblikuje trajno in se po prenehanju obremenitve ne vrne več v začetno obliko. Ko deformacija doseže mejo trdnosti, se snov zlomi oz. pretrga.



Slika 7.2: A) Shematični prikaz tipičnega obnašanja trdnih teles pod obremenitvijo. Z večanjem obremenitve se večja deformacija - pri majhnih deformacijah je zveza linearna, pri večjih pa za povečanje deformacije potrebujemo vedno manjšo povečanje obremenitve. Če obremenitev ni prevelika, je deformacija v območju elastičnosti in telo se po prenehanju obremenitve vrne v začetno obliko. Pri večjih obremenitvah pridemo v območje plastičnosti, pri dovolj veliki obremenitvi pa dosežemo mejo trdnosti in se telo zlomi oz. pretrga. B) Zveza med deformacijo in natezno obremenitvijo za femur, kito, hrustanec in las [7, 8]. Zveze za hrustanec in kito so tudi pri majhnih deformacijah nelinearne. Za hrustanec je prikazana tudi zveza za tlačno obremenitev ($\rightarrow\leftarrow$), pri kateri se deformira bistveno manj kot pri natezni ($\leftarrow\rightarrow$). Prikazane zveze so ilustrativne, saj so med ljudmi obstajajo velike variacije, poleg tega pa se zelo spreminjajo tudi s starostjo.

»Trdoto« snovi¹ v območju sorazmernosti pogosto opišemo z *elastičnimi konstantami* oz. *elastičnimi moduli* snovi. To so konstante, ki nastopajo v Hookovem zakonu in so za različne deformacije definirane različno. Najpreprostejši Hookov zakon smo srečali pri vzmeti, kjer silo in deformacijo povezuje konstanta vzmeti ($F = kx$). Hookov zakon za natezno in tlačno obremenitev elastične snovi zapišemo podobno:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta \ell}{\ell_0}, \quad (7.1)$$

kjer se konstanta E imenuje *Youngov modul* in ima enoto pascal, ℓ_0 je dolžina telesa brez obremenitve, $\Delta \ell$ sprememba dolžine telesa pod obremenitvijo, S pa je prečni presek telesa. Hookov zakon je v tem primeru torej zveza med nateznim tlakom in relativnim podaljšanjem telesa (vrednost $\Delta \ell / \ell_0$ predstavlja relativno spremembo dolžine) – če na snov delujemo s tlakom, ki je 1 % vrednosti Youngovega modula, se bo podaljšala za 1 % svoje dolžine (primer 7.1). Na grafu zveze med obremenitvijo in deformacijo (slika 7.2A) lahko vrednost Youngovega modula odčitamo kot naklon krivulje v območju sorazmernosti. »Trša« kot je snov, večji ima Youngov modul in bolj strma je krivulja.

Strižno deformacijo opišemo s kotom nagiba α (slika 7.1D), Hookov zakon zanj pa je sorazmernost med kotom nagiba in strižno napetostjo:

$$\tau = E_s \alpha, \quad (7.2)$$

kjer konstanto E_s imenujemo *strižni modul*.

Vzvojno deformacijo opišemo s kotom zasuka θ (slika 7.1E), obremenitev pa je kar navor, s katerim zvijamo telo. Sorazmernostni koeficient v tem primeru imenujemo *direkcijska konstanta* (D), Hookov zakon pa zapišemo kot:

$$M = D \theta \quad (7.3)$$

Opozorimo naj, da po zgornjih definicijah Youngov in strižni modul nista odvisna od oblike temveč le od vrste snovi. Direktijska konstanta in konstanta vzmeti sta po drugi strani odvisni tudi od oblike. Pri dani sestavi kosti je

¹V pogovornem jeziku trdne snovi niso tekoče, trde pa niso mehke. Strokovna definicija »trdote« ni tako enostavna, a je tu ne bomo obravnavali.

npr. njena direkcijska konstanta odvisna od njene debeline (kako?), Youngov modul pa ne.

Pri enostavnih snoveh so velikosti modulov med seboj pogosto povezane in imajo npr. snovi z velikim Youngovim modulom tudi velik strižni modul. Preproste povezave med različnimi moduli pa ne držijo več pri zapletenejših telesih, še posebej pri takšnih, ki so sestavljena iz različnih strukturnih komponent in niso homogena in izotropna (tj. nimajo enake sestave po vsej prostornini in ne enakih lastnosti v vseh smereh). Enostaven primer takega telesa je kup listov papirja, ki jih postavimo na ravno površino - tak kup ima relativno velik Youngov modul na tlačno obremenitev z zgornje strani, njegov strižni modul pa je majhen, saj ga lahko poruši že majhna vodoravna sila.

Mnoge biološke snovi niso enostavne, zato so njihove mehanske lastnosti pogosto bolj zapletene od lastnosti npr. kosa jekla. Slika 7.2B prikazuje zvezo med deformacijo in obremenitvijo za štiri biološke snovi. Hrustanec je npr. bistveno trši ob stiskanju kot ob raztezanju, natančna analiza pa pokaže, da zveza med obremenitvijo in deformacijo ni linearna niti pri majhnih deformacijah (takim snovem pravimo ne-Hookeve). Las na prvi pogled zgleda močnejši od femurja, a spomnimo se, da so lasje zelo tanki in je natezni tlak zelo velik že pri zelo majhnih silah. Izkaže se tudi, da imajo kosti zaradi svoje neizotropne sestave večji Youngov modul za longitudinalno obremenitev kot za transversalno obremenitev [8].

Poznavanje mehanskih lastnosti ni pomembno le za različne snovi in tkiva, ampak tudi za celotne organe. Za votle organe (npr. za pljuča ali žile) je tako zelo pomembna lastnost njihova *podajnost* oz. *komplianca* (C), ki pove, za koliko se organ raztegne, če se spremeni tlačna razlika med notranjostjo in zunanostjo organa. Definirana je preko enačbe

$$\Delta V = C \Delta p \quad (7.4)$$

Če ima organ veliko podajnost, se mu bo torej prostornina opazno spremenila že ob majhni spremembi tlaka. Vene so npr. mnogo bolj raztegljive od arterij in imajo torej tudi precej večjo podajnost. Iz definicije podajnosti sledi ($C = \Delta V / \Delta p$), da jo lahko razberemo tudi kot naklon krivulje, ki opisuje zvezo med prostornino in tlakom v organu. Ta odvisnost ponavadi ni linearna, zato tudi podajnost ni konstanta ampak je odvisna od prostornine organa. Včasih se uporablja tudi specifična podajnost, tj. podajnost na enoto prostornine, $C_p = C/V$, ki je količina, analogna stisljivosti (enačba 6.2).

Primer 7.1: obremenjevanje kosti in las

1. Ocenimo, za koliko se skrajša femur, ko stojimo na eni nogi! Youngov modul kosti na longitudinalno tlačno obremenitev je približno 18 GPa, dolžina kosti je približno 0.5 m, polmer njenega prečnega preseka je približno 10 mm, naša masa pa je približno 70 kg.

Tlak, s katerim obremenjujemo femur je

$$p = \frac{F}{S} = \frac{mg}{\pi r^2} = \frac{700 \text{ N}}{\pi 0,01^2 \text{ m}^2} \approx 2,2 \text{ MPa} ,$$

kar je približno 0,01 % vrednosti Youngovega modula. S pomočjo enačbe 7.1 tako ugotovimo, da se bo kost skrčila za približno 0,01 % svoje dolžine, kar je 0,05 mm in je v primerjavi z dolžino hlač praktično zanemarljivo.

2. Za koliko pa se lahko femur raztegne preden se zlomi? Na sliki 7.2B je razvidno, da je meja trdnosti pri približno 1 % deformaciji. Femur, dolg 0,5 m, se pri natezni obremenitvi pred zlomom torej podaljša za približno 5 mm, kar nikakor ni zanemarljivo.

3. Kako težak predmet lahko obesimo na las preden se strga? Premer lasu je približno 100 μm .

Na sliki 7.2B je razvidno, da je meja trdnosti lasu pri približno 200 MPa. Sila, ki je potrebna za tako velik natezni tlak je

$$F = pS = p\pi r^2 = 200 \text{ MPa} \cdot \pi \cdot 50^2 10^{-12} \text{ m}^2 = 1,6 \text{ N}$$

Na en las lahko torej obesimo predmet z maso približno 160 g.

4. Ocenimo, koliko las moramo splesti v kito, da bo na njej lahko varno visela 70 kg težka oseba?

Intuitivno sklepamo, da več las zdrži večjo težo. Če vsak las zdrži 0,16 kg, bosta dva zdržala 0,32 kg in tako naprej. Potrditev za to intuitivno ugotovitev najdemo v dejstvu, da je sila, ki je potrebna za deformacijo telesa sorazmerna njegovemu prečnemu preseku (v enačbi 7.1, $F = SE\Delta\ell/\ell_0$). Z dodajanjem las v kito sorazmerno povečujemo njen presek, Youngov modul pa se pri tem seveda ne spremeni.

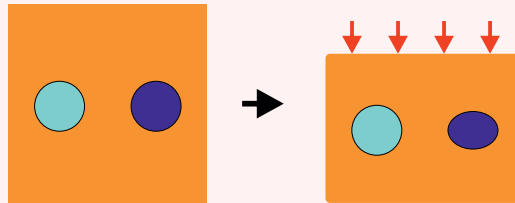
Glede na zgornje podatke, bi osebo s 70 kg torej zdržalo že $700 \text{ N}/1,6 \text{ N} \approx 440$ las! Morda torej le ni nemogoče, da je baron Münchhausen sam sebe za lase potegnil iz blata...

Primer 7.2: elastografija

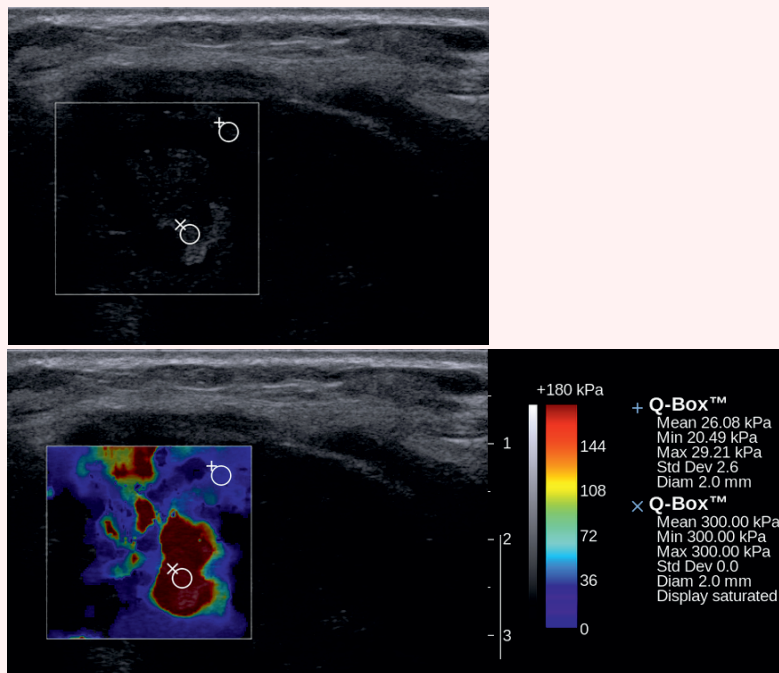
Tumorji so pogosto trši od zdravega tkiva, zato jih zdravniki že od nekdaj zaznavajo s tipanjem (s t. i. *palpacijo*). V zadnjih letih poskušajo to znanje prenesti tudi v sodobne objektivne diagnostične metode, s katerimi bi lahko neinvazivno izmerili »trdoto« tkiv v telesu oz. njihov Youngov elastični modul. Ena takih tehnik je *elastografija*.

Osnovna ideja elastografije je preprosta: telo slikamo s standardno slikovno metodo, nato ga deformiramo, slikamo še enkrat ter sliki primerjamo. Trde strukture v telesu bomo brez težav razbrali iz primerjave obeh slik, saj se bodo deformirale manj od mehkih struktur. Princip ilustrira spodnja slika. Svetlo modra struktura v tkivu je

mного trša od temno modre in okoliškega tkiva, zato se ob deformaciji telesa deformira bistveno manj.



Opisani princip je združljiv s katerokoli slikovno metodo, največ pa ga kombinirajo z ultrazvočnim slikanjem in magnetno resonanco. Deformacijo tkiva lahko dosežemo na več načinov: tkivo lahko preprosto stisnemo od zunaj, lahko uporabimo ultrazvočni val, lahko pa izkoristimo kar fiziološke deformacije v telesu, npr. utripanje srca. Če poznamo elastične module običajnega tkiva, lahko računalnik na osnovi primerjave slik pred in po deformaciji izračuna elastične module vseh struktur na sliki.



Zgoraj je prikazana standardna ultrazvočna slika papilarnega karcinoma ščitnice, spodaj pa še ista slika, na kateri pa so strukture obarvane glede na izmerjen elastični modul. Elastografija lepo pokaže, da je karcinom bistveno trši od okoliškega tkiva (povzeto po [9]).

Poglavje 8

Površinska napetost

Glavna značilnost kapljev in je, da se molekule v njih držijo skupaj, hkrati pa se lahko premikajo ena mimo druge. Kapljevine imajo zaradi tega zanimivo lastnost imenovano *površinska napetost*, ki omogoča vrsto presenetljivih pojavov, npr. tek vodnih drsalcev po vodni gladini ali pa spontan dvig vode v tankih kapilarah.

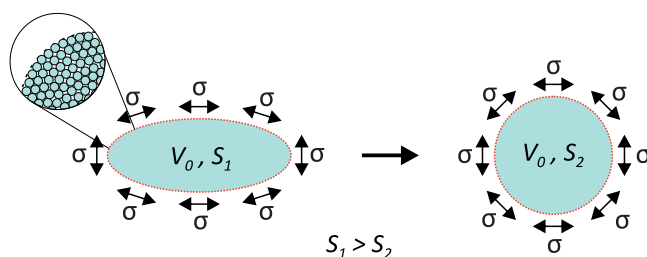
Površinsko napetost bomo najbolje razumeli, če na vodno gladino pogledamo s stališča energije¹. Molekule vode se med seboj privlačijo (če se ne bi privlačile, bi se razletele po vsem prostoru!) in če hočemo vez med dvema molekulama pretrgati, moramo opraviti delo. Za vsako molekulo vode je tako energijsko ugodno, da se poveže s čim več sosedami. Molekule na površini vode na eni strani nimajo sosed, s katerimi bi lahko ustvarjale vezi, zato je površina energijsko neugodna. Vsako povečanje površine vode je povezano s trganjem vezi med molekulami, ki se iz notranjosti preselijo na površino, ter torej stane energijo, ki je kar sorazmerna povečanju površine.

V poglavju o energiji (poglavje 4.2) smo videli, da sistemi težijo k čim manjši energiji, zaradi česar tudi voda teži v stanje s čim manjšo površino. Če ni zunanjih sil, se vodna kapljica zato oblikuje v kroglo, ki je oblika z najmanjšo površino pri dani prostornini (slika 8.1). Tendencia po čim manjši površini se nam s stališča sil kaže kot površinska napetost, ki si neprestano želi krčiti površino.

Opis površinske napetosti dopolnimo še z njeno definicijo preko enačbe:

$$A = \Delta W_\sigma = \sigma \Delta S \quad (8.1)$$

¹Dodatno razlago površinske napetosti najdete v [10].



Slika 8.1: Shematski prikaz izvora površinske napetosti. Površina vode je energijsko neugodna, saj molekule vode na površini ne morejo tvoriti toliko vezi s sosedami kot molekule v notranjosti. Voda si zato želi svojo površino čim bolj zmanjšati. Če ni zunanjih sil, se kapljica vode spontano preoblikuje v kroglo, kar je oblika z najmanjšo površino pri dani prostornini. Ta tendenca vode po zmanjšanju površine se nam kaže kot površinska napetost σ , ki si neprestano želi krčiti površino in je konstantna po vsej gladini in ni odvisna od oblike kapljice.

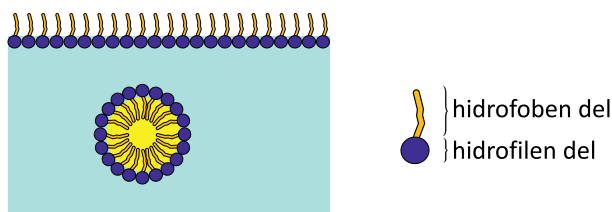
kjer je A delo, ki ga moramo vložiti v povečanje površine, W_σ je površinska energija, površinska napetost pa je sorazmernosti koeficient σ in ima enoto N/m. Izvor površinske energije so medmolekulske potencialne energije (slika 4.3), zato tudi pri W_σ ponavadi merimo spremembe in ne absolutnih vrednosti. Površinska napetost pri čistih snoveh ni odvisna od velikosti površine: gladina vode je vedno enako napeta, ne glede na svojo velikost ali obliko.

V splošnem je površinska napetost lastnost stika med dvema snovema in opisuje, kako »radi« sta dve snovi v stiku: manj kot sta dve snovi »radi« v stiku, šibkejšje so medmolekulske vezi med njima, več energije moramo vložiti v povečanje površine njunega stika in večja je površinska napetost med njima (s povečevanjem površine njunega stika trgamo vezi v vsaki od snovi, novih vezi na površini pa ne ustvarjamo). Površinska energija in površinska napetost obstajata tudi na meji trdnih snovi, le da se te ne morejo preoblikovati, zaradi česar površinsko napetost pri njih težje opazimo.

Snovi, ki z vodo ne morejo tvoriti vezi in s katerimi ima voda veliko površinsko napetost, so *hidrofobne* (npr. olje), snovi, ki pa so rade v stiku z vodo, pa so *hidrofilne* (npr. steklo). Obstajajo pa tudi molekule, ki imajo dvojno naravo: na eni strani so hidrofilne, na drugi pa hidrofobne, oz. so *amfipatske* (s sinonimom tudi amfifilne). Takšne so mnoge pomembne biološke molekule, npr. detergenti in lipidi, ki imajo polarno glavo in nepolarne repe, pa tudi nekateri proteini. Amfipatske molekule se v vodni raztopini spontano razporedijo po površini vode in sicer tako, da so njihovi polarni deli obrnjeni proti vodi (slika 8.2). Na tak način bo namreč celoten sistem v energijsko najugo-

dnejšem stanju: vse molekule vode lahko tvorijo vezi ali med seboj ali pa s polarnimi deli amfipatskih molekul.

Prisotnost amfipatskih molekule lahko torej občutno zniža površinsko napetost, zaradi česar jih imenujemo tudi *surfaktanti* (površinsko aktivne molekule). Detergente npr. uporabljamo zato, da znižajo površinsko napetost med vodo in oljem, zaradi česar lahko velike oljne kapljice lažje razbijemo na manjše ter jih odplaknemo z vodo. Različni surfaktanti (večinoma lipidi) so tudi ključni za delovanje pljuč, saj je v pljučih ogromna površina med vodno raztopino in zrakom in je zato tam dobro imeti čim manjšo površinsko napetost.



Slika 8.2: Shematski prikaz razporeditve surfaktantov v vodi. Surfaktanti so amfipatske molekule, sestavljene iz polarnega in nepolarnega dela (na sliki je primer molekule detergenta). V vodi take molekule spontano poiščejo površino (npr. stik z zrakom ali oljem) in na njej nepolarne repe obrnejo stran od vode. Surfaktanti tako občutno zmanjšajo površinsko napetost vode, saj s surfaktantom prekrita površin ni več tako energijsko neugodna.

Omenimo naj še, da med napetostjo in tlakom obstaja lepa analogija: obe količini sta skalarja, le da tlak obstaja v tridimenzionalnem prostoru, napetost pa v dvodimenzionalnih površinah. Če je tlak povezan s silo na enoto površine, je napetost enaka sili na enoto dolžine. Na robu kapljevine se površinska napetost čuti kot sila, s katero kapljevina vleče rob. Sila zaradi površinske napetosti je vedno vzporedna z gladino, njena velikost pa je sorazmerna dolžini roba in površinski napetosti

$$F_{\sigma} = \sigma \ell, \quad (8.2)$$

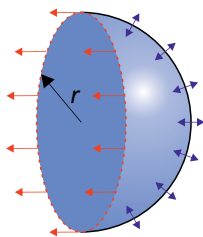
kjer smo z ℓ zapisali dolžino roba površine.

8.1 Laplace-ov zakon za napetost ukrivljenih površin

Površinska napetost vodo neprestano stiska, zato je tlak v vodni kapljici malo večji od zunanjega. To tlačno razliko lahko izračunamo, če si v mislih kapljico prerežemo na polovico in pogledamo ravnovesje sil (slika 8.3). V levo smer vleče sila zaradi površinske napetosti (en. 8.2), ki tangентno na površino deluje vzdolž vsega roba kapljice in je sorazmerna površinski napetosti in dolžini roba kapljice, $F_\sigma = \sigma 2\pi r$. Tej sili nasprotuje tlačna razlika med notranjostjo in zunanostjo kapljice, ki deluje pravokotno na njeno gladino. Rezultanta sil tlaka na desno površino ploskve je usmerjena v desno (komponente sil, ki so vzporedne prerezu kapljice, se zaradi simetrije med seboj izničijo) in je sorazmerna tlačni razliki in površini preseka, $F = \Delta p \pi r^2$. Ko obe sili izenačimo in enačbo preuredimo, dobimo znameniti Laplaceov zakon, ki povezuje tlačno razliko in napetost ukrivljene površine:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \quad (8.3)$$

Po pričakovanju je povečanje tlaka v kapljici sorazmerno površinski napetosti, povsem neintuitivno pa je tlačna razlika obratno sorazmerna radiju in je torej tlak v manjših kapljicah večji kot v velikih! Laplaceov zakon v malo drugačni obliki velja tudi za žile, kjer ima lahko zelo hude posledice (primer 8.1).



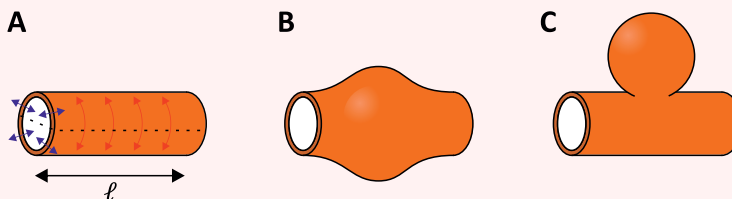
Slika 8.3: Shematični prikaz ravnovesja sil v kapljici vode. Površinska napetost kapljico stiska, zato je v njej večji tlak kot zunaj. Tlačno razliko, napetost površine in ukrivljenost površine povezuje Laplaceov zakon (enačba 8.3), ki sledi iz ravnovesja sil zaradi površinske napetosti (delujejo vzdolž roba kapljice in so na sliki označene z rdečo) in sil zaradi tlačne razlike (te delujejo pravokotno na površino in so na sliki označene z modro).

Podobno situacijo kot pri kapljici vode srečamo tudi pri milnih mehurčkih

(le da je pri njih površina med vodo in zrakom dvojna – ena na zunanji in ena na notranji strani – in je zato tudi tlačna razlika še enkrat večja kot pri kapljici) in v alveolih v pljučih (pri njih je zrak na sredini obdan z vodno raztopino, a je geometrija površine enaka kot pri kapljici). Ker so alveoli zelo majhni (njihov premer je le nekaj $100\ \mu\text{m}$), bi bila v njih tlačna razlika brez surfaktantov zelo velika in bi lahko povzročila kolaps pljuč. S tem imajo lahko velike težave nedonošenčki, saj se surfaktanti v njihovih pljučih začnejo tvoriti šele v drugi polovici nosečnosti. Zdravniki jim pomagajo s terapijo s surfaktanti, ki jih v pljuča takoj po porodu vpihajo od zunaj.

Primer 8.1: Laplaceov zakon za žile in anevrizma

Laplaceov zakon je splošen zakon, ki sledi iz ravnovesja sil in povezuje tlačno razliko preko površine z njeno napetostjo in ukrivljenostjo. Velja npr. tudi za žile, pri katerih krvni tlak v žili napenja žilne stene, le da sta v primerjavi z vodno kapljico pri žilah vzrok in posledica zamenjana: pri kapljici zaradi površinske napetosti naraste tlak v notranjosti, pri žili pa krvni tlak v notranjosti povzroči napetost v žilni steni.



Poglejmo si, kako Laplaceov zakon zapišemo za žilo. V mislih si žilo po dolgem razrežimo in zapišimo ravnovesje sil (v pomoč nam je lahko slika A): sila, zaradi napetosti je sorazmerna dolžini roba, $F_\sigma = 2\ell\sigma$ (ℓ je dolžina žile), uravnovesi pa jo sila zaradi tlačne razlike, ki je sorazmerna površini preseka žile, $F = \Delta p\ell 2r$. Ko sili izenačimo in pokrajšamo ℓ , dobimo Laplaceov zakon za valjasto geometrijo:

$$\sigma = \Delta p r \quad (8.4)$$

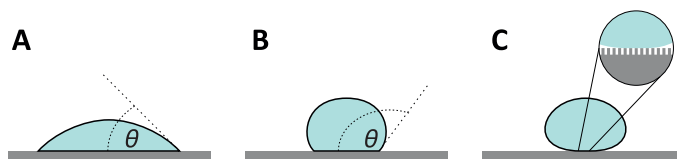
Tu je σ napetost žilne stene in v nasprotju s površinsko napetostjo ni konstanta. Napetost smo zato zapisali na levo stran enačbe, tlačno razliko, ki je vzrok napetosti, pa smo dali na desno (enačba je sicer povsem analogna Laplaceovem zakonu, enačbi 8.3, le faktorja 2 ni, saj je ukrivljenost valjaste površine polovica ukrivljenosti sferične površine kapljice). Po pričakovanju ima večji tlak v žili za posledico večjo napetost žilne stene. Laplaceov zakon tudi pove, da je pri danem tlaku napetost tem večja, čim večji je radij žile. Kapilare so v primerjavi z arterijami zelo majhne, zato so lahko njihove žilne stene bistveno tanjše.

Za žile ima Laplaceov zakon usodne posledice: če žilna stena zaradi prevelike napetosti začne popuščati in se žila izboči, se napetost v žilni steni s tem ne sprosti, temveč se le še poveča! Iz zgornje enačbe namreč vidimo, da je pri danem krvnem tlaku napetost žilne stene sorazmerna radiju žile! Popuščanje žilnih sten je torej zelo nestabilni

pojav in vodi v neustavljivo napihovanje žile, kar imenujemo *anevrizma*. Če se anevrizme ne zdravi, lahko počí in v skrajnem primeru povzroči tudi smrt. Na slikah B in C sta shematsko prikazana dva primera anevrizme: vretenasta (fuziformna) in vrečasta (sakciformna). V obeh primerih se zaradi Laplaceovega zakona z večanjem radija povečuje tudi napetost v žilni steni, ki zato postaja vse bolj nestabilna.

8.2 Močenje površin in kapilarni efekt

Če pride kapljevina v stik s trdno snovjo, njenega obnašanja ne definira le njena površinska napetost z zrakom, temveč tudi površinska napetost med trdno snovjo in zrakom ter trdno snovjo in kapljevino. Kapljevina se trdne snovi dotika pod t. i. *kontaktnim kotom* oz. *kotom močenja*, ki je odvisen od vseh treh površinskih napetosti, pa tudi od hrapavosti površine (slika 8.4). Če je trdna snov npr. raje v stiku s kapljevino kot z zrakom, bo energijsko ugodno, da se kapljevina po površini razpotegne in bo zato kontaktni kot manjši od 90° . V takem primeru pravimo, da kapljevina moči podlago.

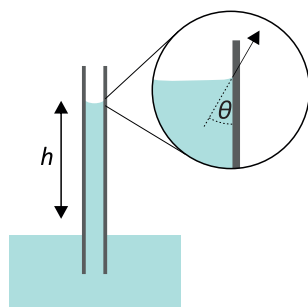


Slika 8.4: Shematični prikaz treh stopenj močenja vode na podlagi. A) Na hidrofilnih površinah je kontaktni kot (θ) manjši od 90° in pravimo, da voda moči podlago (tako je npr. na steklu). V tem primeru je energijsko ugodnejši stik med podlago in vodo kot med podlago in zrakom. B) Na hidrofobnih površinah (npr. na teflonu) je kontaktni kot večji od 90° in pravimo, da voda podlage ne moči. C) Če je kontaktni kot blizu 180° , pravimo, da je podlaga superhidrofobna. Takšni so npr. listi nekaterih rastlin. Površino je težko narediti superhidrofobno zgolj s kemijsko obdelavo, superhidrofobne podlage so ponavadi hrapave in imajo mikroskopske strukture, v katerih se lahko ujame zrak.

Pri hidrofilnih površinah je kontaktni kot za vodo manjši od 90° , pri hidrofobnih pa večji. Steklo je npr. hidrofilno in ima kontaktni kot, ki je manjši od 10° , teflon pa je hidrofoben in ima kontaktni kot nekaj večji od 110° . Če je kot 0° lahko pride celo do popolnega močenja, po drugi strani pa so nekatere snovi superhidrofobne, kar pomeni, da je kontaktni kot za vodo blizu 180° .

Superhidrofobni so listi mnogih rastlin, npr. nepoškodovani cvetni listi vrtnice, v zadnjih letih pa se superhidrofobnost vse bolj uporablja tudi pri obdelavi površin predmetov. Za medicino je ta pojav zanimiv, ker se na superhidrofobnih površinah težje vzpostavi biofilm (tj. tanka plast vode, bakterij in njihovih izločkov), zaradi česar so take površine manj izpostavljene možnosti bakterijske kontaminacije.

Z močenjem je povezan zanimiv pojav, imenovan *kapilarni efekt*. Najbolje ga bomo spoznali, če v vodo navpično potopimo stekleno kapilaro (slika 8.5). Ker voda dobro moči steklo, je energijsko ugodno, da se zmanjša površina med steklom in zrakom ter poveča površina med steklom in vodo. Voda se zato v stekleni kapilari začne dvigovati in se dviguje, dokler se sila površinske napetosti ne uravnesi s silo teže vodnega stolpca v kapilari. V ravnovesju se v kapilari vidi ukrivljen meniskus, ki je posledica kontaktnega kota.



Slika 8.5: Shematični prikaz kapilarnega dviga v tanki stekleni kapilari. Ker voda moči steklo, je energijsko ugodno, da se površina med steklom in vodo poveča, površina med steklom in zrakom pa zmanjša. Navpična steklena kapilara zato vase »posrka« vodo. Ravnovesno višino (h) lahko izračunamo, če izenačimo silo teže, ki vodni stolpec v kapilari vleče navzdol in silo zaradi površinske napetosti, ki vodo vleče gor (enačba 8.7). Tanjša, kot je kapilara, večje je razmerje med površino in prostornino vode in večji je kapilarni efekt.

Višino kapilarnega dviga lahko izračunamo iz ravnovesja med silo teže vode v kapilari in silo površinske napetosti. Sila teže je sorazmerna masi vodnega stolpca v kapilari oz. njegovi prostornini:

$$F_g = mg = \rho V g = \rho \pi r^2 h g, \quad (8.5)$$

kjer je ρ gostota vode, prostornina vodnega stolpca v kapilari pa je $V = \pi r^2 h$, kjer je h višina kapilarnega dviga, r pa radij kapilare. Sila, s katero vleče steklo vodo navzgor je po velikosti enaka navpični komponenti sile površinske

napetosti na stiku med vodo in steklom. Iz slike 8.5 razberemo, da je navpična komponenta enaka

$$F_{\sigma} = \sigma 2\pi r \cos \theta . \quad (8.6)$$

Ko sili izenačimo, dobimo za višino kapilarnega dviga naslednji izraz:

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{r\rho g} \quad (8.7)$$

Vidimo, da je kapilarni dvig tem višji, čim večja je površinska napetosti, čim manjši je kontaktni kot, čim redkejša je tekočina in čim tanjša je kapilara. Slednje lahko razumemo tudi s stališča geometrije: razmerje med površino in prostornino je obratno sorazmerno z radijem cevke, zato so v tanjših cevkah površinski efekti mnogo bolj izraziti. Zaradi kapilarnega efekta lahko npr. s papirjem brez težav popivnemo vodo. Voda celulozo namreč dobro moči, hkrati pa je v celulozi tudi zelo veliko razmerje med površino vlaken in prosto prostornino med njimi. Po drugi strani lahko iz zgornje enačbe vidimo, da je v primeru, ko kapljevina površine ne moči, kapilarni dvig negativen ($\cos \theta$ je v tem primeru negativen). Živo srebro se npr. v stekleni kapilari spusti pod gladino.

Poglavje 9

Gibanje tekočin

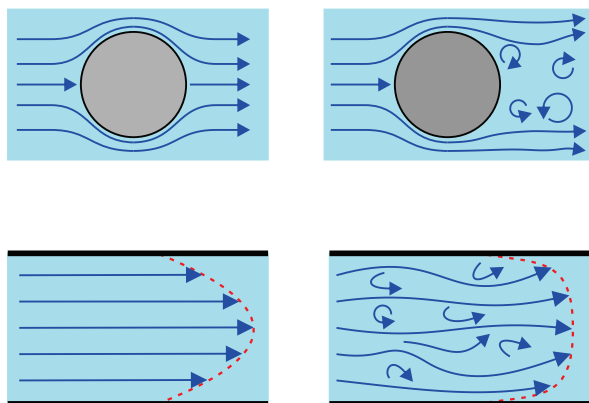
Vsak, ki je kdaj občudoval igro vodnega toka v bližnjem potoku, se je srečal z neverjetno raznolikostjo in zapletenostjo gibanja tekočin. Vsak majhen delček tekočine v toku se lahko namreč giblje z drugo hitrostjo in v drugi smeri, zato ni presenetljivo, da toka v splošnem ne moremo opisati z eno enostavno enačbo. V principu bi sicer lahko za opis obnašanja vsakega delčka tekočine uporabili 2. Newtonov zakon (zapisan za tekočine se imenuje Navier-Stokesova enačba), a je delčkov enostavno preveč, da bi njihovo lahko gibanje napovedali s preprosto formulo. Kompleksne tokove (npr. tok krvi v aorti) lahko zato v praksi analiziramo le s pomočjo računalnika in numeričnih simulacij. Le v določenih posebnih situacijah lahko tok tekočine zadovoljivo opišemo tudi z relativno enostavnimi zakonitostmi. V tem poglavju bomo spoznali nekaj teh zakonitosti, ki nam bodo pomagale razumeti osnovne biološke procese povezane z gibanjem tekočin.

9.1 Opisovanje tekočin v gibanju, viskoznost

O gibanju tekočin govorimo pri vseh pojavih, pri katerih se različni deli tekočine gibljejo eden glede na drugega. Do gibanja tekočine pride npr. med tokom tekočine po cevi, pa tudi pri premikanju telesa po mirujoči tekočini, saj mora telo pri tem tekočino odrivati. V obeh primerih se različni deli tekočine gibljejo v različnih smereh in z različnimi hitrostmi, zaradi česar je lahko celotna slika gibanja izjemno zapletena.

Tok tekočine si najlažje predstavljamo, če narišemo *tokovnice*, tj. črte, ki sledijo poti izbrane točke v toku tekočine. Slika 9.1 prikazuje tokovnice toka tekočine pri obtakanju okroglega telesa in pri toku v cevi. Če je tok miren in

brez vrtincev, govorimo o *laminarnem* toku, če pa se tekočina vrtinči, gre za *turbulentni* tok. Pri majhnih hitrostih je tok ponavadi laminaren, pri velikih pa postane turbulenten. Turbulence so izvor šumenja toka, zaradi česar jih lahko, ko nastajajo v dihalnih poteh ali v krvnem obtoku, slišimo s stetoskopom. V eksperimentih tokovnic v tekočini ne moremo videti, razen če tekočini ne dodamo majhnih obarvanih delčkov in sledimo njihovi poti vzdolž toka.



Slika 9.1: Štirje primeri toka tekočine. V zgornji vrstici so prikazane tokovnice, ko tekočina obliva okroglo telo, v spodnji vrstici pa so prikazane tokovnice toka tekočine po cevi. V levem stolpcu je tok laminaren, v desnem pa turbulenten.

Ena najpomembnejših lastnosti realnih tekočin je *viskoznost*, ki pove, kako močno je trenje, do katerega v tekočini pride med njenim gibanjem (o idealnih tekočinah govorimo, ko lahko trenje zanemarimo). To notranje trenje v tekočini si lahko dobro predstavljamo, če se spomnimo, da se lahko sosednje molekule v tekočini gibljejo z različnimi hitrostmi in se zato »trejo« med seboj. Notranje trenje ima za gibanje tekočin podobno posledico, kot trenje pri gibanju trdnih teles: zaradi trenja je treba gibanje neprestano poganjati, saj se v nasprotnem primeru ustavi. Če srce neha biti, se kri v žilah ustavi. Med gibanjem po tekočini čutimo notranje trenje kot upor, ki nam ga pri tem nudi tekočina.

Iz vsakdanjega življenja imamo z viskoznostjo kar nekaj izkušenj. Vemo npr., da lahko po zraku z žlico mahamo brez težav, po vodi je že malo težje, upor v medu pa je zelo velik. Viskoznost zraka je torej majhna, viskoznost medu pa velika. Opozoriti pa moramo, da vsakdanji jezik pogosto meša pojma viskoznost in gostota, čeprav gre za dve različni lastnosti, ki med seboj nista povezani. Gostota pove, kolikšno maso ima določena prostornina te-

kočine, viskoznost pa kako močno se tekočina zaradi notranjega trenja upira gibanju. Med gostoto in viskoznostjo tudi ni neposredne povezave: olje ima npr. manjšo gostoto kot voda in večjo viskoznost, med pa je gostejši in tudi bolj viskozen. Tudi v medicini se pojma včasih uporablja ohlapno: z izrazom »redka kri« včasih opisujemo kri z majhno viskoznostjo, zdravila za »redčenje krvi« pa pravzaprav le zmanjšujejo strjevanje krvi in na njeno gostoto ali viskoznost ne vplivajo bistveno.

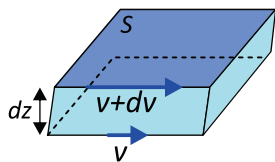
Stroga fizikalna definicija viskoznosti ni povsem enostavna in jo navajamo v MaFijemskem primeru 9.1. Za zdaj le navedimo, da za označevanje viskoznosti uporabljamo grško črki η in da je enota za viskoznost $\text{Pa} \cdot \text{s} = \text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2 = \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$. Za vrednosti viskoznosti iz vsakdanjega življenja nimamo nobenega občutka, zato jih nekaj prikazujemo v tabeli 9.1. V nadaljevanju bomo opisali nekaj enostavnih posledic viskoznosti, ki so pomembne za razumevanje bioloških pojavov.

snov	jedilno olje	kri	voda	zrak
η [mPa · s]	80	3	1	0,02

Tabela 9.1: Viskoznost nekaterih snovi pri sobni temperaturi. Vrednost za kri je približna in velja za zdravo odraslo osebo pri majhnem pretoku krvi. V praksi je viskoznost krvi odvisna od mnogih dejavnikov, npr. od hematokrita in od strižne hitrosti (povzeto po [8]).

MaFijemski primer 9.1: stroga definicija viskoznosti

Stroga fizikalna definicija viskoznosti je povezana s strižno silo, ki jo zaradi trenja čuti del tekočine, ko se ob njem gibljejo drugi deli (glej spodnjo sliko). Izkaže se, da je ta sila sorazmerna viskoznosti tekočine in pa razliki v hitrosti medsebojnega gibanja sosednjih plasti tekočine (če se dva sosedna dela tekočine gibljeta z enako hitrostjo, med njima seveda trenja sploh ni). Sila trenja je tudi sorazmerna velikosti površine (S), preko katere deluje, zato namesto o strižni sili govorimo o strižni napetosti, ki smo jo vpeljali na začetku opisovanja mehanskih lastnosti snovi, $\tau = F/S$ (slika 6.2). Vse povedano združimo v zapis z enačbo:



$$\tau = \eta \frac{dv}{dz} \quad (9.1)$$

V zgornji definiciji je τ strižna napetost v določeni točki v toku tekočine, η je viskoznost, izraz dv/dz pa opisuje, kako hitro se v tisti točki hitrost tekočine spreminja pravokotno na tokovnico (to količino imenujemo tudi strižna hitrost).

9.2 Gibanje v tekočini

Med gibanjem v tekočini čutimo silo upora, ki je posledica tega, da moramo med gibanjem tekočino neprestano odrivati. V splošnem je izračun sile upora zahteven in je odvisen od vrste podrobnosti, zato bomo tu navedli le dva glavna splošna rezultata.

Pri majhni hitrosti oz. v režimu laminarnega toka je sila upora odvisna od viskoznosti tekočine in jo za okroglo telo dobro opiše t. i. Stokesov zakon upora:

$$F = 6\pi r \eta v, \quad (9.2)$$

kjer je r radij telesa, η je viskoznost tekočine, v pa relativna hitrost gibanja telesa glede na tekočino. Večje kot je telo, več je trenja in odzivanja tekočine in večja je sila upora. Če telo ni okroglo, zgornja enačba še vedno približno velja, le konstante so drugačne. V zakonu hitrost nastopa s prvo potenco, zato ta zakon upora imenujemo tudi *linearni zakon upora*. Izvor sile upora v tekočinah je v osnovi podoben kot je izvor sile trenja med trdnimi telesi, le da pri slednjih sila trenja ni toliko odvisna od hitrosti gibanja, pri tekočinah pa je ta odvisnost zelo pomembna.

Pri veliki hitrosti se za telesom začnejo pojavljati turbulence in takrat se sila upora spremeni. Vpliv trenja namreč postane zanemarljiv v primerjavi s silo, ki jo telo čuti, ko vanj udarja tekočina s svojo maso. Izkaže se, da v takem režimu sila upora zadovoljivo opiše *kvadratni zakon upora*:

$$F = \frac{1}{2} c S \rho v^2, \quad (9.3)$$

kjer je S površina sprednjega preseka telesa, ρ je gostota tekočine, c pa je t. i. koeficient upora, ki opisuje, kako aerodinamično obliko ima telo. Vrednost c za kocko je približno 1, za sfero približno 0,5, za kapljičasto obliko, ki je ena najbolj aerodinamičnih, pa 0,04. Kvadratni zakon upora velja npr. med vožnjo po avtocesti, zato tam poraba goriva pri višjih hitrostih zelo hitro narašča.

Linearni zakon upora velja torej v laminarnem režimu toka, kvadratni pa v turbulentnem. V katerem od obeh režimov je neko gibanje, lahko ocenimo kar s primerjavo obeh sil upora, kot ju napovedujeta zgornji enačbi. Če velikost kvadratne sile delimo z velikostjo linearne (in zraven upoštevamo $S \propto r^2$, konstante pa zanemarimo) dobimo t. i. *Reynoldsovo število*

$$Re = \frac{\rho v r}{\eta} . \quad (9.4)$$

Reynoldsovo število nima enote, za oceno režima toka tekočine pa služi kar njegova velikost: večje kot je Re bolj turbulenten je tok. Poskusi so pokazali, da je pri gibanju okroglega telesa v tekočini tok ponavadi laminaren pod približno $Re < 1$, turbulenten pa nad približno $Re > 2000$. Pri vmesnih vrednostih, ko turbulence šele začnejo nastajati, je sila upora nekje med linearno in kvadratno. V praksi prehod v turbulentni režim ni odvisen le od Re , ampak še od okolice ter oblike telesa in od hrapavosti njegove površine. Zgornja enačba je uporabna tudi za telesa, ki nimajo okrogle oblike, pri čemer lahko za vrednost r vstavimo kar prečno dimenzijo telesa. Primer 9.1 prikazuje uporabo linearne zakona za opis sedimentacije eritrocitov v krvni plazmi.

Primer 9.1: sedimentacija

Za začetek si pogledajmo, kaj se dogaja s telesi, ki tonejo v tekočini, kasneje pa bomo dobljen rezultat uporabili za razumevanje diagnostičnega testa sedimentacije eritrocitov.

Na delce v raztopini delujeta sila teže (F_g) in sila vzgona (F_v). Če je gostota delcev večja od gostote raztopine, rezultanta teh sil kaže navzdol in vleče delce proti dnu. Ko delci med tonjenjem pridobivajo hitrost, na njih deluje vedno večja sila upora (F_u), ki kaže navpično navzgor. Zato bo slej ko prej rezultanta vseh sil postala nič in od takrat naprej bodo delci tonili z enakomerno hitrostjo, t. i. hitrostjo sedimentacije. Ocenimo te hitrosti dobimo iz pogoja, da je vsota vseh treh sil enaka 0. Za primer okroglih delcev, ki tonejo v laminarnem režimu lahko torej zapišemo:

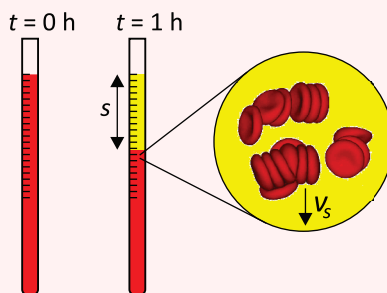
$$6\pi r v \eta + \rho_{\text{raztopina}} \frac{4}{3} \pi r^3 g = \rho_{\text{kroglica}} \frac{4}{3} \pi r^3 g \quad (9.5)$$

Če razliko gostot kroglice in raztopine označimo z $\Delta\rho = \rho_{\text{kroglica}} - \rho_{\text{raztopina}}$ in zgornjo enačbo preuredimo, ugotovimo, da je hitrost sedimentacije sorazmerna ra-

diju kroglice na kvadrat:

$$v = \frac{2\Delta\rho gr^2}{9\eta} \quad (9.6)$$

Iz enačbe sledi pomemben zaključek: pri dani gostoti večja telesa tonejo hitreje kot manjša (enačba velja tudi za neokrogla telesa, le da so konstante v enačbi drugačne). V različnih bolezenskih stanjih (predvsem pri vnetju) se eritrociti v krvi lepijo v večje skupke, kar izkoristimo pri krvnem testu imenovanem *sedimentacijska hitrost eritrocitov* (angl. ESR ali erythrocyte sedimentation rate). Skupki eritrocitov imajo namreč enako gostoto in veliko večji efektivni radij kot posamezne celice, zato tonejo mnogo hitreje. Pri tem testu damo kri v posebno pipeto, jo postavimo navpično ter izmerimo, za koliko se eritrociti v krvni plazmi posedejo v eni uri (to razberemo brez težav, saj se rdeči eritrociti pri tem ločijo od rumenkaste krvne plazme). Izmerjena razdalja v mm je ravno sedimentacijska hitrost v mm/h (ta enota je za standardizirana za test sedimentacije, zato se jo pri podajanju rezultatov testa včasih kar izpusti). V zdravi krvi je sedimentacijska hitrost okoli 10 mm/h (normalna vrednost je odvisna od starosti in spola) pri določenih boleznih pa lahko doseže celo 100 mm/h in več.



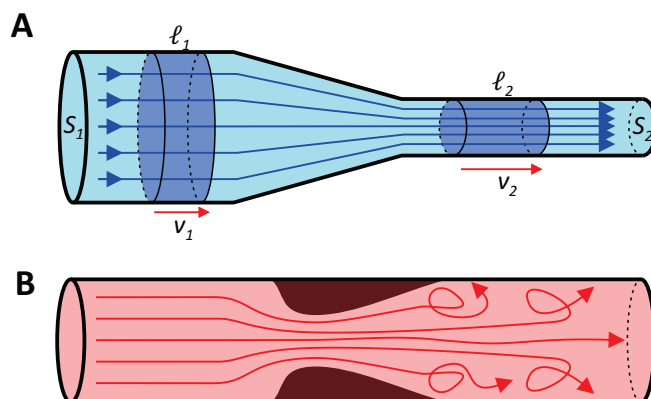
Sedimentacijske lastnosti so pomembne tudi pri ločevanju makromolekul v raztopinah, le da damo v tem primeru raztopino v ultracentrifugo ter tako težni pospešek g v zgornji enačbi nadomestimo z radialnim pospeškom $a_r = r\omega^2$, ki je lahko bistveno večji in je zaradi tega ločevanje hitrejše. Na konceptualno podobni osnovi delujejo tudi mnoge druge metode ločevanja makromolekul, saj je sila upora (in s tem hitrost potovanja) v vseh snoveh tako ali drugače odvisna lastnosti molekul. Tako deluje npr. elektroforeza v gelu, pri kateri makromolekul ne poganja sila teže ampak električna sila, ali pa različne vrste kromatografije.

9.3 Tok v ceveh in žilah

Pri toku tekočine v ceveh oz. žilah nas ponavadi najbolj zanima, koliko tekočine se pretoči v določenem času, tj. *prostorninski tok*, ki je definiran kot:

$$\Phi_V = \frac{V}{t} . \quad (9.7)$$

Pri odraslem človeku srce npr. prečrpa približno pet litrov krvi na minuto in velja $\Phi_V = 5 \text{ l/min}$.



Slika 9.2: A) Prostorninski tok tekočine po cevi je sorazmeren hitrosti in preseku cevi. Pri nestisljivih tekočinah mora biti vzdolž cevi prostorninski tok povsod enak, zato se ob zožanju cevi hitrost tekočine poveča. Na sliki sta osenčeni enaki prostornini, ki se v istem času pretočita skozi širok in ozek del cevi, $V = S_1 \ell_1 = S_1 v_1 t = S_2 \ell_2 = S_2 v_2 t$. Na sliki vidimo, da je pri laminarnem toku hitrost sorazmerna gostoti tokovnic. B) Če se žila zoža zaradi stenoze, se tam poveča hitrost krvi, zaradi česar lahko nastanejo turbulence.

Intuitivno uganemo, da je prostorninski tok odvisen od hitrosti pretakanja tekočine. S pomočjo slike 9.2A lahko zvezo med njima tudi izračunamo: tekočina, ki ima hitrost v , se v času t premakne za razdaljo $\ell = vt$. Pri tem se pretoči prostornina $V = Svt$, kjer je S prečni presek cevi. V praksi hitrost tekočine ni nujno enaka po celotnem preseku, a zgornje zveze vseeno veljajo za povprečno hitrost $\bar{v}$. Če upoštevamo še enačbo 9.7, lahko torej zapišemo pomembno zvezo

$$\Phi_V = \bar{v}S \quad (9.8)$$

Iz zveze med pretokom in hitrostjo sledi pomemben zaključek: pri pretakanju nestisljivih tekočin, kot sta npr. voda ali kri, je pretok enak vzdolž

celotne dolžine cevi, ne glede na njeno obliko, saj mora vsa tekočina, ki v cev na enem koncu vstopa iz nje na drugem koncu tudi izstopiti (slika 9.2A). Zato lahko za tok nestisljivih tekočin zapišemo

$$\bar{v}_1 S_1 = \bar{v}_2 S_2 \quad (9.9)$$

in je torej hitrost tekočine tem večja, čim manjši je presek cevi. Če v žili nastane zožanje (stenoza) se bo tam hitrost povečala, kar lahko privede do nastanka turbulenc (slika 9.2B), saj sta podobno kot pri gibanju po tekočini tudi pri toku tekočin dva režima: pri majhnih Re je tok laminaren pri velikih pa je tok turbulenten.

V valjasti cevi je v laminarnem režimu razporeditev tokovnic osno-simetrična, kar omogoča natančen izračun pretoka (ki pa po težavnosti presega naše znanje). Iz računa izhajata dva zanimiva rezultata. Prvi je, da je hitrost toka največja v sredini cevi, proti stenam cevi pa parabolično pada (slika 9.1). Kvalitativno je ta rezultat mogoče razumeti iz definicije za viskoznost: tekočina se ne more gibati bistveno hitreje, kot tekočina v njeni bližini, saj bi to povzročilo ogromno silo trenja. Stena cevi miruje, zato se mora tekočina tik ob steni gibati počasi. Bolj kot se od stene bližamo sredini cevi, hitreje se lahko tekočina giblje, najhitreje pa se seveda lahko giblje v sredini. Račun tudi pokaže, da v paraboličnem profilu toka velja, da je povprečna hitrost v cevi ravno polovica najvišje hitrosti:

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_{max} \quad (9.10)$$

Drugi pomembni rezultat za laminarni režim je, da tudi pri toku po cevi velja linearni zakon, ki pa v tem primeru povezuje prostorninski pretok in razliko tlakov, ki pretok poganja:

$$\Phi_V = \frac{\Delta p}{R_\eta}, \quad (9.11)$$

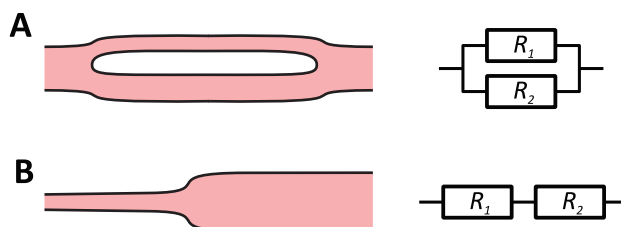
kjer konstanto R_η imenujemo *viskozni upor*. Zgornja enačba pove, da je tok sorazmeren razliki tlakov, pri dani tlačni razliki pa je tok tem manjši, čim večji je viskozni upor. Daljši račun, ki presega naše okvire, pokaže, da je za valjaste cevi vrednost viskoznega upora enaka

$$R_\eta = \frac{8\eta\ell}{\pi r^4}, \quad (9.12)$$

kjer je η viskoznost tekočine, ℓ je dolžina cevi, r pa njen radij. Izraz za viskozni upor je deloma pričakovan: v daljših ceveh in pri večji viskoznosti tekočine je več trenja, zato je tudi upor večji, v širših ceveh pa je upor manjši. Presenetljiva pa je zelo močna odvisnost upornosti od radija cevi, saj je upornost odvisna kar od četrte potence radija. Naše telo to močno odvisnost spretno uporablja pri uravnavanju krvnega pretoka z aktivno regulacijo polmera nekaterih žil, saj ima že majhna sprememba radija žile velik vpliv na pretok krvi. Zgornji enačbi skupaj imenujemo tudi *Hagen–Poiseuilleva* enačba.

Opozoriti je vredno, da Δp v enačbi 9.11 predstavlja razliko tlakov med začetkom in koncem cevi, o absolutni vrednosti tlaka pa Hagen–Poiseuilleva enačba ne govori. Iz nje vseeno vidimo, da od začetka do konca cevi tlak pada linearno (pri danem pretoku je padec tlaka sorazmeren dolžini vzdolž cevi). Čim večja je viskoznost in tem manjši je radij cevi, tem hitreje bo padal tlak vzdolž cevi.

Enačba 9.11 je analogna Ohmovem zakonu iz elektrike ($I = U/R$), saj v njej na enak način nastopajo tok, upor ter količina, ki tok poganja (pri elektriki je to napetost, pri tekočinah pa tlačna razlika). Analogijo lahko uporabimo za računanje upornosti zapletenih žilnih sistemov: skupni upor dveh zaporednih različno velikih žil je kar vsota uporov vsake od žil, skupni upor vzporednih žil pa izračunamo preko vsote obratnih vrednosti uporov (slika 9.3).



Slika 9.3: Viskozni upor sistema žil lahko izračunamo na enak način kot pri električnih uporih. A) Skupni viskozni upor dveh vzporednih žil izračunamo iz vsote obratnih vrednosti uporov posameznih žil $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$. B) Skupni viskozni zaporednih žil izračunamo kot vsoto vrednosti uporov posameznih žil $R = R_1 + R_2$.

Že v uvodu smo omenili, da laminarni režim velja le pri majhnih hitrostih toka, pri večjih hitrostih pa tok slej ko prej postane turbulenten. Tudi pri toku tekočin si lahko za oceno režima toka pomagamo z izračunom Reynoldsovega števila (enačba 9.4), pri čemer za r vstavimo prečno dimenzijo cevi. Pri Re manjšem od približno 2000 je tok v cevi laminaren, pri $Re > 2500$ pa tok postane turbulenten in linearni Hagen–Poisueillev zakon ne velja več. Pri

zelo velikih Re tudi v ceveh velja kvadratni zakon upora, po katerem je tlačna razlika med začetkom in koncem cevi sorazmerna kvadratu pretoka. Ta zveza pa ni enostavna, saj je pretok odvisen tudi od hrapavosti sten in presega naše znanje fizike. Hitrostni profil v turbulentnem toku tudi ni več paraboličen, ampak je enak po vsem sredinskem delu žile (slika 9.1).

9.4 Idealne tekočine in Bernoullijeva enačba

Na koncu se za hip ustavimo pri znameniti Bernoullijevi enačbi, ki opisuje tok idealnih nestisljivih tekočin. V idealnih tekočinah ni trenja, zato za njih velja zakon o ohranitvi mehanske energije. Bernoullijeva enačba je ravno zakon o ohranitvi mehanske energije, zapisan za pretakanje tekočin.

Na sliki 9.2A smo videli, da se lahko tekočini med tokom v cevi spremeni hitrost in torej tudi kinetična energija. V splošnem bi bil lahko drugi konec cevi tudi na drugi višini, zaradi česar bi se tekočini spremenila tudi potencialna energija. Iz zakona o ohranitvi energije vemo, da je sprememba vsote obeh energij tekočine enaka delu, ki ga okolica opravi na tekočini. Izračunajmo to delo za primer, ko skozi cev steče prostornina označena na sliki. Če s p_1 označimo tlak na začetku cevi, je delo, ki na da začetku cevi opravimo pri potiskanju tekočine enako $A_1 = Fs = p_1 S_1 \ell_1 = p_1 V$, pri čemer smo upoštevali, da sila $F = pS$ in da je prostornina, ki se pri tem pretoči, ravno $V = S_1 \ell_1$. Na enak način izračunamo delo, ki ga opravi tekočina na koncu cevi, kjer potiska tekočino pred seboj, $A_2 = p_2 V$ (tu smo upoštevali, da je tekočina nestisljiva, zaradi česar sta prostornini na začetku in na koncu cevi enaki - kolikor tekočine na začetku priteče v cev, jo mora na koncu zapustiti). Zakon o ohranitvi energije se torej zapiše kot:

$$p_1 V - p_2 V = W_{p2} - W_{p1} + W_{k2} - W_{k1} \quad (9.13)$$

Ko upoštevamo, da je potencialna energija enaka $W_p = mgh = \rho V gh$, kinetična $W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho V v^2$, pokrajšamo prostornino, ki je prisotna v vseh členih, ter na nasprotni strani enačbe razporedimo člene z enakim indeksom, dobimo Bernoullijevo enačbo:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 + p_2 \quad (9.14)$$

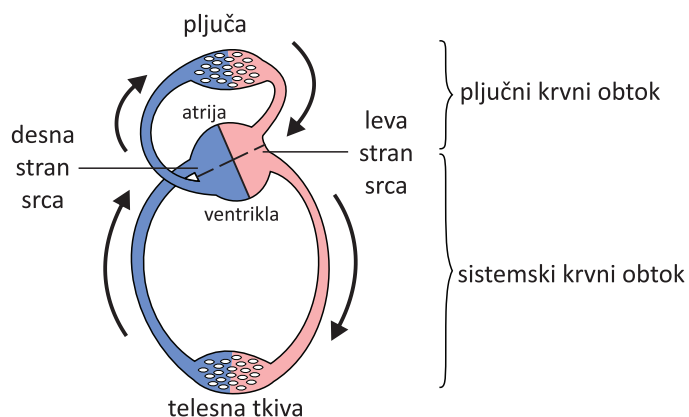
Vsoto na vsaki strani enačbe $(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p)$ si lahko predstavljamo kot gostoto energije tekočine. Ta se torej ne spreminja vzdolž celotnega toka idealne tekočine.

V realnih tekočinah je vedno prisotno nekaj trenja, zato Bernoullijeva enačba velja le približno oz. velja tem manj, čim večjo vlogo ima trenje. Kljub temu nam enačba v določenih situacijah obnašanje lahko razloži vsaj približno. Z Bernoullijevo enačbo lahko npr. ocenimo, kako je hitrost tekočine, ki izteka iz posode, odvisna od tlaka v posodi (zgornja vsota je enaka tako za tekočino v posodi kot tudi za tekočino v curku, ki izteka. V posodi je hitrost tekočine majhna, tlak pa za Δp večji kot izven posode. Ker je višina na obeh straneh luknje v posodi enaka, lahko hitrost iztekanja v_2 izračunamo iz $\Delta p = \frac{1}{2}\rho v_2^2$).

Pomembna posledica Bernoullijeve enačbe je tudi, da z zmanjšanjem hitrosti toka tlak v tekočini naraste. V arterijski anevrizmi (slika 8.1) je presek žile povečan, zato se hitrost krvi tam zmanjša, tlak krvi pa malo poveča. Napetost žilnih sten se zaradi tega pojava torej le še dodatno poveča.

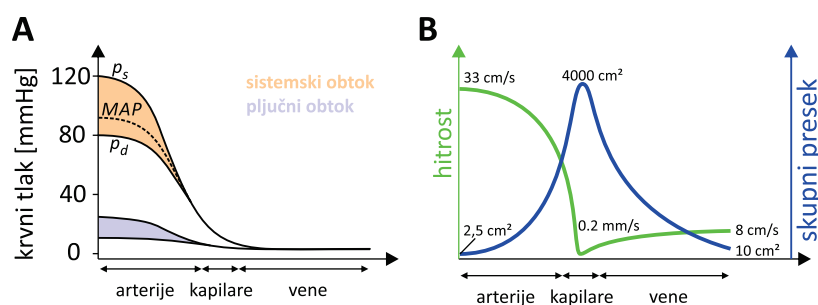
9.5 Krvni obtok

Za konec poglavja o tekočinah uporabimo pridobljeno znanje in si oglejmo nekaj značilnosti krvnega obtoka. Ob vsakem utripu srca levi ventrikel kri iztisne v aorto, ki se nadaljuje v arterijo, manjše arterije, kapilare v organih. Od tam nadaljuje pot v vene in nazaj v srce pride v desni atrij po veni cavi (slika 9.4). Ta del obtoka se imenuje sistemski obtok. Iz desnega atrija gre kri v desni ventrikel, od tam pa zaokroži po pljučnem obtoku skozi pljučne kapilare in se vrne nazaj v srce v levi atrij. Krvotok je zaokrožen, zato je prostorninski tok skozi pljučni obtok enak prostorninskemu toku v sistemskem obtoku.



Slika 9.4: Shematični prikaz krvnega obtoka.

Sistemiški obtok je daljši in večji, zato je tudi njegova upornost večja in mora levi ventrikel ustvarjati veliko večji tlak kot desni. Zaradi utripanja srca tlak v arteriji niha med sistoličnim (visokim) in diastoličnim (nizkim) tlakom, ki v arteriji sistemskega obtoka niha približno med 80 mmHg in 120 mmHg, v pljučni arteriji pa le med 8 mmHg in 25 mmHg. Tlak v arteriji je dalj časa blizu diastoličnemu kot sistoličnemu, zato tudi srednji arterijski tlak (angl. mean arterial pressure, MAP) ni na sredini med njima, temveč je bližje nižjemu (od njega je višji za približno eno tretjino razlike, $MAP \approx p_d + \frac{1}{3}(p_s - p_d) \approx 95$ mmHg). Območje tlakov v obeh obtokih je prikazano na sliki 9.5A.



Slika 9.5: A) Shematični prikaz padca tlaka v sistemskega in pljučnega obtoka. V sistemskega obtoku so označeni diastolični tlak (p_d), sistolični (p_s) in srednji arterijski tlak (MAP). Največji padec tlaka je v malih arterijah in kapilah. B) Shematični prikaz povprečne hitrosti krvi in skupnega preseka žil v sistemskega obtoka (prirejeno po [8]).

V nasprotju s cevmi imajo žile svojo podajnost (enačba 7.4), zato se ob vsakem povišanju tlaka v arteriji poveča tudi njen premer. Nihanje tlaka v arterijah se zaradi podajnosti zadoži in ga v kapilah in venah ni več (po drugi strani zaradi podajnosti arterij toka v njih ne moremo natančno opisati zgolj s Hagen–Poiseuillevo enačbo).

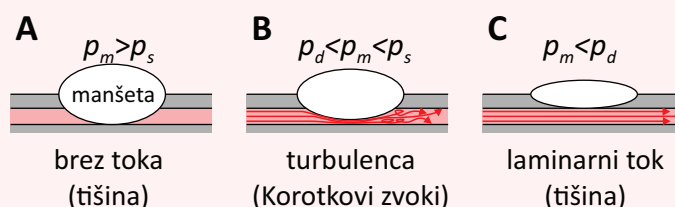
Ocenimo še hitrost krvi v aorti in veni cavi. Če predpostavimo, da je presek aorte približno $S_a = 2,5 \text{ cm}^2$, vene cave pa $S_{vc} = 10 \text{ cm}^2$ in vemo, da je pretok krvi približno $\Phi_V = 5 \text{ l/min}$ (v literaturi najdemo za te vrednosti različne podatke), lahko s pomočjo enačbe 9.8 izračunamo povprečni hitrosti: $v_a \approx 33 \text{ cm/s}$ in $v_{vc} \approx 8 \text{ cm/s}$ (slika 9.5). Po drugi strani je znan podatek, da je povprečna hitrost v kapilah približno $v_k \approx 200 \mu\text{m/s}$, iz česar dobimo oceno, da je celoten presek kapilar kar približno $S_k = 4000 \text{ cm}^2$.

Ocenimo še, ali je tok v aorti laminaren ali turbulenten. Če v račun za Reynoldsovo število (enačba 9.4) vstavimo premer aorte ($\approx 2 \text{ cm}$), gostoto krvi

($\approx 1060 \text{ kg/m}^3$), njeno viskoznost ($\approx 0,003 \text{ Pa s}$) ter njeno povprečno hitrost ($\approx 33 \text{ cm/s}$), dobimo vrednost $Re \approx 2300$. Pričakovati je torej, da je tok v aorti ravno na meji med laminarnim in turbulentnim - med diastolo je lahko laminaren, med sistolo pa se lahko tudi zavrtinči.

Primer 9.2: merjenje krvnega tlaka

V primeru 6.1 smo predstavili sfigmomanometer, sedaj pa si pogledjmo še, kako poteka meritev krvnega tlaka. Pri meritvi najprej povečamo tlak v manšeti nad sistolični tlak, tako da manšeta stisne žilo in prekine pretok po njej (slika A). Nato tlak v manšeti počasi spuščamo in s stetoskopom poslušamo zvoke iz žile. Ko tlak v manšeti postane enak sistoličnemu tlaku, se pretok skozi žilo začne odpirati in skozi stetoskop zaslišimo t. i. Korotkove zvoke, ki so posledica brizgov krvi skozi prehod (slika B). Ko tlak v manšeti postane manjši od diastoličnega tlaka, se žila povsem odpre, v njej se spet vzpostavi laminarni tok in Korotkovi zvoki prenehajo (slika C). Z merjenjem tlaka v manšeti in hkratnim poslušanjem zvokov lahko tako določimo oba krvna tlaka.



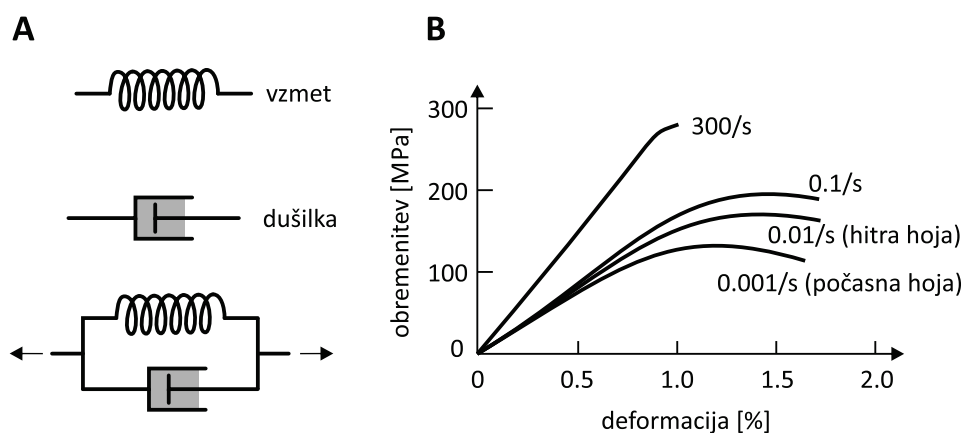
Na podoben način delujejo tudi avtomatski merilci tlaka, le da ne zaznavajo zvokov ampak nihanje tlaka v manšeti, ki je posledica brizgov krvi.

Poglavje 10

Viskoelastičnost

V tkivih je v tipično več kot kot 70 % vode (še celo v kosteh je vode približno 30 %), zato se nam hitro postavi vprašanje, ali so z mehanskega stališča naša tkiva tekočine ali trdne snovi? Odgovor se seveda glasi, da niso niti eno niti drugo, ampak imajo lastnosti obojega. Po eni strani se nam tkiva kažejo kot trdna snov in ne »tečejo«, po drugi strani pa je odziv tkiv na zunanjo silo pogosto odvisen od tega, kako *hitra* je deformacija. Take snovi so *viskoelastične*. Obravnava takšnih snovi presega naše znanje, na kratko si bomo ogledali le, kako si lahko viskoelastičnost sploh predstavljamo.

Za elastične snovi velja Hookov zakon ($F = kx$, kjer je x velikost deformacije) in za viskozne linearni zakon upora ($F = \beta v$, kjer je v hitrost deformacije). Viskoelastične snovi si lahko predstavljamo kot kombinacijo elastičnega člena (vzmeti) in viskoznega člena (dušilke). Slika 10.1 prikazuje enega od najenostavnejših modelov viskoelastične snovi. Viskozni člen ima lastnost, da se počasnim deformacijam sploh ne upira, z večanjem hitrosti deformacije pa postaja vedno »trši«. Viskoelastične snovi imajo tako pri hitrih deformacijah večji Youngov modul kot pri počasnih. Take so npr. tudi kosti (slika 10.1B).



Slika 10.1: A) Viskoelastične snovi si lahko predstavljamo, kot da so sestavljene iz elastičnega člena (vzmeti) in viskoznega člena (dušilke). Les, mnoge polimere, pa tudi kosti si lahko v prvem približku predstavljamo kot vzporedno vezani vzmet in dušilko (t. i. Kelvin-Voigtov model). Pri počasnih deformacijah dušilka nima vloge, saj je sila upora pri majhnih hitrostih zanemarljiva, zato ima pri počasnih deformacijah snov lastnost vzmeti. Pri hitrih deformacijah se zaradi dušilke snov zunanji sili dodatno upira in navidez postaja trša. B) Zveza med obremenitvijo in deformacijo za kortikalno kost. Pri hitri hoji je deformacija hitrejša, zato je pri njej kost »trša« kot pri počasni hoji [8].

Del III

Termodinamika

Poglavje 11

Uvod v termodinamiko

V vseh biokemijskih in fizioloških procesih sodeluje ogromno število različnih atomov in molekul. Vsak protein je sestavljen iz več tisoč atomov, v vsaki celici pa je lahko več 100 milijonov proteinov in še vsaj tisočkrat več molekul vode (primer 11.1). Pri razumevanju obnašanja takih sistemov si ne moremo prav dosti pomagati z Newtonovimi zakoni, ki smo jih srečali pri mehaniki, saj je delcev v sistemu preprosto preveč, da bi lahko sledili gibanju vsakega delca in njegovim interakcijam s sosedi. Na srečo pa tudi v takih sistemih veljajo zakonitosti, ki sicer ne opisujejo obnašanja vsakega delca posebej, a dobro opisujejo obnašanje sistema kot celote. Veja znanosti, ki raziskuje obnašanje sistemov z veliko delci se imenuje *termodinamika*, sisteme z veliko delci pa imenujemo *termodinamski sistemi*.

Za opisovanje *stanja* termodinamskega sistema ne moremo uporabljati *mikroskopske* slike (kje je neka molekula ob nekem času in kakšna sila nanjo deluje), temveč uporabimo *makroskopske* količine, kot so gostota, masa, koncentracija, prostornina, tlak ipd. Poleg tega bomo morali za opisovanje termodinamskih sistemov vpeljati tudi nove pojme kot so temperatura, entalpija, entropija in toplota. Po slednji je termodinamika tudi dobila svoje ime.

Podobno kot pri mehaniki je tudi pri termodinamiki ključen pojem *ravnovesje sistema*, se pravi stanje, v katerem se od okolice izoliran sistem s časom ne spreminja. Pozoren bralec se bo takoj vprašal, kako nam lahko razumevanje ravnovesja sploh pomaga pri opisovanju živih bitji, saj je ravnovesno stanje ravno nasprotno od življenja. Odgovor je preprost: čeprav se živi sistemi zares neprestano spontano spreminjajo, se spreminjajo ravno v smeri proti svojemu ravnovesju. Če poznamo ravnovesno stanje sistema, lahko torej ugotovimo, v katero smer se bo sistem spontano spreminjal. Poleg tega so lahko tudi v živih bitjih predelki, ki so vsaj za kratek čas približno v ravnovesju.

V nadaljevanju bomo vpeljali ključne pojme termodinamike ter spoznali znamenita zakona termodinamike, ki spadata med najbolj temeljne zakone narave. Prvi govori o ohranitvi energije, drugi pa o entropiji in z njo povezanih spontanah spremembah sistema. Na koncu bomo vse naštetu uporabili pri razlagi nekaterih pomembnih fizioloških in biokemijskih procesov.

Primer 11.1: koliko molekul vode je v tipični celici?

Množino snovi lahko opišemo na tri načine: z maso, s številom delcev v snovi ali pa, ker je število delcev ponavadi ogromno, tudi z enoto *mol*, pri čemer je v enem molu Avogadrovo število delcev, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$. Masa je s številom molov povezana preko molske mase M , ki pove kolikšna je masa enega mola izbrane snovi.

Primer: molska masa vode je približno $M = 18 \text{ g/mol}$, kar pomeni, da 1 mol vode ustreza 18 g oz. 18 ml vode. Plini so precej redkejši od kondenzirane snovi in en mol plina pri standardnih pogojih^a zasede prostornino malo več kot 22 l.

Koliko je torej molekul vode v eni celici? Premer tipične človeške celice je reda velikosti $10 \mu\text{m}$, prostornina pa torej približno $1000 \mu\text{m}^3$. V celici je približno 70 % vode. Število molov vode v celici je torej

$$n = \frac{m}{M} = \frac{0,7V\rho}{M} = 0,7 \cdot 1000 \cdot 10^{-18} \text{ m}^3 \cdot \frac{1000 \text{ kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{mol}}{0,018 \text{ kg}} = 3,9 \cdot 10^{-11} \text{ mol} .$$

Število molekul dobimo tako, da število molov pomnožimo z Avogadrovim številom:

$$N = nN_A = 3,9 \cdot 10^{-11} \text{ mol} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 2,3 \cdot 10^{13} .$$

V tipični celici je torej zares zelo veliko molekul (23 tisoč milijard molekul vode). Tudi če bi bila koncentracija neke snovi v celici le 1 nM (nano-molarna), bi bilo v celici približno 1000 molekul te snovi.

^aZa standardne pogoje obstajajo različni standardi. Pogosto se uporablja IUPAC standard, po katerem standardni pogoji ustrezajo temperaturi 0°C , tlaku 10^5 Pa in koncentraciji raztopine 1M. Obstajajo tudi standardi, ki uporabljajo temperaturo 20°C ali pa tlak 1 atm = 101325 Pa.

Poglavje 12

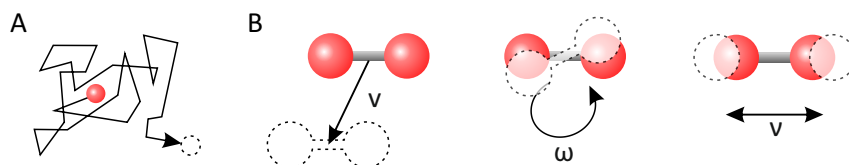
Termično gibanje in temperatura

Molekule so veliko premajhne, da bi jih lahko neposredno opazovali, kljub temu pa lahko na osnovi opazovanja različnih pojavov sklepamo, da se molekule v snovi neprestano gibljejo. Gibanje molekul vode lahko npr. posredno zaznamo preko neurejenega spontanega gibanja mikroskopskih delcev (koloidov) v mirujoči raztopini (slika 12.1A). Tako gibanje je v 19. stoletju prvi opisal botanik Robert Brown, ki je pod mikroskopom opazoval spontano naključno gibanje delcev cvetnega prahu v vodi, Albert Einstein pa je kasneje pokazal, da je to gibanje posledica naključnega gibanja molekul vode, ki se v delec zaletavajo in ga porivajo sem ter tja (Einsteinova analiza je bila eden prvih trdnih dokazov za atomistično strukturo sveta, o kateri se je ugibalo že od časov starih Grkov).

Naključnemu oz. *Brownovemu gibanju* molekul pravimo tudi *termično gibanje*. Izkaže se namreč, da je to gibanje tesno povezano s temperaturo snovi: višja kot je temperatura, večje je termično gibanje. Molekule tako neprestano nihajo okoli svojih ravnovesnih leg, v plinih in tekočinah pa se tudi premikajo in vrtijo. (slika 12.1B). V tem poglavju bomo najprej opisali, kako je s termičnim gibanjem povezana znamenita plinska enačba, nato pa si bomo natančneje ogledali še difuzijo v raztopinah. Poglavje bomo zaključili z razmislekom o različnih tehnikah merjenja temperature.

12.1 Termično gibanje v plinih in plinska enačba

Povezava med termičnim gibanjem in temperaturo je še posebej očitna pri plinih, pri katerih se molekule svobodno gibljejo in s trki ustvarjajo tlak na



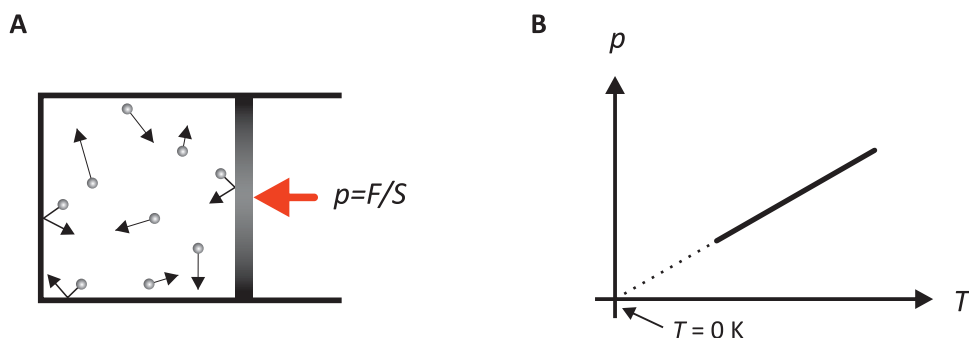
Slika 12.1: **A)** Shematični prikaz termičnega gibanja delca v vodi, do katerega pride zaradi naključnega zaletavanja z molekulami vode. Gibanje je naključno in se delec v povprečju nikamor ne premakne, hkrati pa s časom vseeno prepotuje vedno večji prostor okoli izhodišča. Tako naključno gibanje imenujemo tudi Brownovo gibanje. **B)** Shematični prikaz treh vrst termičnega gibanja molekul. Molekula se lahko giblje na vse njej dostopne načine: lahko se npr. premika, vrti ali niha s svojo lastno frekvenco. V trdni snovi molekule le termično nihajo, saj se premikati ali vrteti ne morejo.

stene prostora (slika 12.2A). Že v 17. stoletju so odkrili, da je tlak plina pri dani temperaturi obratno sorazmeren njegovi prostornini oz. da je sorazmeren njegovi gostoti (več kot je molekul v prostoru, več je trkov na stene prostora in višji je tlak), kar danes imenujemo *Boyllov zakon*. Na začetku 19. stoletja, so ugotovili tudi, da je tlak plina pri dani prostornini sorazmeren njegovi temperaturi (večje kot je termično gibanje molekul plina, močnejši so trki na stene), kar danes imenujemo *Guy-Lussacov zakon* oz. da je temperatura plina pri danem tlaku sorazmerna njegovi prostornini, kar danes imenujemo *Charlesov zakon*. Vse te ugotovitve so kasneje združili v znamenito plinsko enačbo:

$$pV = nRT, \quad (12.1)$$

kjer je p tlak plina, V njegova prostornina, n število molov plina, T temperatura plina, R pa je splošna plinska konstanta, katere vrednost je $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (pozor: plinska konstanta je včasih podana na kilomol snovi in se zapiše kot $R = 8300 \text{ J} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

Temperaturo moramo v plinsko enačbo vstavljati v enoti *kelvin*, pri čemer je hkrati s plinsko enačbo definirano tudi izhodišče *Kelvinove* oz. *absolutne* temperaturne lestvice. Temperatura 0 K je namreč tista temperatura, pri kateri bi termično gibanje povsem zamrlo in bi tlak plina padel na 0 (slika 12.2B). V praksi temperature 0 K sicer ne moremo doseči, v laboratoriju pa so se ji približali že na manj kot milijoninko kelvina. V vsakdanjem življenju namesto Kelvinove uporabljamo Celzijevu temperaturno lestvico, po kateri je pri standardnem tlaku ledišče vode pri 0 °C (oz. približno 273 K), vrelišče pa pri 100 °C



Slika 12.2: **A)** Molekule plina se zaradi termičnega gibanja zaletavajo v stene posode, kar občutimo kot tlak plina. Sila plina na steno posode je $F = pS$, kjer je S površina stene, p pa tlak plina. Višja, kot je temperatura, večje je termično gibanje in večji bo tlak plina. **B)** Temperatura in tlak idealnega plina sta sorazmerna, temperaturi, pri kateri bi tlak padel na 0 Pa, pa pravimo *absolutna ničla* in z njo definiramo izhodišče Kelvinove temperaturne lestvice.

(oz. približno 373 K). Obe temperaturni lestvici se razlikujeta le v izhodišču¹, ne pa tudi v enoti, zato lahko razlike temperatur enakovredno izražamo v kelvinih ali stopinjah celzija: $\Delta T[^\circ\text{C}] = \Delta T[\text{K}]$. V ZDA za merjenje temperature uporabljajo Fahrenheitovo lestvico, pri kateri pa je enota drugačna kot pri Kelvinovi lestvici, zato preračunavanje iz ene v drugo ni tako enostavno (primer pretvarjanja stopinj Fahrenheita smo prikazali v uvodnem poglavju, primer 1.5).

Omenimo naj tudi, da se pri termodinamiki pogosto uporablja *Boltzmannovo konstanto*, $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, ki je ekvivalentna plinski konstanti. Razlika med obema konstantama je le v tem, da plinsko konstanto uporabljamo, če množino snovi merimo v molih, Boltzmannovo pa, če množino snovi merimo v številu delcev. Z Boltzmannovo konstanto se plinska enačba zapiše $pV = Nk_BT$, kjer je N število molekul plina. Povezava med obema konstantama je Avogadrovo število, $R = N_A k_B$. Spomnimo se tudi, da si v praksi lahko vrednost plinske konstante zapomnimo še drugače: pri sobni temperaturi ($T = 20^\circ\text{C}$) in normalnem tlaku ($p = 10^5 \text{ Pa}$), je prostornina enega mola idealnega plina približno 24 litrov.

Plinska enačba natančno velja le za *idealne pline*, tj. za pline iz neskončno majhnih molekul, med katerimi ni interakcij. Za realne pline tega ne moremo

¹Po natančni definiciji Celzijeve temperaturne lestvice je 0°C enako 273,15 K, vendar lahko pri opisovanju fizioloških procesov decimalke pogosto brez škode zaokrožimo.

trditi, a lahko kljub temu plinsko enačbo uporabimo tudi pri njih, če je le njihova gostota dovolj majhna. Plinska enačba velja tudi za mešanice idealnih plinov, saj se molekule v njih med seboj po definiciji ne čutijo in ena za drugo ne morejo vedeti, kakšne vrste so. V skladu s plinsko enačbo vsaka vrsta plina neodvisno od drugih ustvarja svoj *delni (parcialni) tlak* (za i -to vrsto plina v mešanici velja $p_i V = n_i RT$), celotni tlak mešanice plina pa je kar vsota delnih tlakov vsake od sestavin ($p = \sum p_i$, primer 12.1).

Primer 12.1: delni tlaki plinov v zraku

V navadnem suhem zraku je približno 78 % molskega deleža dušika, 21 % kisika in 1 % drugih plinov, v normalno vlažnem zraku pa je zraven še približno 0,5 % vodne pare. Pri normalnem zračnem tlaku se molekule teh plinov gibljejo praktično neodvisno druga od druge, zato k celotnemu zračnemu tlaku vsak od teh plinov prispeva svoj delni tlak, ki je v skladu s plinsko enačbo kar sorazmeren njegovemu molskemu deležu. Če je zračni tlak 10^5 Pa, je torej delni tlak dušika v suhem zraku 78 kPa, delni tlak kisika 21 kPa, skupni tlak ostalih plinov pa približno 1 kPa.

Če ima pacient pomanjkanje kisika, mu lahko dovajamo tudi zrak z večjim deležem kisika, v skrajnih primerih tudi 100% kisik. V še bolj kritičnih primerih (npr. pri zastrupitvi z ogljikovim monoksidom) lahko uporabimo tudi hiperbarično terapijo, pri kateri pacient v hiperbarični komori vdihava zrak pod višjim tlakom od normalnega. Pri tem pa moramo biti pazljivi, saj postane kisik pri visokih delnih tlakih zelo toksičen. Dihanje kisika z delnim tlakom 4 bare lahko že v pol ure povzroči hude okvare možganov in komo. Na učinke visokega tlaka vdihanega zraka morajo biti pozorni tudi potapljači, ki zrak pod visokim tlakom vdihavajo iz jeklenk. Pri tem ni težava le previsok delni tlak kisika ampak tudi dušika, ki pri visokih delnih tlakih deluje narkotično in potapljaču povzroči t. i. globinsko pijanost.

Za vajo s pomočjo plinske enačbe ocenimo, koliko molov dušika in kisika vdihnemo v normalnih pogojih z globokim vdihom, ko vdihnemo približno 3 l zraka. Po plinski enačbi je število molov plina v danem volumnu sorazmerno delnemu tlaku tega plina:

$$n_i = \frac{p_i V}{RT} \quad (12.2)$$

Za kisik tako dobimo

$$n_{O_2} = \frac{21 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol} \cdot \text{K}}{8,3 \text{ J} \cdot 293 \text{ K}} = 0,026 \text{ mol} ,$$

pri čemer smo upoštevali sobno temperaturo $20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$. Ustrezna vrednost za dušik je skoraj štirikrat večja, $n_{N_2} = 0,096 \text{ mol}$.

12.2 Difuzija

Termično gibanje molekul posredno zaznamo tudi pri difuziji v raztopini. Če npr. v vodo kapnemo kapljico črnila, bodo molekule črnila brownovsko tavale naokrog in se s časoma razširile po vsej dostopni prostornini. Potovanje posamezne molekule je povsem naključno in ni usmerjeno v nobeno določeno smer, vseeno pa s časom molekula prepotuje vedno večji prostor okoli izhodišča (slika 12.1A). V povprečju se molekula torej vedno giblje okoli izhodišča, zahtevnejši račun pa pokaže, da njena povprečna oddaljenost od izhodišča narašča s kvadratnim korenom časa:

$$d = \sqrt{6Dt} , \quad (12.3)$$

kjer je d oddaljenost molekule od izhodišča². Konstanto D imenujemo *difuzijska konstanta* in opisuje hitrost difuzije – večja kot je difuzijska konstanta, hitreje tavajo molekule naokoli. Izkaže se (to je prvi pokazal Einstein), da je difuzijska konstanta v prvem približku odvisna od temperature in pa od velikosti viskoznih sil, ki ovirajo molekulo pri gibanju. Če za slednje uporabimo Stokesovo formulo za viskozni upor, dobimo za velikost difuzijske konstante zelo uporabno zvezo:

$$D \approx \frac{k_B T}{6\pi r \eta} , \quad (12.4)$$

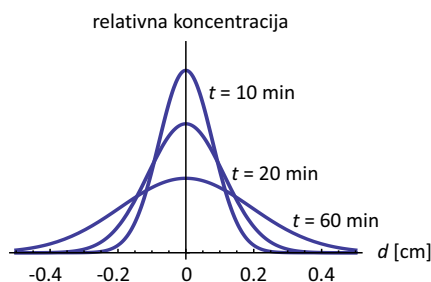
kjer je k_B Boltzmannova konstanta, T temperatura, r polmer molekule oz. delca, ki difundira, η pa viskoznost raztopine. Zgornja enačba velja za idealni primer s povsem okroglimi molekulami, v splošnem pa je lahko izraz v imenovalcu tudi drugačen. V vsakem primeru pa bo veljalo, da je difuzija večja pri višji temperaturi in da manjši delci difundirajo hitreje kot veliki.

Meritve pokažejo, da je pri 37 °C difuzijska konstanta za majhne molekule v vodi (npr. za H₂O ali O₂) reda velikosti $2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s} = 2 \mu\text{m}^2/\text{ms}$, za večje organske molekule (npr. za glukozo) nekajkrat manjša, za velike globularne proteine kot je hemoglobin pa reda velikosti $0,1 \mu\text{m}^2/\text{ms}$. Z uporabo enačbe 12.3 ugotovimo, da male molekule tipično celično razdaljo $10 \mu\text{m}$ z difuzijo prepotujejo v nekaj 10 ms, veliki proteini pa za to razdaljo potrebujejo kar približno 1 s.

Naključno gibanje molekul ima za posledico, da snov v raztopini od izhodišča enakomerno difundira na vse strani. V primeru, ko v raztopino kapnemo

²Strogo vzeto je d koren povprečne oddaljenosti od izhodišča. Za take količine se v angleški literaturi uporablja izraz RMS (root mean square). Zgornja enačba je zapisana za difuzijo v 3D prostoru. Če gre za 2D difuzijo po membrani, je v enačbi številka 4 namesto 6.

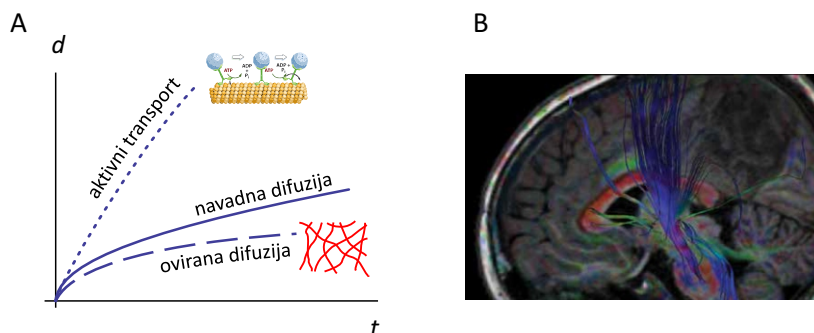
kapljico topljenca, odvisnost koncentracije topljenca v prostoru opiše kar Gaussova krivulja, katere širina je enaka ravno $\sqrt{2Dt}$ (slika 12.3).



Slika 12.3: Ko v raztopino kapnemo topljenec, se zaradi difuzije njegova koncentracija širi v obliki Gaussove krivulje. Površina pod krivuljo je vseskozi enaka in je sorazmerna celotni količini topljenca, širina krivulje (pri statistiki to širino imenujemo standardni odklon) pa je enaka $\sqrt{2Dt}$, kjer je D difuzijski koeficient. Prikazan je primer za difuzijo glukoze v vodi. Kot vidimo, je lahko difuzija precej počasna, zato v večjih sistemih večino transporta snovi poteka s konvekcijo (v telesu npr. s krvnim obtokom), celice pa so za usmerjen transport na večje razdalje razvile različne oblike aktivnega transporta.

Potovanje molekul z difuzijo torej poteka bistveno drugače, kot potovanje pri enostavnem premem gibanju. Pri slednjem oddaljenost od izhodišča narašča premo sorazmerno času, pri difuziji pa povprečna oddaljenost od izhodišča narašča sorazmerno kvadratnemu korenu časa. Za difundiranje preko enkrat večje razdalje tako molekule potrebujejo kar štirikrat več časa. V celicah in tkivih je difuzija sicer zelo pomemben način transporta snovi in celične signalizacije, a za transport na velike razdalje ni učinkovita (sploh npr. v aksonih nevronov, ki so lahko dolgi tudi do 1 m in več). Celice zato uporabljajo tudi različne oblike aktivnega transporta, npr. transport s pomočjo molekularnih motorjev kinezinov, ki svoj tovor usmerjeno prenašajo vzdolž mikrotubulov in dosežejo hitrost tudi do nekaj $\mu\text{m/s}$. Po drugi strani lahko difuzija v celicah poteka tudi precej počasneje, kot napoveduje enačba 12.3, saj jo ovirajo različne strukture v celicah, npr. citoskelet (slika 12.4C) in celične membrane (za difuzijo snovi preko membran veljajo še dodatne zakonitosti, ki jih bomo spoznali kasneje v posebnem poglavju). V tkivih difuzijski koeficient zato tudi ni nujno enak v vse smeri - v možganih npr. voda hitreje difundira vzdolž živčnih vlaken kot pravokotno na njih, saj ji potovanje v pravokotni smeri otežuje celična membrana, s katero so obdana vlakna. To neizotropno difuzijo izraablja sodobna tehnika slikanja z magnetno resonanco, s katero lahko na osnovi

meritev difuzije vode v možganih določimo usmerjenost živčnih vlaken (slika 12.4B).



Slika 12.4: Primeri difuzije v telesu. **A)** Časovna odvisnost oddaljenosti molekule od izhodišča za različne vrste transporta po celici (v splošnem lahko to odvisnost zapišemo kot $d \propto t^\alpha$). Za navadno difuzijo velja, da oddaljenost molekule od izhodišča narašča sorazmerno s kvadratnim korenom časa (v tem primeru velja $\alpha = 1/2$, enačba 12.3). V celicah difuzija pogosto poteka še počasneje od navadne difuzije, saj jo ovirajo različne celične strukture, npr. citoskelet ($\alpha < 1/2$). Zaradi tega v celicah obstaja tudi aktivni transport (npr. z molekularnimi motorji kinezini, ki se premikajo po mikrotubulih), s katerim je mogoče snov transportirati hitreje in bolj usmerjeno kot z navadno difuzijo ($\alpha > 1/2$). **B)** Primer slike možganov, posnete s tehniko difuzijska tenzorska magnetna resonanca. To je posebna tehnika slikanja z magnetno resonanco, pri kateri lahko izmerimo difuzijski koeficient vode v različnih smereh. Ker voda lažje difundira vzdolž živčnih vlaken kot pravokotno na njih, lahko s to tehniko zaznamo usmerjenost živčnih vlaken v možganih.

12.3 Merjenje temperature

Temperatura je eden ključnih parametrov v vseh termodinamskih sistemih, zato ni presenetljivo, da so od nje odvisne mnoge lastnosti snovi. Že pri idealnem plinu smo videli, da je pri danem tlaku od temperature odvisna njegova prostornina oz. gostota. Podobno velja praktično za vse snovi, le da je v splošnem zveza med prostornino in temperaturo sorazmerna le v omejenem temperaturnem območju. V splošnem to zvezo zapišemo z enačbo

$$\frac{\Delta V}{V} = \beta \Delta T, \quad (12.5)$$

kjer koeficient β imenujemo *temperaturni koeficient prostorninskega raztezka*. Ta koeficient je odvisen od vrste snovi, lahko pa je odvisen tudi od temperature (tabela 12.1). Iz zgornje enačbe vidimo, da iz vrednosti koeficienta razberemo, kolikšna bo relativna sprememba prostornine ($\Delta V/V$) pri dani spremembi temperature (ΔT).

snov	amalgam	zobni enamel	titan	jeklo
β [$10^{-6}/K$]	75	34,2	25,5	36
snov	voda (20 °C)	voda (0 °C)	etanol	živo srebro
β [$10^{-6}/K$]	210	−70	1100	180

Tabela 12.1: Temperaturni koeficienti prostorninskega raztezka nekaterih snovi pri 20 °C. Številke povejo, za koliko milijonink se poveča prostornina snovi, če se ji temperatura spremeni za eno stopinjo (dentalni podatki so povzeti po [11]).

Pri večini snovi je koeficient prostorninskega raztezka pozitiven, se pravi, da se snovi ob višanju temperature prostornina povečuje, saj se gradniki snovi zaradi povečanega termičnega gibanja malo razmaknejo. Ni pa vedno tako. Pri vodi je npr. v temperaturnem območju od 0 °C do 4 °C koeficient prostorninskega raztezka negativen, saj se ji v tem območju z večanjem termičnega gibanja prostornina manjša. Koeficient prostorninskega raztezka je negativen tudi pri mnogih polimerih, npr. pri gumi. S temperaturnimi raztezki imajo sicer največ opraviti gradbinci, a moramo biti nanje pozorni tudi v medicini: bilo bi npr. zelo nerodno, če bi nam zaradi neusklajenih koeficientov temperaturnega raztezka zoba in zobne plombe ob lizanju sladoleda slednje izpadale iz zob.

Zaradi termičnega gibanja so od temperature odvisne tudi mnoge druge lastnosti snovi. Tako sta od temperature odvisni npr. površinska napetost in viskoznost, ki smo ju srečali pri mehaniki, pa tudi mnoge električne lastnosti snovi. Nekatere od teh temperaturnih odvisnosti s pridom uporabljamo za merjenje temperature. Obstaja veliko različnih vrst termometrov, od katerih ima vsaka svoje prednosti in slabosti (primer 12.2). Če bi npr. radi izmerili temperaturo majhnemu vzorcu ali pa bi radi sledili hitrim spremembam, si s klasičnim alkoholnim termometrom ne moremo kaj dosti pomagati in je bolje, da vzamemo kak termometer, ki ima majhno toplotno kapaciteto in se

zato spremembam temperature hitro prilagaja. V medicini tudi ni vseeno, na katerem delu telesa temperaturo izmerimo, saj je npr. v ušesu malo drugačna povprečna temperatura kot pod pazduho.

Primer 12.2: o različnih vrstah termometrov

Različne vrste termometrov za merjenje temperature izrabljajo temperaturno odvisnost različnih lastnosti snovi. Klasični termometri delujejo na principu temperaturnega raztezanja alkohola ali živega srebra (slika A). Uporabo slednjih opuščamo zaradi strupenosti živega srebra. Najpreprostejši elektronski termometri za merjenje telesne temperature so t. i. digitalni termometri (slika B), ki za merjenje temperature izrabljajo odvisnost električnih lastnosti kovin od temperature (bralec, ki bi o načinu delovanja teh termometrov rad izvedel več, lahko na internetu pobrska za izrazoma *termočlen* ali *termistor*). V primerjavi s klasičnimi termometri lahko digitalni termometri temperaturo izmerijo hitreje, saj se mora pri njih na merjeno temperaturo ogreti le majhna kovinska kapica na vrhu termometra. Pri klasičnih termometrih se mora na merjeno temperaturo ogreti celotna bučka s tekočino, kar ponavadi traja vsaj nekaj minut (kasneje bomo videli, da je razlog za to manjša toplotna kapaciteta digitalnih termometrov.)



Še hitrejši od digitalnih so brezkontaktni termometri za merjenje temperature v ušesu (slika C) ali na čelu (slika D). Ti ponavadi delujejo na principu merjenja infrardečega sevanja, ki ga zaradi svoje temperature oddaja površina telesa (več o sevanju toplih teles se bomo naučiti v poglavju Valovanje).

Poudarimo naj, da je nemogoče reči, katera vrsta termometrov je »najboljša,« saj ima vsaka vrsta svoje dobre in slabe lastnosti. V določenih situacijah uporabljamo ene, v drugih pa druge. Za kalibriranje termometrov so včasih npr. uporabljali plinske termometre, ki za merjenje temperature izkoriščajo kar temperaturno raztezanje plina po plinski enačbi, vendar pa so za vsakdanjo uporabo preokorni. Kot zanimivost povejmo še, da je enega prvih plinskih termometrov (oz. sploh enega prvih termometrov za merjenje telesne temperature) v začetku 17. stoletja izdelal v Kopru rojeni Santorio Santorio, ki je bil kot profesor v Padovi kolega znamenitega Galileo Galileja.

Poglavje 13

Notranja energija in prvi zakon termodinamike

V poglavju o mehaniki smo spoznali, da je energija pomemben pojem, ki nam pomaga pri razumevanju marsikaterega naravnega pojava. Pri mehaniki se nam je energija zaradi trenja včasih »izgubljala« v toploto, zaradi česar je imel zakon o ohranitvi energije pri mehaniki le omejeno veljavo. V tem poglavju bomo izgubljeno energijo poiskali na mikroskopskem nivoju in tako dokončno zapisali zakon o ohranitvi energije. Ob tem bomo tudi spoznali, da si lahko sistemi energijo izmenjujejo v obliki dela in toplote ter da je mogoče slednjo enostavno izmeriti s pomočjo kalorimetra. Na koncu poglavja bomo spoznali še entalpijo, ki bo za nas sicer nov in malce abstrakten pojem, a tudi zelo uporaben za opisovanje biokemijskih procesov.

13.1 Notranja energija

Zaradi termičnega gibanja ima vsaka molekula svojo kinetično energijo. Poleg tega imajo lahko molekule tudi druge vrste energij: energijo, ki je opravljena v medmolekulskih interakcijah, energijo interakcij med elektroni in jedrom, jedrsko energijo v jedrih atomov, lahko pa tudi različne potencialne energije, ki jih imajo v zunanjih poljih, npr. gravitacijskem ali električnem. Celotno energijo sistema, tj. seštevek vseh energij vseh delcev v sistemu, imenujemo *notranja energija* sistema, W_n . Na srečo pri opisovanju sistemov ni treba vedno upoštevati vseh vrst energije, temveč le tiste, ki se v dani situaciji spreminjajo. Pri opisovanju kemijskih reakcij sta npr. najpomembnejši kinetična energija molekul in energije vezi med atomi in molekulami, ni pa potrebno

upoštevati gravitacijske potencialne in jedrskih energij, saj te pri kemijskih reakcijah ostajajo nespremenjene.

Molekule v termodinamskih sistemih neprestano trkajo in interagirajo s sosedami in si pri tem izmenjujejo energijo. Zaradi tega se energija posameznim molekulam neprestano spreminja, poleg tega pa vse molekule nimajo v nobenem trenutku enake energije. Vseeno velja, da imajo v ravnovesnem stanju sistema vse molekule enako energijo v *povprečju*. Pri tem se energija ne prerazporeja le med vsemi delci v sistemu ampak tudi med različnimi vrstami energije, ki so za dani delec dostopne, npr. kinetične energije ali energije nihanja molekul. Izkaže se, da za preproste sisteme velja t. i. *ekviparticijski izrek*, ki pravi, da ima v povprečju vsak delec v vsakem možnem gibanju (v vsaki svoji prostostni stopnji) opravljeno natanko $\frac{1}{2}k_B T$ energije. V primeru 13.1 bomo izračunali, kolikšna je ta energija v joulih.

Primer 13.1: termična energija molekul pri normalnih pogojih

Energijo, ki jo imajo zaradi svojega termičnega gibanja molekule, včasih imenujemo tudi *termična energija* in je reda velikosti $k_B T$. Pri sobni temperaturi ($T = 293 \text{ K}$) je vrednost tega produkta enaka

$$k_B T = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \cdot 293 \text{ K} \approx 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}.$$

Termična energija molekule v snovi je torej zelo majhna, a ne pozabimo, da je molekul v tipičnem sistemu zelo veliko.

Pri biokemijskih procesih se energije ponavadi podaja na mol snovi. Če je termična energija na molekulo enaka $k_B T$, je termična energija na mol enaka RT oz.

$$RT = 8,3 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 293 \text{ K} \approx 2,5 \text{ kJ/mol}.$$

To številko si je vredno zapomniti, saj nam bo pomagala pri ocenjevanju velikosti energij v biokemijskih procesih. Stabilnost kemijskih vezi lahko npr. ocenimo s primerjavo disociacijske energije s termično: pri močnih vezeh je disociacijska energija mnogo večja od termične energije, pri šibkih vezeh pa je le malo večja, zato jih je lažje pretrgati. Če bi bila disociacijska energija manjša od termične, o trajni vezi sploh ne bi mogli govoriti, saj bi bilo za pretrganje vezi dovolj že termično gibanje.

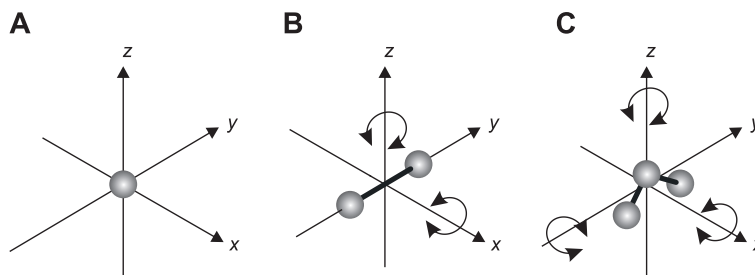
Notranja energija preprostih termodinamskih sistemov se v splošnem veča z višanjem temperature, saj se pri tem veča termično gibanje molekul oz. njihova kinetična energija, a ta odvisnost ponavadi ni enostavna. Odvisnost med notranjo energijo in temperaturo je enostavna le v primeru idealnih plinov, ki si ga bomo podrobneje pogledali v nadaljevanju.

13.2 Notranja energija idealnega plina

Osnovna značilnost idealnih plinov je, da med njihovimi molekulami ni interakcij. Če obnašanje plinov ne vplivajo kakšne potencialne energije, je notranja energija idealnega plina torej kar enaka skupni kinetični energiji molekul. Ker pa je slednja preko ekviparticijskega izreka neposredno povezana s temperaturo, je tudi notranja energija idealnega plina neposredno povezana s temperaturo:

$$W_{n.i.p.} = N \cdot \frac{1}{2} N_p k_B T = \frac{1}{2} N_p \cdot n R T, \quad (13.1)$$

kjer je N_p število prostostnih stopenj ene molekule. Notranja energija je odvisna od števila prostostnih stopenj molekul plina, saj je po ekviparticijskem izreku $\frac{1}{2} k_B T$ termične energije v vsaki dostopni prostostni stopnji. Več-atomni plini imajo torej pri dani temperaturi večjo notranjo energijo kot eno-atomni (slika 13.1).

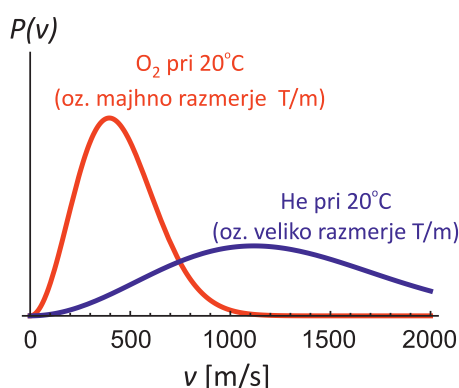


Slika 13.1: **A)** Enoatomna molekula plina se lahko v prostoru giblje v treh neodvisnih smereh (ima tri prostostne stopnje), zato je po ekviparticijskem izreku njena kinetična energija v povprečju enaka $\frac{3}{2} k_B T$. **B)** Dvoatomna oz. linearna molekula plina se lahko poleg tega tudi vrti okrog dveh osi (ima pet prostostnih stopenj) in ima v povprečju skupno $\frac{5}{2} k_B T$ energije. **C)** Večatomna molekula se lahko giblje na šest neodvisnih načinov (tri translacije in tri rotacije) zato ima v povprečju $\frac{6}{2} k_B T$ energije. V splošnem lahko molekule plinov tudi nihajo, a je pri sobni temperaturi termična energija premajhna, da bi lahko to nihanje vzbudila (izjema je npr. CO_2 , ki zaradi termične energije tudi niha).

Gibanje po prostoru je v vsakem primeru povezano s tremi prostostnimi stopnjami, zato je povprečna translacijska kinetična energija ene molekule enaka za vse vrste plinov:

$$W_k = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{3}{2} k_B T, \quad (13.2)$$

pri čemer smo z m_1 označili maso ene molekule plina, z v pa njeno hitrost. Ker imajo v povprečju vse molekule enako termično energijo, je v povprečju hitrost molekul sorazmerna kvadratnemu korenu razmerja med temperaturo in maso ene molekule. Pri dani temperaturi se torej v povprečju lažje molekule gibljejo hitreje kot težje, pri vseh pa je gibanje tem hitrejše, čim višja je temperatura. Zgornja enačba velja v povprečju, dejanske hitrosti posameznih molekul pa so pri tem porazdeljene po t. i. Maxwell–Boltzmannovi porazdelitvi (slika 13.2).



Slika 13.2: Porazdelitev hitrosti molekul kisika in helija pri sobni temperaturi. Pri sobni temperaturi je povprečna hitrost prvih približno 440 m/s, drugih pa približno 1250 m/s. Z višanjem temperature se hitrosti molekul večajo, saj iz ekviparticijskega izreka za idealne pline (en. 13.2) sledi, da so hitrosti plina sorazmerne $\sqrt{T/m}$. Povprečna hitrost molekul helija ($M = 4$ g/mol) je zato $\sqrt{8}$ krat večja od povprečne hitrosti molekul kisika ($M = 32$ g/mol). Porazdelitev hitrosti molekul kisika bi se modri krivulji približala pri temperaturi $8 \cdot 293 \text{ K} \approx 2344 \text{ K}$.

13.3 Delo, toplota in prvi zakon termodinamike

Oboroženi z znanjem o notranji energiji lahko posplošimo zakon o ohranitvi mehanske energije, ki smo ga spoznali pri preprostih mehanskih sistemih. Posplošitev, ki velja za vse sisteme v naravi, se imenuje *prvi zakon termodinamike* in pravi:

Energija sistema ne more nastajati iz nič ali izginjati v nič. Sprememba notranje energije sistema je enaka energiji, ki jo sistem izmenja z okolico.

Prvi zakon termodinamike je torej zelo preprost, a je kljub temu (ali pa ravno zato) eden od najbolj fundamentalnih zakonov narave. Ljudje že od nekdaj iščejo načine, kako ga prelisičiti, saj je bila energija od nekdaj dragocena dobrina in bi ji bilo dobro delati »iz nič«, seveda pa so pri tem iskanju neuspešni. Preden si pogledamo nekaj praktičnih posledic prvega zakona termodinamike, si oglejmo nekaj načinov prehajanja notranje energije iz sistema v sistem.

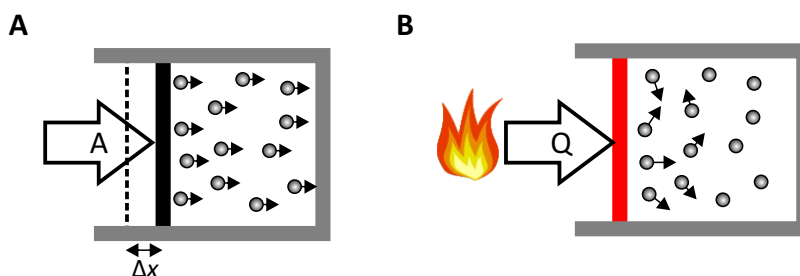
V poglavju o mehaniki smo videli, da lahko preprostem mehanskemu sistemu energijo spremenimo s pomočjo dela, ki ga izračunamo kot produkt sile in poti, na kateri je ta sila delovala. Enako velja tudi za sisteme z veliko delci, le da na njih ne moremo delovati s točkasto silo temveč silo na površino, tj. s tlakom. Delo se opravi le, če sila deluje na določeni poti, kar se v termodinamskih sistemih pozna kot sprememba prostornine. Kratek račun pokaže (slika 13.3A), da je delo v termodinamskih sistemih enako

$$A = -p\Delta V, \quad (13.3)$$

kjer je p tlak, s katerim okolica pritiska na sistem, ΔV pa je sprememba prostornine sistema. Predznak dela smo definirali tako, da je delo pozitivno, če ga opravi okolica, in negativno, če ga opravi sistem. Ker je tlak vedno pozitiven, bo sistem ob večanju prostornine ($\Delta V > 0$) okolico odrival in zato opravljal delo ($A < 0$). Po drugi strani bo delo pozitivno, če okolica stisne sistem in mu s tem zmanjša prostornino ($\Delta V < 0$).

Zgornja enačba za delo velja le za primere, ko se tlak sistema med opravljanjem dela ne spreminja. Če se tlak med opravljanjem dela spreminja, moramo delo izračunati z integralom $A = - \int p dV$. Vidimo tudi, da pri nespremenjeni prostornini ($\Delta V = 0$) sistem z okolico ne izmenja nič dela, ne glede na to ali se v okolici morda spreminja tlak.

Že pri mehaniki smo spoznali, da poleg dela obstajajo še drugi načini izmenjave energije, ki pa so bili mehaniki »nevidni.« Predstavljajmo si, da staknemo en vroč in en hladen predmet. Molekule v vročem predmetu se termično gibljejo hitreje kot molekule v hladnem, ker pa sta predmeta v stiku, se bo njihova kinetična energija preko trkov počasi prenesla na molekule v hladnejšem predmetu, ne da bi se pri tem opravilo delo (slika 13.3). Pravimo, da



Slika 13.3: Shematični prikaz dveh tipičnih načinov dovajanja energije v sistem. **A)** Pri dovajanju dela z zunanjo silo stisnemo molekule v sistemu, pri čemer na sistem delujemo s tlakom $p = F/S$, kjer je S površina, na katero deluje sila. Meja sistema se premakne Δx , prostornina sistema pa se zaradi tega zmanjša za $\Delta V = \Delta x S$ (sprememba prostornine je negativna). Energija sistemu se pri tem poveča za $A = -p\Delta V$ (ker je $\Delta V < 0$, bo $A > 0$). **B)** Dovajanja toplote s termičnim stikom z vročim telesom. V vročem telesu je termično gibanje večje in se preko trkov molekul razširi po vsem sistemu. V nasprotju z delom pri toploti dovajanje energije poteka preko neurejenega gibanja molekul.

toplota prehaja s toplejšega na hladnejše telo¹, označujemo pa jo s simbolom Q . Prehajanje toplote poteka, dokler se temperatura obeh teles ne izenači. Tako delo in toplota povečata energijo molekul v sistemu, le da pri delu energijo dobi veliko molekul hkrati, pri toploti pa se energija neurejeno prenaša med posameznimi molekulami. Pri mehaniki smo vedno obravnavali celo telo hkrati in posameznih molekul nismo videli, zato nam je bila toplota takrat »nevidna.«

Pogosto energija med sistemih prehaja le z zgoraj opisanimi delom in toploto. V takih sistemih lahko prvi zakon termodinamike zapišemo z enačbo:

$$\Delta W_n = A + Q . \quad (13.4)$$

Zgoraj opisana delo in toplota sta sicer zelo pogosta načina za prehajanje energije, nista pa edina. Delo lahko npr. dovajamo tudi v obliki električnega dela, kar bomo spoznali pri poglavju o elektriki in magnetizmu. Energija lahko

¹Opozorimo naj, da *temperatura* in *toplota* nikakor nista ista stvar! Temperatura pove kako je nekaj vroče ali hladno in jo merimo v K ali °C, toplota pa je eden od načinov za prehajanje energije med sistemi in ima enoto J. Zmeda je velika tudi zato, ker je starinski izraz za termometer »toplomer.« V izogib zmede ta izraz počasi opuščamo.

med sistemi prehaja tudi v obliki elektromagnetnega sevanja. Če gre za infrardeče sevanje, je to kar »toplota,« saj se tako sevanje absorbira nespecifično v celem telesu in s tem poveča neurejeno termično gibanje molekul v sistemu. Po drugi strani se lahko fotoni elektromagnetnega sevanja absorbirajo tudi na bolj urejen način, kar se dogaja npr. pri fotosintezi, pri kateri rastline energijo elektromagnetnega sevanja s sonca pretvarjajo v notranjo energijo kemijskih vezi v hrani.

13.4 Kalorimetrija

Ena od najpogostejših posledic dovajanja toplote v sistem je segrevanje, se pravi višanje njegove temperature. V splošnem je sprememba temperature sistema kar sorazmerna količini izmenjane toplote:

$$Q = C\Delta T, \quad (13.5)$$

pri čemer koeficient C imenujemo *toplotna kapaciteta* sistema in v dovolj majhnih temperaturnih območjih ni odvisen od temperature. Zgornja enačba velja tudi za odzemanje toplote, v takem primeru sta tako Q kot ΔT pač negativna (razmislite, ali je C lahko negativen!). Če je sistem iz homogene snovi, lahko vpeljemo še *specifično toploto snovi* in jo označimo s c , pri čemer velja $C = mc$, kjer je m masa sistema. Za homogene sisteme lahko zgornjo enačbo torej zapišemo kot

$$Q = mc\Delta T, \quad (13.6)$$

Te enačba se lepo sklada z našo intuicijo: večji kot je sistem, več toplote potrebujemo, da ga segrejemo za določeno temperaturo. Vrednost specifične toplote snovi je lahko v splošnem odvisna od temperature, pri plinih pa je odvisna tudi od tega, ali plin segrevamo pri konstantnem tlaku ali pri konstantni prostornini (primer 13.2).

Zgoraj opisano obnašanje s pridom izrabljamo za merjene izmenjane toplote. Spremembo temperature znamo namreč dobro izmeriti s termometrom in če poznamo toplotno kapaciteto, lahko brez težav določimo tudi toploto, ki je povzročila izmerjeno spremembo temperature. Najpreprostejša naprava za merjenje toplote je *kalorimeter* (primer 13.3). Kot bomo videli v prihodnjih poglavjih, je količina izmenjane toplote zelo pomemben podatek

za razumevanje biokemijskih reakcij, zato je kalorimeter eno osnovnih orodij za raziskovanje naravnih procesov.

Izmenjevanje toplote z okolico ni nujno povezano le s spreminjanjem temperature sistema, ampak je lahko povezano tudi s kemijskimi reakcijami ali pa s spremembami agregatnega stanja v sistemu (toplota se pri tem porabi za pretrganje kemijskih vezi). Taljenje in izparevanje potekata pri konstantni temperaturi, toplota, ki jo potrebujemo za spremembo agregatnega stanja snovi, pa je sorazmerna njeni masi:

$$Q = mq_t \quad \text{oziroma} \quad Q = mq_i, \quad (13.7)$$

kjer je m masa snovi, ki je spremenila agregatno stanje, q_t in q_i pa sta talilna oz. izparilna toplota, tj. konstanti, ki povesta koliko energije je potrebno taljenje oz. izparevanje 1 kg izbrane snovi (primer 13.4). Izparilna toplota je tipično večja od talilne, saj se morajo pri izparevanju vezi med molekulami popolnoma pretrgati, za kar potrebujemo veliko toplote. Za vodo pri normalnem tlaku npr. velja $q_t = 334 \text{ kJ/kg}$ in $q_i = 2,3 \text{ MJ/kg}$, kar pomeni, da za izparevanje enega litra vode potrebujemo približno 8-krat več energije kot za taljenje enega kilograma ledu.

Primer 13.2: specifična toplota idealnih plinov

Specifična toplota snovi pove, koliko toplote Q potrebujemo, da maso snovi m segrejemo za ΔT . Večja kot je specifična toplota snovi, več toplote potrebujemo, da dano maso segrejemo. Pri idealnih plinih je sprememba temperature preko en. 13.1 enostavno povezana s spremembo notranje energije, zato lahko specifično toploto idealnih plinov določimo tako, da primerjamo enačbo za toploto (en. 13.6) in vrednost izmenjane toplote po 1. zakonu termodinamike

$$Q = \Delta W_n - A.$$

Če plin med dovajanjem toplote z okolico ne izmenja dela ($A = 0$), bo šla vsa toplota v spremembo notranje energije in posledično v spremembo temperature. Če pa se plin med dovajanjem toplote lahko razpenja, bo šlo nekaj toplote tudi za delo, ki se ob tem opravi, zato bosta spremembi notranje energije in temperature nekaj manjši. Specifična toplota pri dani prostornini (ko je $A = 0$) bo torej manjša kot specifična toplota pri danem tlaku. Prvo bomo poimenovali c_V drugo pa c_p .

Račun naredimo najprej za enoatomne pline, ki imajo le tri prostostne stopnje ($N_p = 3$, slika 13.1). Število prostostnih stopenj vnesemo v enačbo za notranjo energijo idealnih plinov (en. 13.1) in razberemo zvezo med spremembo notranje energije in temperature enoatomnih plinov

$$\Delta W_n = \frac{3}{2} n R \Delta T = \frac{3}{2} m \frac{R}{M} \Delta T,$$

pri čemer smo v zadnjem koraku uporabili zvezo $n = m/M$. Specifično toploto pri dani prostornini bomo razbrali iz primerjave enačb, s katero smo specifično toploto definirali (en. 13.6) in količino izmenjane toplote po 1. zakonu

$$Q = mc_V \Delta T \quad \text{in} \quad Q = \Delta W_n - 0 = m \frac{3}{2} \frac{R}{M} \Delta T \quad .$$

Iz primerjave zgornjih enačb razberemo, da je specifična toplota enoatomnega plina pri dani prostornini enaka

$$c_v = \frac{3}{2} \frac{R}{M}$$

Pri segrevanju pri danem tlaku se plin tudi razpenja in opravlja delo, ki pa ga lahko izračunamo s pomočjo plinske enačbe, v kateri upoštevamo, da je tlak konstanta in je sprememba prostornine neposredno povezana s spremembo temperature:

$$A = -p\Delta V = -nR\Delta T = -m \frac{R}{M} \Delta T$$

Ponovno primerjamo enačbo za specifično toploto (en. 13.6) in količino izmenjane toplote po 1. zakonu

$$Q = mc_p \Delta T \quad \text{in} \quad Q = \Delta W_n - A = \frac{3}{2} m \frac{R}{M} \Delta T + m \frac{R}{M} \Delta T = m \frac{5}{2} \frac{R}{M} \Delta T$$

Vidimo, da je specifična toplota za enoatomni plin pri danem tlaku enaka

$$c_p = \frac{5}{2} \frac{R}{M}$$

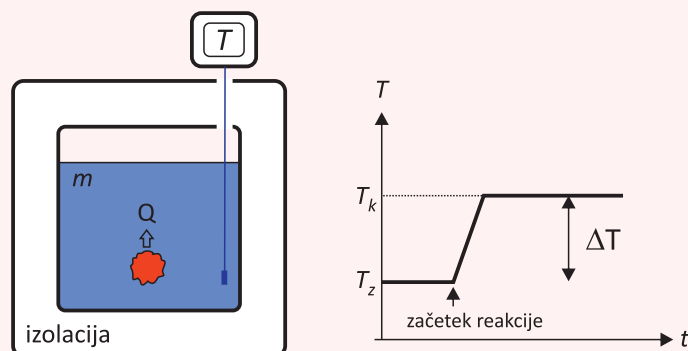
Če bi račun ponovili še za večatomne pline, bi ugotovili, da je pri vseh vrednost c_p ravno za R/M večja od vrednosti c_v :

$$c_p = c_v + \frac{R}{M} \quad ,$$

vrednost c_v pa je enaka številu prostostnih stopenj krat $\frac{1}{2} \frac{R}{M}$. Kasneje bomo videli, da je za obnašanje plinov pomemben parameter tudi razmerje med specifičnima toplotama, $\kappa = c_p/c_v$. Enostaven račun pokaže, da je ta parameter za enoatomne pline enak 1,66, za dvoatomne 1,4, za prostorske molekule pa 1,33.

Primer 13.3: kalorimeter

Kalorimeter je naprava, s katero merimo količino toplote, ki se sprosti ob izbranem procesu, npr. pri eksotermni kemijski reakciji ali ob ohlajevanju izbranega telesa. Na sliki je prikazano delovanje preprostega kalorimetra.



Preprost kalorimeter je dobro izolirana posoda, v kateri je znana količina vode. V kalorimetru poženemo proces, ki ga raziskujemo, in hkrati merimo temperaturo vode. Iz kalorimetra ne more uiti nič toplote, zato bo šla vsa pri procesu sproščena toplota v segrevanje vode v kalorimetru. Količino sproščene toplote lahko določimo neposredno iz enačbe

$$Q = mc\Delta T,$$

saj poznamo maso vode (m) in njeno specifično toploto (c), spremembo temperature ($\Delta T = T_k - T_z$) pa izmerimo. Ponavadi se ne moremo izogniti, da ne bi poleg vode ogreli tudi notranjih sten kalorimeterske posode. V takem primeru moramo zgornjo enačbo nadomestiti z enačbo $Q = (mc + C)\Delta T$, kjer smo s C označili toplotno kapaciteto notranjih sten kalorimeterske posode.

Primer 13.4: regulacija temperature s potenjem

Za človeka je izhlapevanje potu eden glavnih mehanizmov za regulacijo telesne temperature (tu ljudje prekašamo dinozavre in druge plazilce, ki regulacije telesne temperature nimajo je njihova temperatura bolj ali manj prepuščena zunanjim pogojem). Znan je podatek, da tekač z maso 60 kg med tekom s potenjem in izhlapevanjem izgubi približno 0,5 l vode na uro. Ali znamo na osnovi tega podatka določiti, najmanj kolikšna je njegova energijska poraba?

Celotne energijske porabe iz zgornjega podatka žal ne moremo določiti, saj del energije tekač porabi kot delo pri premikanju, del toplote pa odda tudi npr. s sevanjem. Iz zgornjega podatka lahko ocenimo le toploto, ki se je v eni uri od telesa odvedla z izhlapevanjem:

$$Q = m q_i = 0,5 \text{ kg} \cdot 2,3 \text{ MJ} = 1,15 \text{ MJ}.$$

To je približno toliko, kolikor v 3 h porabo 100 W žarnica.

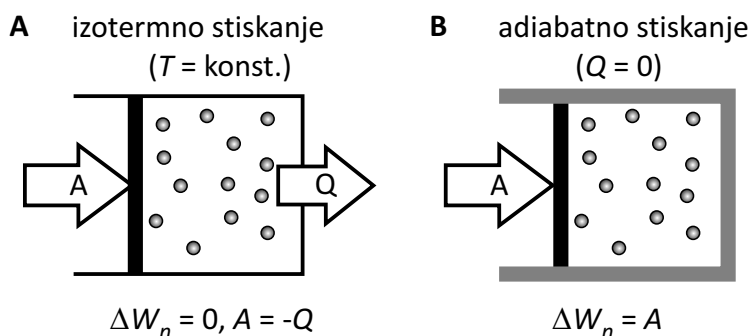
Izračunajmo še, za koliko bi se v eni uri segrelo tekačevo telo, če pot ne bi izhlapeval, npr. če bi tekel po džungli, kjer zaradi velike vlažnosti zraka pot ne izhlapeva. Če se zgoraj izračunana toplota ne bi odvedla z izhlapevanjem, bi se porabila za segrevanje telesa. Ob predpostavki, da je specifična toplota telesa podobna specifični toploti vode, dobimo

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{1,15 \text{ MJ}}{60 \text{ kg} \cdot 4200 \text{ J/kgK}} = 4,6^\circ\text{C}.$$

V tropski klimi bi intenzivni tek torej težko preživel.

13.5 Stiskanje in razpenjanje plinov

S stiskanjem oz. razpenjanjem plinov se v vsakdanjem življenju srečamo vsaj pri napihovanju zračnic na kolesu in spuščanju dišav iz deodorantov pod tlakom, v medicini pa npr. pri jeklenkah stisnjenih plinov, ki se uporabljajo za predihavanje pacientov.



Slika 13.4: Shematični prikaz dveh možnosti stiskanja idealnih plinov. **A)** Če je plin v toplotnem stiku z okolico, bo energijo, pridobljeno z delom stiskanja, sproti izgubljal v obliki toplote. Notranja energija in s tem temperatura se mu zaradi stiskanja ne bosta spremenili. **B)** Če je plin izoliran, se mu bo ob stiskanju zaradi dovedenega dela povečala notranja energija in se bo segrel. Tlak se mu bo zaradi tega zvečal bolj kot pri izotermnem stiskanju. Hitro (adiabatno) je torej plin težje stisniti kot počasi (izotermno).

Obnašanje plinov pri stiskanju oz. razpenjanju je odvisno od izmenjevanja toplote med plinom in okolico. Če lahko plin med stiskanjem izmenjuje toploto z okolico, bo njegova temperatura vseskozi enaka temperaturi okolice, ki je ponavadi konstantna. Takim procesom pravimo tudi *izotermni* procesi. Če pa

je plin izoliran, ali pa je stiskanje tako hitro, da ni časa za izmenjavo toplote, se bo zaradi dovedenega dela plinu povečala notranja energija in se bo zaradi tega segrel (analogno se bo pri takem razpenjanju temperatura plinu znižala). Procesom brez izmenjave toplote z okolico ($Q = 0$) pravimo *adiabatni* procesi.

Ker se pri adiabatnem stiskanju poveča temperatura, se tlak plina bolj poveča kot pri izotermnem. Če lahko pri izotermnem stiskanju spremembo tlaka izračunamo kar iz plinske enačbe ($pV = konst.$), pa je pri adiabatnem situacija bolj zapletena. Natančnejši izračun pokaže, da za adiabatne spremembe velja zveza

$$pV^\kappa = konst. , \quad (13.8)$$

kjer je κ razmerje c_p/c_V (se pravi 1,66 za enoatomne pline, 1,4 za dvoatomne linearne molekule in 1,33 za prostorske molekule, primer 13.2). Pri izotermnih spremembah se torej ohranja produkt pV , pri adiabatnih pa produkt pV^κ . Ker je κ vedno večja od ena, se pri adiabatnih spremembah tlak spreminja hitreje kot pri izotermnih spremembah.

Ker tlak plina pri adiabatnem stiskanju raste hitreje kot pri izotermnem, plin adiabatno težje stisnemo kot izotermno. Z drugimi besedami, adiabatna stisljivost plina je manjša kot izotermna. Natančnejši račun pokaže:

$$\chi_T = \frac{1}{p} \quad \text{in} \quad \chi_S = \frac{1}{\kappa p} \quad (13.9)$$

kjer smo s χ_T označili izotermno, s χ_S pa adiabatno stisljivost. Žlahtne (enoatomne) pline je torej malce težje hitro stisniti kot večatomne pline, ki imajo manjšo vrednost κ . Z našim znanjem termodinamike si znamo to lastnost enostavno razložiti: pri enoatomnih plinih gre vse delo adiabatnega stiskanja v translacijsko kinetično energijo, se pravi v gibanje, ki prispeva k tlaku plina in tako nasprotuje našemu stiskanju. Pri večatomnih plinih pa gre del dela v povečanje rotacijske kinetične energije, ki k tlaku ne prispeva.

13.6 Entalpija

Izmenjevanje toplote je pomemben parameter za potek biokemijskih reakcij. Nekatere reakcije za svoj potek potrebujejo toploto iz okolice, pri drugih pa se toplota v okolico sprošča. Prve se imenujejo endotermne reakcije ($Q > 0$), druge pa eksotermne ($Q < 0$). Ker pa so mnoge reakcije zelo zapletene in

lahko iz reaktantov do produktov vodi več različnih poti, se postavi vprašanje, ali je izmenjana toplota vedno enaka, ne glede na to, po kateri poti se je reakcija izvršila. Poglejmo, ali nam lahko prvi zakon termodinamike pomaga pri odgovoru na to vprašanje.

Biokemijske reakcije ponavadi potekajo pri danem tlaku, se pravi kar pri zunanjem zračnem tlaku. Če so v reakcijah udeleženi tudi plini, bo na spremembo notranje energije vplivalo tudi delo, ki se porabi pri razpenjanju plinov. V splošnem se torej pri biokemijskih reakcijah z okolico izmenjata tako delo kot toplota. Z malo računske akrobacije in uporabo prvega zakona termodinamike lahko vseeno ugotovimo, kaj se pri reakcijah dogaja s toploto. V ta namen vpeljemo količino *entalpija*, ki jo označimo s črko H in definiramo kot

$$H = W_n + pV \quad (13.10)$$

Izračunajmo spremembo entalpije pri reakciji pri danem tlaku. Sprememba entalpije bo enaka vsoti spremembe notranje energije in spremembe produkta pV . Ker je p konstanten, je sprememba tega produkta kar enaka $p\Delta V$. Sedaj moramo le še upoštevati prvi zakon termodinamike (En. 13.4) in izraz za delo (En. 13.3) ter za spremembo entalpije dobimo

$$\Delta H = Q \quad (13.11)$$

Sprememba entalpije je pri danem tlaku torej kar enaka izmenjani toploti. Še več, ker je entalpija odvisna le od notranje energije, tlaka in prostornine, imata dva enaka sistema poleg enakih notranje energije, tlaka in prostornine enako tudi entalpijo. Sprememba entalpije in s tem celotna izmenjana toplota sta torej odvisni le od začetnega stanja in končnega stanja reakcije, ne glede na to po kakšni poti je reakcija potekla. S tem je povezan *Hessov zakon*, ki pravi, da je sprememba entalpije celotne reakcije vsota sprememb entalpij posameznih korakov. Če npr. reakcija poteka iz stanja A do stanja D preko vmesnih korakov B in C ($A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$), velja

$$\Delta H_{A \rightarrow D} = \Delta H_{A \rightarrow B} + \Delta H_{B \rightarrow C} + \Delta H_{C \rightarrow D} . \quad (13.12)$$

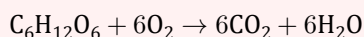
Celotna reakcija je endotermna, če je končna entalpija sistema višja od začetne ($\Delta H > 0$) in eksotermna, če je končna entalpija nižja od začetne ($\Delta H < 0$). Videli bomo, da nam Hessov zakon lahko pride zelo prav pri obravnavanju zapletenejših reakcij.

Prostornina tekočin in trdnih snovi se med reakcijami ne spreminja veliko, zato je za njih sprememba entalpije kar približno enaka spremembi notranje energije, $\Delta H \approx \Delta W_n$. Razlike med obema količinama pa nikakor ne moremo zanemariti, če v reakcijah nastopajo plini.

Čeprav je entalpija na prvi pogled še bolj abstrakten pojem od energije, pa ima veliko praktično vrednost. Spremembe notranje energije namreč ni vedno enostavno izmeriti, saj za merjenje dela ni preproste univerzalne metode. Po drugi strani lahko spremembo entalpije brez težav izmerimo s kalorimetrom. Za mnoge spojine so nam spretni kemiki že izmerili t. i. standardno tvorbeno entalpijo formacije, to je spremembo entalpije ob formaciji enega mola spojine iz osnovnih spojin pri standardnih pogojih (standardne vrednosti v kemiji pogosto označijo s simbolom $^\circ$, standardno tvorbeno entalpijo tako označimo z ΔH_t°). Če poznamo standardne entalpije formacije za reaktante in produkte, lahko spremembo entalpije za neke zapletenejšo reakcijo brez težav izračunamo in predvidimo, ne da bi sploh izvedli eksperiment (primer 13.5). Tvorba kemijskih vezi je ponavadi eksotermni proces, saj se ob vezavi dveh delcev zniža njuna interakcijska energija (spomnimo se slike 4.3B), tako sproščena energija pa se nato v okolico sprosti v obliki toplote.

Primer 13.5: uporaba entalpije v praksi

Poglejmo, ali znamo izračunati, koliko toplote se sprosti pri gorenju snovi, ne da bi si morali ob tem opeči prste. Toploto izračunajmo za gorenje glukoze in se hkrati spomnimo, da se enaka količina energije sprosti tudi med metabolizmom glukoze v naših telesih, saj so reaktanti in produkti reakcije v obeh primerih enaki. Pri gorenju glukoze poteka naslednja reakcija:



V tabelah najdemo naslednje podatke za standardno tvorbeno entalpijo enega mola naših reaktantov in produktov:

spojina	$\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$	O_2	CO_2	H_2O
$\Delta H_t^\circ [\text{kJ/mol}]$	-1273,3	0	-393,5	-285,8

Standardna tvorbeno entalpija kisika je nič, saj je kisik že osnovna spojina. Spremembo entalpije pri gorenju dobimo, če izračunamo razliko med standardno tvorbeno entalpijo produktov in reaktantov, pri čemer upoštevamo, da v reakciji nastopa šest molov ogljikovega dioksida in šest molov vode:

$$\text{produkti: } -6 \cdot 393,5 \text{ kJ} - 6 \cdot 285,8 \text{ kJ} = -4075,8 \text{ kJ}$$

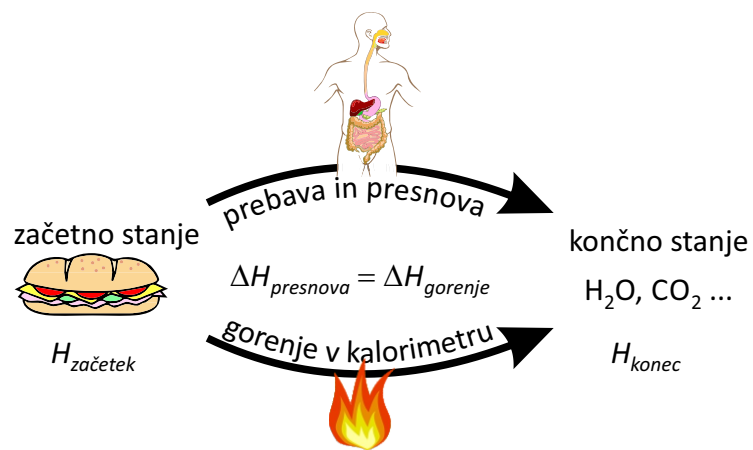
$$\text{reaktanti: } -1273,3 \text{ kJ} - 6 \cdot 0 \text{ kJ} = -1273,3 \text{ kJ}$$

$$\text{razlika: } -2802,5 \text{ kJ}$$

Pri gorenju enega mola glukoze (tj. približno 180 g) pri standardnih pogojih se torej sprosti približno 2803 kJ toplote, kar zadošča za segretje 10 litrov vode za približno 67 K! Do enake številke bi seveda prišli tudi, če bi oddano toploto pri standardnih pogojih izmerili v kalorimetru. V praksi pri gorenju produkti ne nastajajo pri standardnih pogojih ampak končajo pri precej višji temperaturi, pa tudi voda je na koncu v plinastem in ne v tekočem stanju. V praksi bi torej pri gorenju glukoze dobili malo manj toplote, saj se je nekaj porabi za segrevanje in izhlapevanje vode. Primerjava standardnih tvorbenih entalpij s termično energijo (primer 13.1) nam pove, da je v kovalentnih vezeh spravljeno res veliko energije.

Zgornji razmisleki so nepogrešljiv del razumevanja fizioloških in biokemijskih procesov v telesu. Uporabimo jih npr. pri določanju kalorične vrednosti hrane. Ko hrano pojemo, jo telo razgradi in uporabi s pomočjo zapletenih biokemijskih mehanizmov prebave in presnove. Pri določanju njene energijske vrednosti na srečo ni potrebno slediti vsem tem procesom, ampak le primerjati začetno in končno stanje sistema (slika 13.5). Vemo, da se hrana s presnovo spremeni v glavnem v CO_2 , vodo in pa ostanke ostalih snovi. Če bi hrano zažgali, bi prišli do praktično enakega končnega stanja. Energijsko vrednost hrane lahko torej enostavno določimo tako, da jo zažgemo v kalorimetru in izmerimo, koliko toplote se je pri tem sprostil. Pri tem moramo le upoštevati, da so v hrani tudi snovi, ki jih naše telo ne more prebaviti, pri gorenju pa vseeno oddajajo toploto (t. i. vlaknine, npr. celuloza). V praksi so tako v kalorimetru izmerili le povprečne kalorične vrednosti glavnih prebavljivih snovi (ogljikovi hidrati, proteini, maščobe ipd.), energijsko vrednost hrane pa določijo preko merjenja vsebnost teh snovi v določeni hrani (primer 13.6).

Na koncu opozorimo še na majhno past, v katero se pogosto ujamemo med razmišljanjem o energijski vrednosti hrane. Pogosto se nam namreč zdi, da je energija v hrani »shranjena« v kemijskih vezeh hranil (in da se tja s pomočjo fotosinteze »spravi« energija s Sonca). V primeru 13.5 pa smo spoznali, da je resnica ravno obratna – kemijske vezi predstavljajo »negativno« energijo, saj moramo za pretrganje vezi energijo vložiti (trganje vezi je endotermna reakcija). Odgovor na ta navidezen paradoks je enostaven: energijo iz hrane seveda dobimo šele, ko se atomi hrane vežejo s kisikom in tako ustvarjajo še več novih vezi!



Slika 13.5: Tako prebava in presnova kot gorenje spremenita hrano iz istega začetnega v isto končno stanje (vodno paro, ogljikov dioksid ter druge ostanke) zato bo sprememba entalpije v obeh primerih enaka, $\Delta H_{\text{presnova}} = \Delta H_{\text{gorenje}} = H_{\text{konec}} - H_{\text{začetek}}$. Energijsko vrednost prebavljive hrane lahko zaradi tega izmerimo kar s kalorimetrično meritvijo spremembe entalpije pri gorenju (tj. oddane toplote pri gorenju).

Primer 13.6: kalorije

Kalorija je stara enota za energijo, ki so jo izbrali tako, da 1 cal ustreza toploti, ki 1 g vode segreje za 1 °C. S pomočjo našega znanja kalorimetrije (en. 13.6) znamo takoj izračunati povezavo med kalorijami in jouli: $1 \text{ cal} = 4,184 \text{ J}$. Iz zgodovinskih razlogov se kalorije še vedno pogosto uporablja, včasih celo kot sinonim za energijo (beseda kalorija izvira iz latinske besede za toploto). Pri nas kalorije največkrat srečamo v povezavi z energijsko vrednostjo hrane, pri tem pa moramo biti pozorni, saj se (predvsem v anglosaški literaturi) za kilokalorijo uporablja kalorija z veliko začetnico $1 \text{ Cal} = 1 \text{ kcal}$.

Tabela prikazuje kalorično vrednost glavnih sestavin hrane (povzeto po [3]). Izmerimo jo kot toploto, ki se pri zažigu sprosti v kalorimetru in torej opisuje spremembo entalpije pri reakciji $\text{hrana} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} + \text{ostanki}$. V praksi vsake hrane ni potrebno zažgati, ampak ji z biokemijsko analizo določimo vsebnost osnovnih sestavin ter s pomočjo tabele izračunamo skupno energijsko vrednost.

snov	kJ/g	kcal/g
ogljikovi hidrati	17	4
proteini	17	4
etanol	29	7
maščobe	37	9

Čeprav je kalorična vrednost eden osnovnih kvantitativnih parametrov hrane, pa se pri dietah nanjo ne moremo preveč zanašati. Delež prebavljene hrane je namreč zelo odvisen od situacije in človeka, zato s štetjem kalorij ne dobimo nujno natančne informacije o količini energije, ki jo dobimo s hrano. Za povprečnega človeka je torej namesto znanstvenega preštevanja zaužitih kalorije bolj pomembno, da sledi nasvetom babic: jesti je treba raznoliko hrano v zmernih količinah in se veliko gibati! Mimogrede: prvi strastni preštevalec »kalorij« je bil Santorio Santorio, ki smo ga srečali že pri prvih termometrih.

Poglavje 14

Entropija in drugi zakon termodinamike

Nekatere stvari se v naravi spontano ne zgodijo, pa čeprav ne kršijo prvega zakona termodinamike. Skakanje košarkarske žoge po tleh s časom vedno zamre, mirujoča žoga pa iz tal nikoli ne posea toplote in začne skakati, pa čeprav bi se lahko celotna energija tudi pri tem procesu ohranjala. Očitno se nekatere pretvorbe energije lahko zgodijo spontano, druge pa ne.

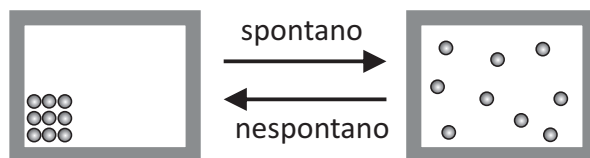
Vprašanje spontanosti procesov je pravzaprav eno osrednjih vprašanj znanosti. Od nekdanj so se fiziki, kemiki, biologi, inženirji, pa tudi filozofi spraševali, zakaj se nekatere stvari zgodijo spontano, druge pa ne? Šele v drugi polovici 19. stoletja je postalo jasno, da so vsa ta vprašanja povezana s količino, ki jo danes imenujemo *entropija*, ter z njo povezano temeljno zakonitostjo narave, ki ji danes rečemo *drugi zakon termodinamike*. Zaradi svojega malce skrivnostnega imena in abstraktne definicije entropija še danes marsikomu buri domišljijo. Tudi mi ne bomo mogli raziskati vseh njenih skrivnosti, kljub temu pa si bomo lahko tudi s svojim znanjem fizike pridobili nekaj osnovne intuicije o smeri poteka spontanih sprememb v naravi.

14.1 Spontanost procesov in preprost pogled na entropijo

Za začetek našega spoznavanja z entropijo si pogledjmo preprost idealiziran primer. Plin naj bo na začetku stisnjen v kot izolirane posode, nato pa ga prepustimo samega sebi. Vsi vemo, da se v tem primeru plin spontano razširi po vsej razpoložljivi prostornini posode (slika 14.1). Obraten proces se spontano

ne zgodi nikoli, pa čeprav sta s stališča energije procesa v obe smeri ekvivalentna (v obeh primerih ni nobene izmenjave energije z okolico).

S spontanost procesov je povezana njihova obrnljivost - *neobrnljivi procesi* lahko spontano potekajo le v eni smeri, *obrnljivi procesi* pa lahko spontano potekajo v obeh smereh. Razširjanje plina v prazen prostor je očitno neobrnljivo. Če smo zelo natančni, ugotovimo, da je pravzaprav večina naravnih procesov bolj ali manj neobrnljivih, obrnljivi pa so le zelo idealizirani procesi. Približek obrnljivih procesov so procesi, pri katerih lahko notranje in zunanje trenje zanemarimo, ali pa dovolj počasni procesi, ki potekajo preko samih ravnovesnih stanj, npr. počasno segrevanje ali ohlajevanje sistema.

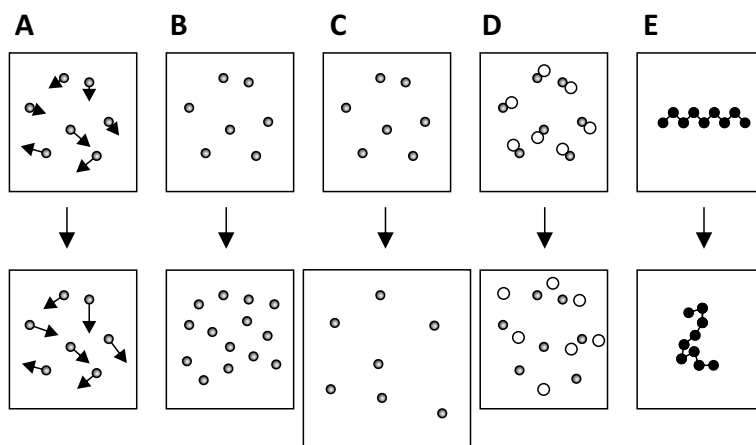


Slika 14.1: Spontani in nespontani procesi. Če je plin na začetku stisnjen v kot posode in ga nato izoliranega od okolice prepustimo samega sebi, se bo spontano razširil po vsem prostoru. Obraten proces se spontano ne zgodi nikoli, saj se plin sam od sebe nikoli ne pospravi v kot posode. Pravimo tudi, da je širjenje plina v prazen prostor neobrnljiv proces. Seveda pa lahko plin nazaj v kot posode pospravimo »nespontano,« z opravljanjem dela od zunaj, npr. da ga v kot stisnemo z batom.

Spontanosti procesov ni mogoče razložiti zgolj na osnovi Newtonove fizike in prvega zakona termodinamike, saj Newtonove enačbe enako dobro delujejo tudi, če v enačbah obrnemo smer časa. S stališča drugega Newtonovega zakona lahko proces s slike 14.1 enako dobro poteka v obe strani. Po dolgih letih raziskovanja je šele proti koncu 19. stoletja postalo jasno, da je za opisovanje spontanosti naravnih procesov ključna količina, ki jo danes imenujemo *entropija* in je ena od lastnosti termodinamskih sistemov, podobno kot so to masa, gostota, notranja energija in entalpija.

Natančna formulacija entropije ni enostavna (znamenita Boltzmanova formulacija entropije je predstavljena v primeru 14.1), na srečo pa obstaja tudi preprost pogled na entropijo, ki bo za naše potrebe pogosto povsem zadoštevajoč. Ta pravi, da je entropija merilo za »neurejenost« sistema. Entropija sistema je tem večja, čim bolj je sistem neurejen. Čeprav »neurejenost sistema« v splošnem ni dobro definiran pojem, nam bo pri razumevanju entropije v veliko pomoč intuicija. V našem preprostem primeru s slike 14.1 je plin v posodi bolj neurejen, če se lahko molekule svobodno gibljejo po vsem prostoru.

ru, kot če je "pospravljen" na eno stran posode. Podobno si lahko intuitivno sliko entropije ustvarimo tudi za druge pogoste fiziološke in biokemijske procese. Slika 14.2 prikazuje nekaj tipičnih sprememb, pri katerih nam analogija z neurejenostjo pomaga pri ocenjevanju entropije sistema.



Slika 14.2: Nekaj pogostih primerov sprememb, pri katerih se poveča entropija oz. neurejenost sistema. **A)** Entropija se poveča, če povečamo temperaturo in so molekule podvržene večjemu termičnemu gibanju. **B)** Entropija sistema se poveča, če vanj dodamo nove molekule. **C)** Entropija sistema se poveča, če povečamo prostor, po katerem se lahko gibljejo molekule. **D)** Entropija se ponavadi poveča, ko večje molekule razpadejo na manjše. **E)** Pri velikih makromolekulah je entropija večja, če se lahko neurejeno zvijajo sem ter tja, manjša pa če imajo natančno določeno obliko.

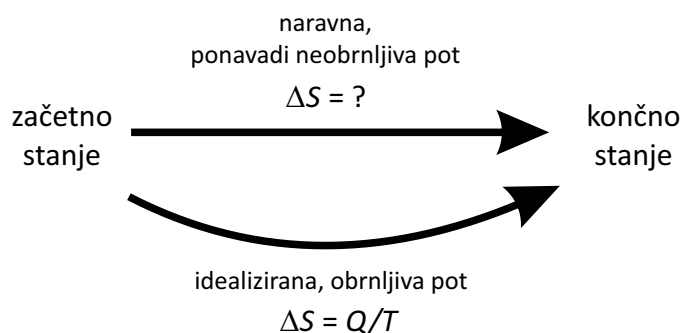
14.2 Izmenjevanje toplote in sprememba entropije

Kot smo videli, je entropija tesno povezana z neurejenostjo sistema. Pojem neurejenosti smo prvič srečali pri vpeljavi toplote, ki smo jo opisali kot neurejeno prehajanje notranje energije med sistemi. Ugibamo lahko, da se sistemu entropija poveča, če mu dovedemo toploto in s tem povečamo neurejeno termično gibanje v sistemu. Natančnejša analiza pokaže, da je pri obrnljivih procesih sprememba entropije sistema enaka razmerju med dovedeno toploto in temperaturo, pri kateri je bila toplota dovedena:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \quad (\text{velja za obrnljive procese}) \quad (14.1)$$

Intuitivno lahko razumemo razlog, da je v zgornji enačbi temperatura v imenovalcu: če je temperatura sistema nizka, mu lahko že majhna količina toplote precej poveča neurejenost, če pa je temperatura visoka, je neurejenost že tako ali tako velika in jo dodatna toplota le še malo poveča. Opozorimo naj še, da zgornja enačba velja le, če je med dovajanjem toplote temperatura sistema konstantna. Če se temperatura spreminja, moramo spremembo entropije izračunati s pomočjo integrala $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$.

Spremembo entropije lahko s pomočjo zgornje enačbe računamo le za obrnljive procese. To so idealizirani procesi, ki potekajo počasi in le preko ravnovesnih stanj. Povedali smo že, da naravni procesi iz nekega začetnega v neko končno stanje ponavadi potekajo po neobrnljivih poteh. Zgornjo enačbo pa lahko uporabimo tudi v takih primerih, le zamisliti si moramo počasen obrnljiv proces, ki vodi iz istega začetnega v isto končno stanje in vzdolž njega po zgornji enačbi izračunati spremembo entropije. Ker je entropija odvisna le od stanja sistema in ne od poti, je sprememba entropije po obrnljivi poti natanko enaka spremembi po neobrnljivi poti.



Slika 14.3: Sprememba entropije je odvisna le od začetnega in končnega stanja sistema, ne pa od poti, po kateri se je sistem spreminjal. Veliko naravnih procesov je neobrnljivih, zato za njih spremembe entropije ne moremo izračunati neposredno po enačbi 14.1. Spremembo entropije za take procese izračunamo tako, da si zamislimo idealiziran obrnljiv proces, ki pripelje iz istega začetnega do istega končnega stanja in spremembo entropije izračunamo vzdolž te poti, po enačbi 14.1.

Kot primer si pogledajmo razpenjanje plina v prazen prostor s slike 14.1. Proces je spontan in nereverzibilen, saj poteka preko očitno neravnovesnih

stanj. Za izračun spremembe entropije pri tem procesu torej enačba 14.1 ni neposredno uporabna (če bi jo uporabili, bi dobili napačen rezultat in sicer, da je sprememba entropije pri tem procesu enaka nič, saj je sistem izoliran in ne izmenja nobene toplote z okolico, $Q = 0$). Po drugi strani si lahko zamislimo reverzibilen proces, ki vodi iz istega začetnega v isto končno stanje. V našem primeru je tak proces kar počasno izotermno razpenjanje plina, za katerega pa je enačba 14.1 neposredno uporabna. Pri izotermnem razpenjanju plina le ta prejme toliko toplote, kot odda dela (slika 13.4). To toploto zato znamo izračunati:

$$Q = -A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = Nk_B T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = Nk_B T \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (14.2)$$

kjer sta V_1 in V_2 začetna in končna prostornina, N je število molekul plina, k_B pa je Boltzmannova konstanta (pri računu smo si pomagali tako, da smo tlak izrazili s plinsko enačbo, $p = Nk_B T/V$). Sprememba entropije pri razpenjanju idealnega plina pri konstantni temperaturi bo torej

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = Nk_B \ln \frac{V_2}{V_1} = -Nk_B \ln \frac{p_2}{p_1}, \quad (14.3)$$

kjer smo v zadnjem enačaju uporabili plinsko enačbo pri stalni temperaturi ($V_1/V_2 = (p_1/p_2)^{-1}$). Sprememba entropije ni odvisna od poti ampak le od začetnega in končnega stanja sistema, zato enačba 14.3 velja tako pri razpenjanju v prazen prostor, ki je prikazano na sliki 14.1, kot tudi pri izotermnem razpenjanju.

Pri spontanem razpenjanju plina v prazen prostor je sistem sicer izoliran ($Q = 0$), a se je entropija vseeno povečala (glej en. 14.3, ker je $V_2 > V_1$, je $\ln V_1/V_2 > 0$). Izkaže se, da se entropija pri spontanem procesu vedno poveča za več, kot bi napovedala enačba 14.1. Za vse neobrnjive (spontane) procese lahko tako v splošnem zapišemo:

$$\Delta S > \frac{Q}{T} \quad (\text{velja za neobrnjive procese}) \quad (14.4)$$

V zgornji enačbi se že kaže drugi zakon termodinamike.

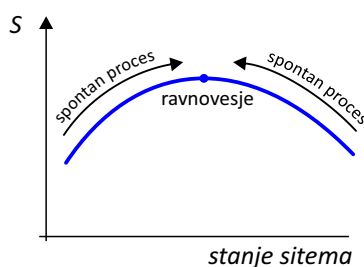
14.3 Drugi zakon termodinamike

Čeprav smo si entropijo do sedaj ogledovali le na zelo preprostih sistemih, opisane lastnosti veljajo pri vseh, še tako zapletenih makroskopskih sistemih.

Prišli smo dovolj daleč, da lahko z besedami zapišemo znameniti drugi zakon termodinamike:

Od okolice izoliran sistem se lahko spontano spreminja le tako, da se mu entropija povečuje. Ko entropija doseže največjo možno vrednost, sistem doseže ravnovesje.

Grafična ponazoritev drugega zakona termodinamike je prikazana na sliki 14.4.



Slika 14.4: Drugi zakon termodinamike pravi, da pri spontanah procesih v izoliranih sistemih entropija le narašča. Sistem doseže ravnovesje, ko entropija doseže največjo možno vrednost.

Poudarimo naj, da drugi zakon ne pravi, da se entropija sistemu ne more zmanjšati. Zakon velja le za povsem izolirane sisteme. Če sistem ni izoliran, mu lahko entropijo zmanjšamo, če iz njega odvedemo toploto oz. ga ohladimo ($Q < 0$, En. 14.1).

Zgornja oblika drugega zakona je le ena od možnih interpretacij. Pogosto zakon povejo tudi tako, da se entropija vesolja lahko le povečuje (vesolje je "izoliran sistem," zato je ta formulacija v skladu zgoraj). Mogoče je tudi pokazati, da iz drugega zakona sledi, da termične energije oz. toplote ne moremo v celoti pretvoriti v uporabno delo.

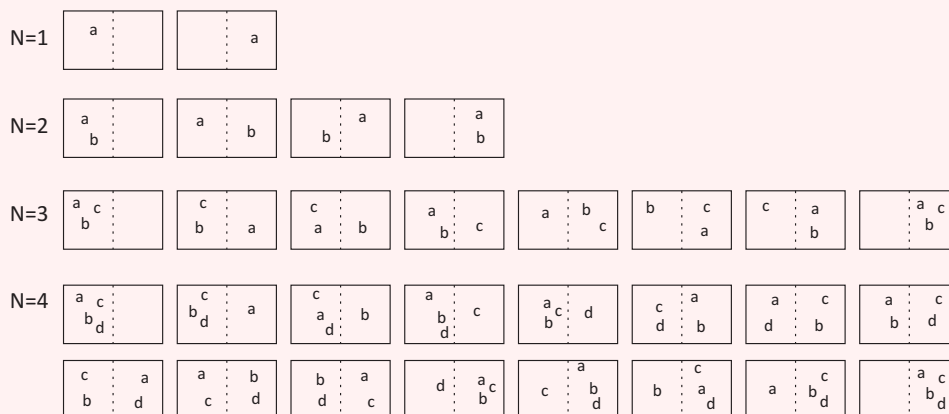
V tem poglavju smo vzpostavili prvi stik z entropijo in drugim zakonom termodinamike, njuno uporabnost pri razumevanju biokemijskih in fizioloških procesov pa bomo spoznali v naslednjem poglavju.

Primer 14.1: Mikroskopski pogled na entropijo

Zanimiv pogled na obrnljivost procesov, ravnovesje in entropijo se nam odpre, če raziščemo, kaj se z našim idealiziranim sistemom, plinom v posodi (slika 14.1), dogaja na molekularnem nivoju.

Molekule plina v posodi zaradi svojega termičnega gibanja tavajo naokoli in čeprav so

na začetku vse v enem kotu, slej ko prej zapolnijo ves dostopni prostor. Ker po prostoru tavajo povsem naključno, v dolgem času za vsako molekulo velja, da je v povprečju pol časa na eni strani posode, pol časa pa na drugi strani. Če bi imeli v posodi le eno molekulo, bi bila desna polovica posode polovico časa prazna, polovico časa pa polna. Zanimivo postane, ko v posodo dodajamo več molekul. Spodnja slika prikazuje vse možne mikroskopske razporeditve molekul plina pri različnih številih molekul v posodi (od $N = 1$ do $N = 4$, molekule označujemo z a, b, c in d).



V idealnem plinu se vsaka molekula giblje povsem naključno in neodvisno od ostalih, zato so vse razporeditve mikroskopske enako verjetne. Pri dveh molekulah v posodi so možne razporeditve štiri, desna stran posode pa je popolnoma prazna v $1/4$ vseh možnih razporeditev oz. eno četrtno časa. Pri $N = 3$ je desna stran posode prazna v $1/8$, pri $N = 4$ pa le še v $1/16$ vseh možnih razporeditev. Vidimo, da so v sistemu z N molekulami vse molekule hkrati na na levi strani posode v povprečju $1/2^N$ časa. Ker je N v termodinamskih sistemih zelo velik, je jasno, da se v praksi molekule ne bodo nikoli vse hkrati znašle na levi strani posode (za vajo lahko izračunate delež časa, ko so v sistemu s 1000 molekulami vse molekule hkrati na levi strani sistema? Koliko sekund bi bile vse hkrati na levi strani, če bi jih opazovali vso starost vesolja, ki je približno $4 \cdot 10^{17}$ s?).

Pogled na različne mikroskopske razporeditve molekul po prostoru nam tudi razkrije, da je največ razporeditev ravno takih, pri katerih je polovica molekul na eni, polovica pa na drugi strani posode (pri velikem številu molekul je vseh drugih stanj zanemarljivo malo). Ravnovesno stanje je torej ravno tisto makroskopsko stanje sistema, ki je najverjetnejše! Čeprav se mikroskopska slika sistema neprestano spreminja, saj posamezne molekule potujejo sem ter tja, bo sistem večino časa preživel v mikroskopskih stanjih, ki ustrezajo ravnovesnemu makroskopskemu stanju, se pravi stanju s polovico molekul na eni in polovico molekul na drugi strani. Če bi bili zelo natančni, bi sicer opazili, da je tudi v ravnovesju vsake toliko kakšna molekula več na eni kot na drugi strani posode, a so ta nihanja (fluktuacije) okoli ravnovesja v velikih sistemih zelo majhna (pokazati je mogoče, da so relativna povprečna odstopanja od ravnovesja obratno sorazmerna kvadratnemu korenu števila delcev v sistemu, $1/\sqrt{N}$).

Povezavo med verjetnostjo nekega makroskopskega stanja in ravnovesjem sistema je v drugi polovici 19. stoletja odkril Ludwig Boltzmann. Ugotovil je tudi, da je možno

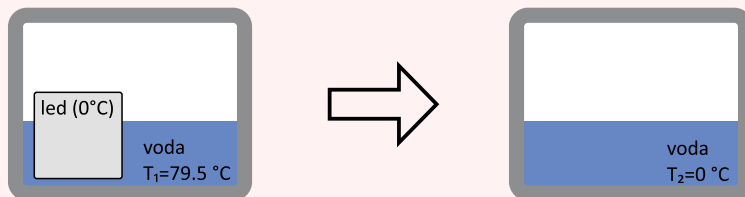
vpeljati količino, ki je dobra mera za zgoraj opisane lastnosti termodinamskih sistemov. Ta količina je ravno *entropija* in jo po Boltzmannu zapišemo z znamenito enačbo:

$$S = k_B \ln \Omega \quad (14.5)$$

kjer je s S označena entropija sistema, k_B je Boltzmannova konstanta, Ω pa je število različnih mikroskopskih stanj, ki ustrezajo danemu makroskopskemu stanju sistema. Boltzmannova enačba za entropijo (En. 14.5) je sicer elegantna, a si je Ω težko predstavljati, kaj šele z njo računati. Enačbo smo napisali zgolj zato, ker je ena najbolj enostavnih formulacij entropije, v praksi pa z njo ne bomo računali. Po drugi strani lahko skozi Boltzmannovo enačbo vidimo eno pomembnejših lastnosti entropije: entropija je ena od lastnosti makroskopskega sistema, dva sistema, ki sta enaka, imata torej tudi enako entropijo. Če se sistem spreminja, je sprememba entropije odvisna le od njegovega začetnega in končnega stanja, ne pa od poti, po kateri se je sistem spremenil.

Primer 14.2: sprememba entropije pri izmenjevanju toplote

Za vajo si na preprostem primeru pogledimo, kako izračunati spremembe entropije sistema pri izmenjevanju toplote, npr., ko v izolirani posodi zmešamo 100 g ledu s temperaturo 0°C s 100 g vode s temperaturo $79,5^\circ\text{C}$ (količine smo izbrali tako, da se bo pri tem procesu stopil ravno ves led, končna temperatura v posodi pa bo 0°C).



Za začetek si moramo opisati, kaj se med procesom dogaja: toplota bo prehajala iz vroče vode v led, voda se bo pri tem ohlajala, led pa se bo stalil. V ravnovesju ob koncu procesa bo povsod v posodi enaka temperatura.

Najprej pogledimo, kaj se med procesom dogaja s toploto. Posoda izolirana, zato se z okolico ne izmenjala nič toplote. Toplota, ki jo prejme led, je zato enaka toploti, ki jo odda vroča voda:

$$Q_{led} = Q_{voda}$$

Toplota, ki jo prejme led, da se stali, je

$$Q_{led} = m_{led} q_t = 0,1 \text{ kg} \cdot 334 \text{ kJ/kg} = 33,4 \text{ kJ} ,$$

toplota, ki jo odda vroča voda, da se ohladi na 0°C , pa je

$$Q_{voda} = m_{voda} c \Delta T = \frac{0,1 \text{ kg}}{\text{kg K}} \frac{4,2 \text{ kJ}}{\text{kg K}} \frac{79,5 \text{ K}}{\text{K}} = 33,4 \text{ kJ}$$

Vidimo, da sta obe toploti enaki in je zato končna ravnovesna temperatura mešanice zares 0°C (natanko vsa toplota, ki jo je oddala voda, se je porabila za taljenje ledu). Sedaj si pogledajmo še, kaj se med procesom dogaja z entropijo. Posoda je izolirana in z okolico ne izmenjuje toplote ($Q = 0$), proces pa je neobrnjiv (voda z 0°C se nikoli spontano ne razdeli v led in vročo vodo), zato velja (en. 14.4):

$$\Delta S > \frac{Q}{T} = 0.$$

Skladno z drugim zakonom termodinamike se pri spontanem procesu v izoliranem sistemu entropija poveča, a s pomočjo neenačbe žal ne moremo izračunati, kolikšno je to povečanje. Pomagamo si tako, da najdemo obrnljivo pot, ki vodi iz začetnega v končno stanje. V našem primeru je najpreprostejša obrnljiva pot naslednja: led počasi stalimo, vročo vodo pa počasi ohladimo na 0°C (oba procesa sta obrnljiva, saj sta obratna procesa, počasno zmrzovanje in počasno segrevanje vode, potekata preko enakih stanj in sta prav tako mogoča). Končno stanje je enako kot v našem primeru, tj. dobimo skupno 200 g vode pri 0°C . Celotna sprememba entropije v posodi bo torej enaka vsoti spremembe entropije ledu pri taljenju ter spremembe entropije pri ohlajanju vroče vode:

$$\Delta S = \Delta S_{led} + \Delta S_{voda}.$$

Počasno obrnljivo taljenje ledu poteka pri stalni temperaturi, zato lahko spremembo entropije pri tem procesu izračunamo tako, da v en. 14.1 vstavimo toploto, ki jo je led sprejel

$$\Delta S_{led} = \frac{Q_{led}}{T} = \frac{33,4 \text{ kJ}}{273 \text{ K}} = 122 \text{ J/K}.$$

Led je toploto sprejel, zato se mu je entropija seveda povečala. Entropijo vode je težje izračunati, saj se temperatura vode med njenim ohlajanjem neprestano spreminja zato ne moremo uporabiti enačbe 14.1 ampak si moramo pomagati z integralom (sešteti moramo majhne deleže toplote dQ_{voda} , ki jih je voda oddala pri različnih temperaturah od $T_1 = 352,5 \text{ K}$ do $T_2 = 273 \text{ K}$):

$$\begin{aligned} \Delta S_{voda} &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ_{voda}}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m_{voda} c dT}{T} = m_{voda} c (\ln T_2 - \ln T_1) = \\ &= m_{voda} c \ln \frac{T_2}{T_1} = 0,1 \text{ kg} \cdot 4200 \text{ J/kgK} \cdot \ln \frac{273 \text{ K}}{352,5 \text{ K}} = -107 \text{ J/K}. \end{aligned}$$

pri čemer smo v drugem koraku zgornjega računa upoštevali, da je majhen delež toplote, ki jo voda odda pri določeni temperaturi, sorazmeren majhni spremembi temperature: $dQ_{voda} = m_{voda} c dT$. Rezultat zgornjega računa se sklada z našo predstavo o entropiji: voda je toploto oddala in zato se ji je entropija zmanjšala. Celotna sprememba entropije v posodi je torej:

$$\Delta S = \Delta S_{led} + \Delta S_{voda} = 122 \text{ J/K} - 107 \text{ J/K} = 15 \text{ J/K}.$$

Čeprav je voda oddala toliko toplote, kot je je led sprejel, je voda toploto oddajala pri višji temperaturi, kot jo je led sprejemal, zato se ji je entropija zmanjšala manj, kot se je ledu povečala. Celotno povečanje entropije v posodi je zato v skladu z drugim zakonom termodinamike pozitivno

Poglavje 15

Osnove termodinamike fizioloških procesov

Drugi zakon termodinamike nam lahko neposredno razloži in napove obnašanje izoliranih sistemov, tj., kako se bodo spreminjali (proti večji entropiji) in kdaj bodo dosegli ravnovesje (ko bo entropija dosegla največjo možno vrednost). A živa bitja niti približno nismo izolirani sistemi, prav nasprotno, ponavadi živimo v toplotnem stiku z okolico pri dani temperaturi. Kako nam lahko torej drugi zakon termodinamike pomaga pri razumevanju procesov v naših pogojih, se pravi v neizoliranih sistemih pri danem tlaku in temperaturi?

V zadnjem poglavju termodinamike bomo počasi začeli graditi most med fiziko in biologijo ter končno spoznali, kako lahko prvi in drugi zakon termodinamike združimo in uporabimo za razumevanje biokemijskih in fizioloških procesov. V ta namen bomo morali najprej vpeljati novi količini *prosto entalpijo* in z njo povezan *kemijski potencial*. Nato so bomo s pomočjo preprostih primerov o novih pojmi pridobili osnovno intuicijo ter jih na koncu uporabili za razlago nekaterih fiziološko pomembnih pojavov, kot so osmozni tlak, hlapenje vode in raztapljanje plinov.

15.1 Prosta entalpija in ravnovesje pri fizioloških pogojih

Vprašanje, kako si drugim zakonom termodinamike pomagati pri fizioloških pogojih, tj. pri danem tlaku in dani temperaturi, je v drugi polovici 19. stoletja razvozlal ameriški znanstvenik Josiah Willard Gibbs. Ugotovil je, da je za ob-

našanje takih sistemov merodajna količina, ki povezuje entalpijo in entropijo. To količino imenujemo *prosta entalpija*¹ in jo definiramo kot

$$G = H - TS, \quad (15.1)$$

kjer je G prosta entalpija sistema, H je entalpija sistema, S entropija sistema, T pa temperatura sistema. Ker so H , T in S funkcije stanja sistema, enako velja tudi za G .

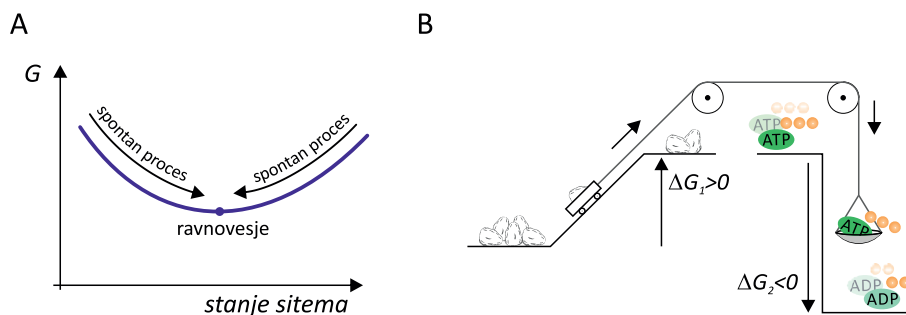
Uporabnost proste entalpije se nam razjasni, ko izračunamo njeno spremembo za spontane procese. Pri danem tlaku in temperaturi, je sprememba proste entalpije odvisna le od spremembe entalpije in entropije, $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$. Ker je sprememba entalpije enaka toploti, hkrati pa za spontane procese velja $\Delta S > Q/T$ (en. 14.4), se lahko pri spontanah procesih prosta entalpija le manjša,

$$\Delta G < 0, \quad (15.2)$$

Če je nek sistem prepuščen sam sebi, bodo lahko v njem spontano stekli le taki procesi, pri katerih se bo prosta entalpija sistema zmanjšala. Ko se prosta entalpija ne bo več mogla manjšati, bo sistem dosegel ravnovesje (slika 15.1A). Pri delitvi reakcij glede na spremembo entalpije smo srečali endo- in eksotermne reakcije, analogno pa pri prosti entalpiji govorimo o *endergonskih* ($\Delta G > 0$) in *eksergonskih* ($\Delta G < 0$) reakcijah.

Pazljivi bralec že razmišlja o osrednjem vprašanju biokemije: če lahko spontano stečejo le eksergonski procesi, kako se lahko potem sploh zgodijo tudi endergonski procesi? Odgovor na to vprašanje nas pripelje v samo v osrčje skrivnosti življenja: vsa zanimiva raznolikost narave okoli nas je namreč mogoča, ker je evolucija iznašla načine, kako sicer endergonske procese sklopiti z zelo eksergonskimi. Celotna sprememba proste entalpije sklopljenega procesa je na koncu še vedno negativna, zaradi česar je proces »spontano« izvedljiv po vseh strogih zakonih termodinamike. Znamenita taka sklopitev v biokemiji je sklopitev s hidrolizo ATP, ki je zelo eksergonska reakcija (slika 15.1B). Dvig šolske torbe s tal na mizo je npr. očiten endergonski proces (torba spontano nikoli ne skoči s tal na mizo), ki pa se vseeno zgodi, ko torbo primemo z roko in jo dvignemo na mizo. Ko šolsko torbo dvignemo s tal, se torbi sicer poveča prosta entalpija, a hkrati se sprosti še veliko več proste entalpije s hidrolizo ATP v naših mišicah, tako da je celotna sprememba proste

¹V tuji literaturi prosto entalpijo včasih imenujejo tudi *Gibbs energy* ali kar *free energy*.

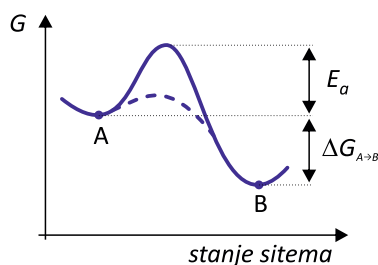


Slika 15.1: **A)** Prosta entalpija (G) je količina, ki usmerja fiziološke in biokemijske procese pri dani temperaturi in danem tlaku. Spontano lahko potečejo le procesi, pri katerih se prosta entalpija sistema manjša (t. i. *eksergonski procesi*, $\Delta G < 0$), ne pa tudi procesi pri katerih se prosta entalpija večja (t. i. *endergonski procesi*, $\Delta G > 0$). Proces v sistemu poteka toliko časa, dokler prosta entalpija ne doseže najmanjše možne vrednosti. Takrat sistem doseže ravnovesje. **B)** Endergonski procesi lahko stečejo le, če so sklopljeni z zelo eksergonskim procesom in sicer tako, da je celotna sprememba proste entalpije sistema negativna ($\Delta G_1 + \Delta G_2 < 0$). Hidroliza ATP je tipičen eksergonski proces, ki poganja endergonske procese v živih bitjih.

entalpije sistema pri tem negativna in se proces lahko zgodi.

Prosta entalpija ima za termodinamske sisteme pri danem tlaku in temperaturi podobno vlogo, kot jo ima potencialna energija v mehanskih sistemih, zato pravimo, da je prosta entalpija *termodinamski potencial*. To analogijo si je vredno zapomniti, saj nam olajša predstavo o marsikaterem zapletenem termodinamskem procesu. Podobno kot kroglica na klancu, se lahko npr. tudi termodinamski sistem znajde v lokalnem ravnovesju, ki ga od stanja s še nižjo prosto entalpijo loči visoka energijska prepreka (slika 15.2B), ki je z naključnim termičnim gibanjem ne more enostavno preskočiti. Skozi evolucijo je narava za take situacije razvila celo vrsto encimov, ki lahko biokemijske reakcije kljub visoki energijski prepreki popeljejo v globalni minimum proste entalpije (predstavljamo si lahko npr. da reakcijo popeljejo po poti okoli visoke prepreke).

Opisani mehanizem je eden glavnih mehanizmov regulacije biokemijskih reakcij. Če bi bila za potek kemijske reakcije pomembna le razlika med začetno in končno prosto entalpijo, bi nam ATP spontano takoj hidroliziral v ADP, ki ima manjšo prosto entalpijo in je zato bolj stabilen. K sreči pa je med ATP in ADP visoka energijska prepreka, ki je brez ustreznih encimov ne moremo prečiti. ATP je tako zelo uporabna »zaloga« energije, katere porabo lahko z



Slika 15.2: Potrebni pogoj, da lahko pri dani temperaturi in danem tlaku steče nek proces je, da je na koncu prosta entalpija nižja kot na začetku. V ravnovesju ima prosta entalpija najmanjšo možno vrednost. Podobno kot mehanski sistem, se lahko tudi termodinamski sistem ujame v lokalnem minimumu (točka *A*) kjer jo od globalnega minimuma (točka *B*) loči visoka energijska prepreka. Čeprav je proces $A \rightarrow B$ s stališča proste entalpije možen ($\Delta G_{A \rightarrow B} < 0$), pa zaradi visoke energijske prepreke ne more steči. Energijsko prepreko za kemijske reakcije imenujemo tudi reakcijska aktivacijska energija (E_a) in smo jo srečali že v uvodnem poglavju pri Arrheniusovi enačbi. Proces lahko vseeno steče, če sistemu dodamo encim, ki $\Delta G_{A \rightarrow B}$ sicer ne spremeni, a zna proces do minimuma pripeljati po drugi, ugodnejši poti mimo energijske prepreke (črtkana črta).

encimi dobro nadzorujemo. V splošnem torej velja, da je prosta entalpija količina, ki pove, katere spremembe so spontano sploh mogoče, ne pa tudi kako hitro lahko spremembe potekajo in kako hitro ravnovesje dosežemo. Hitrosti reakcij opisuje kemijska kinetika, katere opis pa bomo prepustili biokemiji.

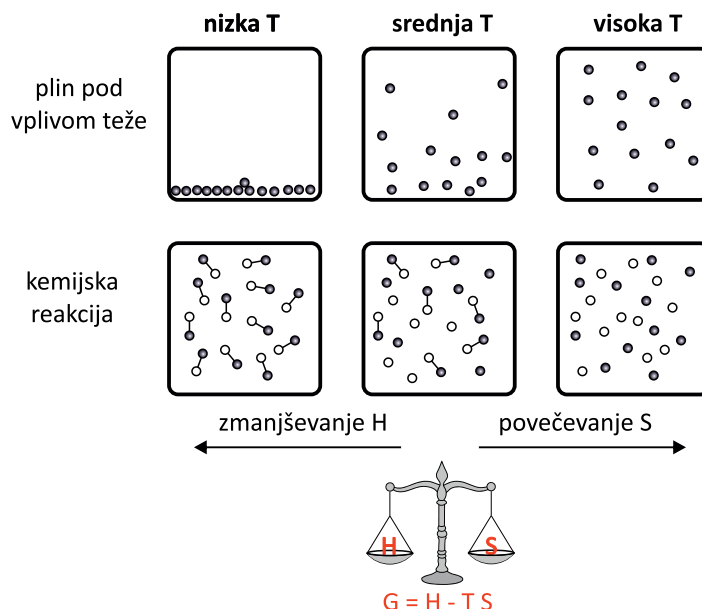
Omenimo naj še, da za sisteme pri dani prostornini (in torej ne pri danem tlaku) prosta entalpija ni uporabna količina in vlogo termodinamskega potenciala prevzame t. i. *prosta energija*, v kateri namesto entalpije nastopa notranja energija ($F = W_n - TS$). V biologiji takih sistemov in tudi proste energije ne bomo srečali prav pogosto.

Čeprav je prosta entalpija na prvi pogled zelo abstraktna količina, pa se v njenem zapisu skriva ključ za preprosto intuitivno razumevanje marsikaterega naravnega procesa. Iz enačbe 15.1 namreč vidimo, da je ravnovesje sistema (minimum proste entalpije) pogojeno z ravnotežjem med energijskimi (entalpijskimi) in entropijskimi efekti. Po eni strani konservativne sile sistem ne prestando vlečejo proti čim manjši energiji (entalpiji), po drugi strani pa zaradi termičnega gibanja sistem teži proti stanju s čim večjo entropijo. Temperatura sistema določa, kateri efekti prevladajo. Pri nizki temperaturi prevladajo energijski efekti (člen z entropijo TS bo ne glede na vrednost entropije majhen v primerjavi s H), pri visoki pa entropijski (člen TS k prosti entalpiji v

tem primeru prispeva mnogo več kot H).

Vse nam bo bolj jasno, če si ogledamo preprost primer, npr. obnašanje molekul plina pod vplivom teže (slika 15.3). Če bi bila temperatura zelo nizka, bi se termično gibanje molekul ustavilo in vse molekule bi pod vplivom teže padle na tla. V tem stanju bi imel sistem sicer zelo majhno entropijo, a bi bilo to zaradi nizke temperature nepomembno, zato bi bilo ravnovesno stanje določeno z minimumom potencialne energije oz. entalpije. Če bi bila po drugi strani temperatura zelo visoka, bi bilo močno tudi termično gibanje molekul in v ravnovesju bi bile molekule razmetane po vsem prostoru. Pri visoki temperaturi bi bilo ravnovesje torej pogojeno z entropijo, entalpija pa za ravnovesje sistema ne bi bila pomembna, saj bi bila zanemarljivo majhna v primerjavi s produktom TS . Pri normalnih temperaturah ne prevladajo ne energijski, ne entropijski efekti in je ravnovesje nekje med obema ekstremoma. Molekule plina so sicer razmetane po vsem prostoru, a je njihova gostota pri tleh vseeno malo večja kot zgoraj (več o tem še kasneje, ko bomo ta primer obravnavali tudi kvantitativno).

Podobna situacija je pri preprostih kemijskih reakcijah. Ustvarjanje vezi med sestavnimi deli v nekem sistemu je vedno eksotermen proces, se pravi, da je entalpija vezanih sestavnih delov manjša kot entalpija nevezanih. Po drugi strani je tudi entropija vezanih sestavnih delov manjša kot entropija nevezanih delov. Pri nizkih temperaturah entropija sistema za ravnovesje ni tako pomembna in bo sistem v stanju, ko je večina sestavnih delov vezanih. Z zviševanjem temperature pa se bo sistem približeval stanju z največjo entropijo, to je stanju, ko so sestavni deli v nevezanem stanju. V praksi je ravnovesje nekje vmes med obema ekstremoma in je nekaj sestavnih delov vezanih, nekaj pa ne.



Slika 15.3: Shematičen prikaz vpliva temperature na ravnovesno stanje sistema. Ravnovesje je pogojeno z minimumom proste entalpije tj. z ravnotežjem med željo po čim manjši entalpiji (oz. energiji) in želji po čim večji entropiji. Pri nizkih temperaturah prevladuje prva, pri visokih druga. Zgornje slike shematično prikazujejo ravnovesje molekul plina pod vplivom teže. Pri nizki temperaturi je sistem v stanju z najnižjo potencialno energijo – vse molekule so pri tleh. Pri visokih temperaturah je sistem v stanju z največjo entropijo – molekule so enakomerno razmetane po vsem prostoru. Pri vmesnih temperaturah je ravnovesje nekje med obema ekstremoma. Z višanjem temperature se ravnovesje sistema premika proti desnemu ekstremu, z nižanjem temperature pa proti levemu. Spodnje slike shematično prikazujejo ravnovesje pri preprostih kemijskih reakcijah. Pri nizkih temperaturah entropija sistema ni pomembna in je sistem v stanju z najmanjšo entalpijo - molekule so povezane z vezmi. Z zviševanjem temperature postaja entropijski člen v prosti entalpiji vse bolj pomemben, več se termično gibanje molekul, vezi se trgajo in ravnovesje se premika proti stanju z največjo entropijo, v katerem so vse vezi potrgane. V praksi je ravnovesje nekje med obema ekstremoma in je del molekul povezanih z vezmi, del pa je prostih.

V tem poglavju smo spoznali eno od najbolj fundamentalnih lastnosti narave: pri dani temperaturi in danem tlaku se sistemi spontano spreminjajo le v smer proti nižji prosti entalpiji in pri tem iščejo ravnotežje med čim manjšo entalpijo in čim večjo entropijo. V nadaljevanju bomo spoznali še nekaj dodatnih trikov, ki nam bodo pomagali pri kvantitativnem razumevanju konkretnih primerov.

15.2 Kemijski potencial in prehajanje snovi med različnimi stanji

Pogosto je snov v sistemu lahko v različnih stanjih oz. fazah. Ko npr. v pljuča vdihnemo zrak, se kisik razporedi tako, da ga je nekaj v zraku, nekaj pa se ga raztopi v kri. Tudi voda v pljučih je delno v tekočem stanju v tkivih, delno pa v plinastem stanju v zraku. Podobno se pri vsaki biokemijski reakciji kemijskih elementi iz ene spojine preuredijo v drugo (v jeziku termodinamike pravimo, da gredo iz enega stanja v drugega). Kot vse procese, tudi te nadzoruje prosta entalpija, ki se pri spontanah spremembah znižuje, v ravnovesju pa doseže najmanjšo možno vrednost.

Opisovanje prehajanja snovi iz enega stanja v drugega nam zelo olajša koncept *kemijskega potenciala*, ki opisuje prosto entalpijo na mol snovi. Kemijski potencial uvedemo podobno, kot druge "specifične" količine, npr. gostoto snovi. Če ima n molov neke snovi prosto entalpijo G , potem ima snov kemijski potencial

$$\mu = \frac{G}{n} = \overline{H} - T\overline{S} \quad (15.3)$$

kjer smo s črto označili molarne vrednosti entalpije in entropije (entalpijo na mol snovi in entropijo na mol snovi). Kemijski potencial ima torej enoto kJ/mol (opozorimo naj, da so definicije pri biokemiji včasih malo drugačne kot pri fiziki, primer 15.1).

Na ravnovesje snovi v dveh stanjih pogledjmo s stališča kemijskega potenciala. Če je v nekem sistemu snov v dveh stanjih, lahko celotno prosto entalpijo sistema zapišemo kot vsoto proste entalpije snovi v prvem stanju in vsoto proste entalpije v drugem stanju

$$G = \mu_1 n_1 + \mu_2 n_2. \quad (15.4)$$

Obnašanje takega sistema lahko analiziramo, če izračunamo, kako se spremeni njegova prosta entalpija, če Δn molov snovi preide iz prvega v drugo stanje. V tem primeru se bo količina snovi v prvem stanju zmanjšala za Δn , količina snovi v drugem stanju pa ustrezno povečala. Spremembo proste entalpije celotnega sistema lahko tako zapišemo kot:

$$\Delta G = \Delta G_1 + \Delta G_2 = -\Delta n\mu_1 + \Delta n\mu_2 = \Delta n(\mu_2 - \mu_1) \quad (15.5)$$

Prehod snovi iz prvega v drugo stanje se bo spontano zgodila le, če bo sprememba proste entalpije negativna. Iz zgornje enačbe vidimo, da bo sprememba proste entalpije negativna, če bo kemijski potencial v drugem stanju manjši kot v prvem stanju. Ugotovitev lahko strnemo v naslednjo zakonitost: **snov spontano prehaja iz stanja z višjim kemijskim potencialom v stanje z nižjim kemijskim potencialom. Če sta kemijska potenciala v obeh stanjih enaka, je sistem v ravnovesnem stanju.** Kisik oz. katerikoli plin se bo npr. v krvi raztapljal le, če je njegov kemijski potencial v raztopini manjši kot v zraku, v nasprotnem primeru pa se bo iz krvi izločal.

Primer 15.1: enote za energijo v biokemiji

Pri fiziki smo navajeni, da je energija ekstenzivna količina, zato imata v fiziki H in G enoto J. Drugače je pri biokemiji, kjer energijo ponavadi izražajo na mol snovi in je torej intenzivna količina. Pri biokemiji imata H in G zato ponavadi enoto kJ/mol in sta pravzaprav povezani z našima molarno entalpijo in kemijskim potencialom. Primer: osrednji pojem pri opisovanju biokemijskih reakcij je sprememba standardne proste entalpije reakcije $\Delta G^{0'}$ (kot boste spoznali kasneje je ta količina neposredno povezana s ravnotežno konstanto reakcije pri standardnih pogojih). V našem jeziku je sprememba standardne proste entalpije reakcije enaka razliki kemijskih potencialov produktov in reaktantov pri standardnih pogojih.

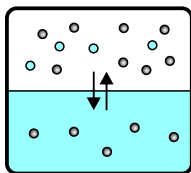
$$\Delta G^{0'} = \mu_{0 \text{ produkti}} - \mu_{0 \text{ reaktanti}}$$

Pri standardnih pogojih (tj. če zmešamo 1 M raztopine reaktantov in produktov) bo reakcija stekla v smer produktov, če bo kemijski potencial produktov manjši kot kemijskih potencial reaktantov oz. če bo $\Delta G^{0'} < 0$.

15.3 Kemijski potencial plinov in raztopin

Živa bitja smo v prvem približku »vreče, napolnjene z vodno raztopino,« zato je dobro poznavanje termodinamike raztopin nujno za razumevanje mnogih fizioloških procesov. Preden si v prihodnjih poglavjih razložimo procese kot

so osmozni tlak ali raztapljanje plinov, na raztopine pogledimo s stališča proste entalpije in kemijskega potenciala. Slika 15.4 shematično predstavlja tipičen sistem z raztopino: v vodi je raztopljen topljenec, oba pa sta v stiku z zrakom. Molekule vode lahko prehajajo iz zraka v raztopino, zato bo v ravnovesju kemijskih potencial vode v zraku enak kemijskemu potencialu vode v raztopini. Če je topljenec hlapljiv (taki so npr. vsi plini), lahko tudi topljenec prehaja med vodo in zrakom in bo v ravnovesju tudi kemijski potencial topljenca v zraku in v raztopini enak (pozor: za ravnovesje ni potrebno, da je kemijski potencial vode enak kemijskemu potencialu topljenca, ampak le da je za vsako posamezno snov enak v obeh stanjih). Če kemijski potencial ene od snovi ni enak v obeh oblikah, sistem ne bo v ravnovesju in bo snov prehajala iz višjega na nižji kemijski potencial.



Slika 15.4: Fiziološki sistemi so pogosto v stiku z zrakom, zato lahko v njih voda in topljenci prehajajo med zrakom in raztopino. Prehajanje vsake od snovi je odvisno od razlike med kemijskih potencialom te snovi v zraku in raztopini. Snov prehaja v smer proti nižjemu potencialu, če pa sta oba potenciala enaka, je snov v ravnovesju.

Pri oceni kemijskega potenciala plinov in raztopin se moramo spomniti njegove definicije (en. 15.3): kemijski potencial neke snovi bo tem manjši, čim manjša bo molarna entalpija snovi in čim večja bo molarna entropija snovi. Entropija bo tem večja, čim bolj bo snov razurejena, pri razmisleku o entalpiji pa se moramo spet spomniti njene definicije (en. 13.10) in jo prepisati v molarno obliko: $\bar{H} = \bar{W}_n + p\bar{V}$, kjer je $\bar{V}$ prostornina enega mola snovi. Entalpija bo torej v splošnem tem manjša, čim več vezi s sosedami tvorijo molekule, čim manjšo potencialno energijo zaradi zunanjih sil imajo (npr. gravitacijsko ali energijo v zunanjem električnem polju) in čim manjši je produkt $p\bar{V}$.

Zgornje ugotovitve poskusimo še podrobneje razčleniti. Pri tem bomo predpostavili, da je snov v zraku idealni plin, raztopina pa je idealna razredčena raztopina. Podobno kot pri gravitacijskem potencialu so tudi pri kemijskem relevantne le spremembe potenciala oz. razlike do standardnega stanja, ki ga bomo označili z indeksom 0. Opisali bom štiri glavne prispevke h kemijskem potencialu v raztopinah, trije bodo entalpijski, eden pa entropijski:

1. Vezi med molekulami (entalpijski prispevek)

Začnimo z najbolj osnovnim razlogom za prehajanje snovi med stanji: ustvarjanje vezi med molekulami. Več kot ima molekula vezi s sosdami, bolj energijsko je to zanjo ugodno. V razredčenih raztopinah se molekule topljenca med seboj praktično nikoli ne srečajo, zato so v takih raztopinah v prvi vrsti pomembne vezi med topljencem in vodo. Čim močnejše vezi z vodo lahko ustvari neka snov, tem bolj je *hidrofilna*, in obratno, če neka snov z vodo ne tvori vezi, pravimo da je *hidrofobna*. Molarne entalpijo, ki se sprosti ob veza-vi, označimo z $\Delta \bar{H}_v$ (definirana je torej tako, da je $\Delta \bar{H}_v > 0$, čim bolj je neka snov hidrofilna, tem večja je ta razlika).

Enako kot za molekule topljenca velja seveda za molekule vode, ki so tudi »hidrofilne.« Razliko entalpij v vezanem in nevezanem stanju smo pri vodi že srečali - povezana je namreč z izparilno toploto vode: $\Delta \bar{H}_{vH_2O} = M_{H_2O} q_i$. Vezavna entalpija je pogosto odvisna od temperature, a ta odvisnost v splošnem ni enostavna, zato se ji tu ne bomo imeli časa posvetiti.

2. Potencialne energije molekul (entalpijski prispevek)

Drugi vpliv na kemijski potencial snovi je vpliv potencialnih energij, ki jih imajo molekule zaradi zunanjih potencialov, npr. gravitacijskega potenciala (pri fizioloških procesih tega ponavadi ni treba upoštevati, saj so vsi deli sistema na praktično enaki višini) ali električnega potenciala (tega moramo nujno upoštevati pri vseh elektrofizioloških procesih). Iz mehanike se spomnimo, da je gravitacijska potencialna energija enaka $W_p = mgz$. Odmik kemijskega potenciala od standardnih pogojev zaradi vpliva težnosti (molarne potencialne energija) bo torej:

$$\mu = \mu_0 + Mgz, \quad (15.6)$$

kjer je M molska masa molekul, z pa višina njihovega položaja (pri tem smo predpostavili, da je v standardnem stanju višina enaka 0 ter upoštevali zvezo $M = m/n$). Kasneje, ko bomo obravnavali prekomembranski potencial v celicah, bomo videli, da lahko na podoben način zapišemo tudi vpliv električnega potenciala, tj. elektrokemijski potencial.

3. Produkt $p\bar{V}$ (entalpijski prispevek)

Tretji vpliv na kemijski potencial snovi izhaja neposredno iz definicije proste entalpije, iz katere je razvidno, da je kemijski potencial snovi odvisen od produkta $p\bar{V}$. Intuitivno ta prispevek že poznamo: voda, ki je nestisljiva ($\bar{V}$ je

praktično konstanten), teče od višjega tlaka k nižjemu, saj ima pri slednjem nižji kemijskih potencial. Po drugi strani ta prispevek za idealne pline ni relevanten, saj je pri njih produkt $p\bar{V}$ pri dani temperaturi konstanten (spomnimo se plinske enačbe). Pravzaprav tega člena pogosto ni potrebno upoštevati niti pri vodi, saj je tudi tlak vode pri marsikaterem sistemu povsod enak in se produkt $p\bar{V}$ med procesi ne spreminja.

4. Entropija oz. neurejenost sistema (entropijski prispevek)

Razmislek o kemijskih potencialih v raztopinah končajmo z zapisom entropijskega dela kemijskega potenciala. Za plinasto stanje smo že pokazali, da so spremembe entropije pri dani temperaturi odvisne od logaritma tlaka (en. 14.3). Entropijski del kemijskega potenciala dobimo, če spremembo molarne entropije pomnožimo s temperaturo. Odmik entropijskega dela kemijskega potenciala plina od standardnih pogojev bo torej enak

$$\mu_{\text{plin}} = \mu_0 + RT \ln \frac{p}{p_0}, \quad (15.7)$$

Za topljence v vodi entropije sicer nismo izračunali, a intuicija nam pravi, da je njihova neurejenost tem večja, čim bolj so molekule topljenca razmetane po vodi oz. z drugimi besedami, čim manjša je koncentracija snovi. Izkaže se, da je izraz za entropijo topljencev v idealnih razredčenih raztopinah podoben kot za entropijo idealnih plinov, le da je potrebno tlak zamenjati s koncentracijo. Entropijski člen za kemijski potencial topljenca v vodi pri dani temperaturi je torej:

$$\mu_{\text{topljenec}} = \mu_0 + RT \ln \frac{c}{c_0}, \quad (15.8)$$

pri čemer smo z indeksom 0 spet označili standardne pogoje.

Na koncu moramo razmisliti še o entropiji topila, tj. vode. Za začetek spet sledimo intuiciji: več kot bo v vodi raztopljenih snovi, bolj bodo molekule vode razurejene. Pričakujemo torej, da bo kemijski potencial vode tem manjši, čim večja bo koncentracija topljenca. Daljši račun pokaže, da lahko entropijski prispevek h kemijskem potencialu vode pri dani temperaturi zapišemo kot

$$\mu_{\text{H}_2\text{O}} = \mu_0 - RT\bar{V}_{\text{H}_2\text{O}} \sum c_i, \quad (15.9)$$

pri čemer smo upoštevali, da je lahko v vodi raztopljenih več različnih topljencev, katerih koncentracije smo označili s c_i . Koncentracije moramo v zgornjo enačbo vnašati v molarnih enotah (mol/l). Pri tem moramo poudariti, da je entropiji vode vseeno, kakšne vrste molekul so raztopljene v njej, pomembna je le skupna koncentracija raztopljenih delcev $\sum c_i$. Kasneje bomo videli, da je ta entropijski člen odgovoren za nekaj zanimivih lastnosti raztopin, ki pa so vse neodvisne od vrste raztopljenih molekul ampak le od njihove celotne koncentracije. Take lastnosti imenujemo *koligativne* lastnosti, prvo pa bomo spoznali že kar v naslednjem razdelku.

15.4 Osmozni tlak

Eden od osnovnih gradnikov živih bitji so celične membrane, ki celice in celične organele razmejujejo v različne funkcionalne enote. Temeljna značilnost celičnih membrane je njihova selektivna prepustnost, pri čemer so ponavadi za vodo mnogo bolj prepustne kot za topljence. Voda lahko tako preko membran skoraj prosto prehaja v smer proti nižjemu kemijskem potencialu. To prehajanje vode imenujemo *osmoza*. V prejšnjem razdelku smo ugotovili, da je kemijski potencial vode v fizioloških sistemih najbolj odvisen od skupne koncentracije topljencev v njej, tj. od zadnjega člena v en. 15.9. Ta člen je za fiziološke procese tako pomemben, da si je njegov glavni del prislužil svoje ime - imenujemo ga *osmozni tlak* in označimo s Π :

$$\Pi = RT \sum c_i. \quad (15.10)$$

Ker je enota za koncentracijo mol na liter, lahko s pomočjo primerjave s plinsko enačbo hitro ugotovimo, da je osmozni tlak zares "tlak", saj ima isto enoto (Pa). Ker je osmozni tlak entropijskega izvora, je koligativna lastnost in njegova vrednost ni odvisna od vrste topljencev, temveč le od njihove celotne koncentracije. Še več, za entropijo je pravzaprav pomembno le, koliko »delcev« je raztopljenih, zato moramo pri snoveh, ki v vodi disociirajo upoštevati vse disociirane delce. Z namenom, da se to dejstvo poudari, so za merjenje koncentracije vseh osmotsko aktivnih delcev uvedli količino *osmolarnost* z enoto Osm. Vse bo bolj jasno z naslednjim primerom: če npr. v 1 l vode raztopimo

1 mol NaCl, bo celotna koncentracija raztopljenih delcev 2 mol/l (en mol Na^+ in en mol Cl^-). Osmolarnost eno molarne raztopine NaCl je torej 2 Osm.

Vpliv osmotskega tlaka je lepo viden v preprostem poskusu s cevko v obliki črke U, ki ima na sredini membrano, prepustno le za vodo (slika 15.5A). Na eno stran cevke damo raztopino, na drugo pa enako količino čiste vode. Kemijski potencial vode je nižji v raztopini, zato bo voda vdirala proti raztopini in se bo gladina raztopine začela dvigovati. Ravnovesje se bo vzpostavilo, ko bo na obeh straneh vode enak kemijski potencial. Pri opisovanju tega poskusa moramo pri kemijskem potencialu vode upoštevati entropijski člen (enačbo 15.9), pa tudi člen z $p\bar{V}$, saj se zaradi dvigovanja gladine ob membrani spreminja hidrostatski tlak. Zapišimo ravnovesno zahtevo, da je na levi in desni strani membrane enak kemijski potencial:

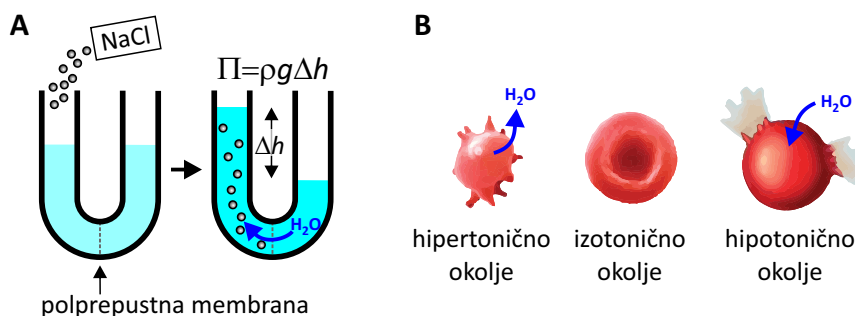
$$\mu_L = \mu_D \Rightarrow p_L \bar{V}_{\text{H}_2\text{O}} - RT \bar{V}_{\text{H}_2\text{O}} \sum c_i = p_D \bar{V}_{\text{H}_2\text{O}} .$$

Ko iz zgornje enačbe pokrajšamo molarno prostornino vode, ugotovimo, da bosta kemijska potenciala enaka natanko takrat, ko bo razlika hidrostatskih tlakov vode na levi in desni strani membrane zaradi razlike višin ($p_L - p_D = \rho g \Delta h$) ravno uravnovesila osmotski tlak. V ravnovesju bo torej veljalo: $\Pi = \rho g \Delta h$.

Osmotski tlak je glavni nadzornik prehajanja vode med predelki v tkivih in celicah. V ravnovesju morajo biti osmotski tlaki povsod enaki, v nasprotnem primeru voda prehaja v predelke z višjim osmotskim tlakom. Situacija v živih tkivih pa je mnogo bolj zapletena kot pri cevki v obliki črke U. Žive celice namreč neprestano regulirajo prepustnost membran za različne topljence, pri čemer se celice v različnih tkivih obnašajo različno. Ker k osmotskemu tlaku prispevajo le snovi, ki preko membrane ne morejo prehajati, so fiziologi za merjenje osmotskega tlaka uvedli količino *toničnost*, ki ustreza celotni koncentraciji snovi, ki ne morejo prehajati membrane.

Vpliv osmotskega tlaka je dobro viden pri rdečih krvnih celicah, ki nimajo citoskeleta in se težko upirajo spremembam toničnosti okolja (slika 15.5B). Če jih prestavimo v hipertonično okolje (tj. v okolje z večjo koncentracijo snovi), bo voda začela uhajati iz celic in celice se bodo skrčile. Če jih po drugi strani prestavimo v hipotonično okolje (tj. v okolje z manjšo koncentracijo snovi), bo voda začela vdirati v celice, celice bodo nabrekale in v skrajnem primeru celo počile.

Toničnost je odvisna od prepustnosti celičnih membran, le ta pa v telesu ni vedno in povsod enaka. Raztopina, ki je izotonična v nekem fiziološkem okolju, zato ni nujno povsem izotonična v drugem. Na to moramo biti še posebej



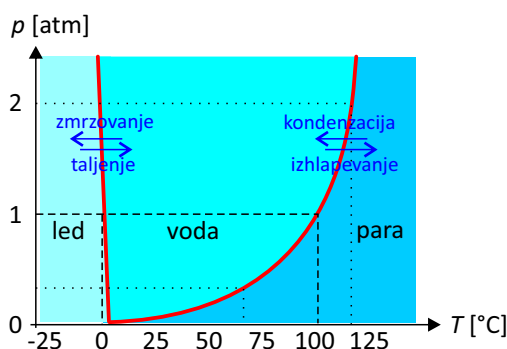
Slika 15.5: Prikaz vpliva osmotskega tlaka. Kemijski potencial vode je tem manjši, čim več je v njej raztopljenih snovi (en. 15.9), zato voda zato teče v smer proti večji koncentraciji raztopljenih snovi. **A)** Cevka v obliki črke U je na sredini predeljena z membrano, ki je prepustna le za vodo. Ko v levi krak raztopine natresemo topljenec, se bo na levi strani vodi znižal kemijski potencial, zato bo voda iz desne strani začela vdirati na levo. Ravnoesje se vzpostavi, ko je kemijski potencial vode na obeh straneh membrane enak, t.j., ko je osmotski tlak enak hidrostatskemu tlaku, do katerega pride zaradi razlike višin Δh . **B)** Celične membrane so za vodo dobro prepustne, za večino topljencev pa ne. V izotoničnem okolju je koncentracija snovi enaka kot v celici. Če celico prestavimo v hipertonično okolje (koncentracija snovi v njem je večja kot v celici), bo začela voda uhajati iz celice in celica se bo skrčila. Če celico prestavimo v hipotonično okolje (koncentracija snovi v njem je manjša kot v celici), bo voda začela vdirati v celico, celica bo začela nabrekati in lahko v skrajnem primeru celo poči.

pozorni pri nadomeščanju izgubljenih telesnih tekočin, saj morajo nadomestne tekočine poskrbeti za nadomestilo izgubljenih ionov in hranil, hkrati pa morajo imeti tudi ustrezno toničnost za določeno situacijo. Za nadomeščanje večjih izgub krvi zato ne obstaja univerzalna fiziološka raztopina, ampak je na razpolago več različnih vrst raztopin z različnimi lastnostmi. Raztopine v katerih so večinoma raztopljeni ioni imenujemo *kristaloidne raztopine*, včasih pa uporabljajo tudi t. i. *koloidne raztopine*, ki toničnost uravnavajo z različnimi makromolekulami, ki preko membran ne morejo prehajati.

15.5 Fazni diagram vode in vlažnost zraka

Vse vrste življenja na Zemlji so zelo odvisne od vode ter njenega prehajanja med agregatnimi stanji. Za človeško telo je npr. izhlapevanje vode eden glavnih mehanizmov vzdrževanja telesne temperature. Iz razprave o kemijskih

potencialih vemo, da bo pri danem tlaku in dani temperaturi voda spontano prehajala iz stanja z višjim v stanje z nižjim kemijskim potencialom, v ravnovesju pa bosta kemijska potenciala vode v obeh agregatnih stanjih enaka. Ker so interakcije med molekulami vode zelo zapletene, ne znamo napisati enostavne formule za odvisnost kemijskega potenciala vode od temperature in tlaka. To odvisnost pa si znamo razložiti na intuitivnem nivoju: višja, kot je temperatura vode, večje je termično gibanje in molekule lažje pretrgajo medsebojne vezi ter preidejo v stanje z večjo neurejenostjo (pri čemer je plinasto stanje je bolj neurejeno kot tekoče, to pa je bolj neurejeno kot trdno). Tlak po drugi strani snov stiska, zato z višanjem tlaka postajajo bolj ugodna stanja z večjo gostoto (tu je voda posebnost med snovmi, saj je v tekočem stanju gostejša kot v trdnem).



Slika 15.6: Fazni diagram vode prikazuje meje, pri katerih lahko različna agregatna stanja vode soobstajajo v ravnovesju. Mejo med vodo in vodno paro si lahko po eni strani predstavljamo kot odvisnost temperature vrelišča od tlaka, po drugi pa kot odvisnost nasičenega delnega tlaka vodne pare v zraku od temperature. Če je delni tlak vode v zraku nižji od nasičenega, bo voda hlapela, če je višji pa bo kondenzirala. Črtni črti označujeta vrelišče pri normalnih pogojih, pikčasti pa na vrhu Mount Everesta in v ekonom loncu.

Obstojnost agregatnih stanj vode pogosto prikažemo v t. i. *faznem diagramu*, ki v prikazuje ravnovesne meje med fazami vode v odvisnosti od temperature in tlaka (slika 15.6). Mejo med vodo in vodno paro na faznem diagramu si lahko predstavljamo kot odvisnost temperature vrelišča od tlaka. Če se pri danem tlaku vode pomikamo proti višji temperaturi, bo tekoče stanje slej ko prej postalo nestabilno in voda bo zavrela ter vsa izhlapela. Pri normalnem zračnem tlaku je temperatura vrelišča znanih 100°C , s spreminjanjem tlaka pa se ta meja precej hitro spreminja: na vrhu Mount Everesta pade na približno

70 °C, če pa je tlak višji od normalnega (npr. v ekonom loncu ali v avtoklavu), lahko voda doseže tudi višjo temperaturo - pri tlaku 2 atm je temperatura vrelišča npr. približno 120 °C.

Za fiziologijo je zanimiv še drug pogled na mejo med vodo in vodno paro. Na faznem diagramu lahko vidimo, da sta v sistemu s čisto vodo pri sobni temperaturi možni le tekoča in plinasta faza. Ravnovesje med fazama bi imeli, če bi bil tlak vode in vodne pare zelo nizek, pri 25 °C je to približno 3 kPa. Pri fizioloških pogojih je zračni tlak nad vodo seveda precej višji, a spomniti se moramo, da je ta tlak predvsem posledica tlaka drugih plinov v zraku in ne le vodne pare. Mejni tlak na diagramu si moramo torej predstavljati kot mejni delni tlak vodne pare v zraku, ki ga imenujemo tudi *nasičeni parni tlak*. Če je delni tlak vodne pare v zraku nižji od nasičenega, bo voda izhlapevala, če pa bo višji bo kondenzirala.

Za ravnovesje vode pri normalnih pogojih je torej ključno, kolikšen je delni tlak vode v zraku oz. koliko vode je v zraku. To lahko po eni strani opišemo s pojmom absolutna vlažnost, ki pove, koliko mase vodne pare je v dani prostornini zraka, še bolj pogosto pa vlažnost zraka opisujemo z *relativno vlažnostjo*, ki je definirana kot razmerje med dejanskim delnim tlakom vodne pare v zraku in nasičenim parnim tlakom:

$$\eta = \frac{p}{p_{\text{nasič.}}} . \quad (15.11)$$

Voda lahko torej izhlapeva, dokler je relativna vlažnost zraka manjša od 100 %. Pri normalnih pogojih je za zdravega človeka ugodna relativna vlažnost zraka nekje okoli 50 %, če je vlažnost manjša, bo izhlapevanje prehitro, če bo večja (npr. v tropskih okoljih), pa s potenjem ne bomo več mogli odvajati odvečne toplote in se lahko pregrejemo.

Ker je nasičen parni tlak vode ($p_{\text{nasič.}}$) zelo odvisen od temperature (slika 15.6), je pri dani količini vode v zraku (tj. pri danem delnem tlaku vodne pare) od temperature zelo odvisna tudi relativna vlažnost zraka - z višanjem temperature relativna vlažnost pada. To lastnost poznamo vsi očalarji, saj se nam očala zarosijo vedno, ko iz mrzlega okolja vstopimo v toplo in vlažno sobo (razmislite, kaj se zgodi v tem primeru!). Po drugi strani so s tem povezane težave s preveč suhim zrakom v zaprtih ogrevanih prostorih pozimi. Pri slednjih moramo biti še posebej pazljivi pri oskrbovanju šibkih bolnikov, ki bi se lahko z vdihavanjem preveč suhega zraka ali plinov iz jeklenke zelo hitro izsušili. V pljučih je namreč med zrakom in tkivi ogromna površina, zato voda iz tkiv hitro izhlapi, izdihani zrak pa ima praktično 100% vlažnost. Zrak, ki ga

med umetnim ventiliranjem dovajamo pacientom v intenzivni negi, mora biti zaradi tega primerno navlažen in ogret.

Črta med ledom in vodo na faznem diagramu prikazuje odvisnost temperature ledišča od tlaka. Pri tej meji ni tako močne odvisnosti od tlaka in je ledišče vedno približno pri 0 °C. Zanimivost vode v primerjavi z drugimi snovmi je, da je ta meja nagnjena v levo, saj je pri višjih tlakih tekoča voda bolj stabilna od ledu (led ima manjšo gostoto od vode). Meji med ledom in vodo ter vodo in paro se stakneta v t.i trojni točki vode, v kateri lahko soobstajajo vsa tri agregatna stanja hkrati, in leži pri temperaturi malo nad 0 °C in pri tlaku le 612 Pa.

Z našim znanjem termodinamike si lahko pojasnimo še eno pomembno lastnost vodnih raztopin. V prejšnjih poglavjih smo videli, da ima voda tem nižji kemijski potencial, čim več topljencev raztopimo v njej. V primerjavi s čisto vodo imajo raztopine torej malo nižji kemijski potencial, zato so bolj stabilne in zmrznejo šele pri nižji temperaturi oz. zavrejo šele pri višji temperaturi od čiste vode (med zmrzovanjem topljenci ostajajo v vodi, zato se ledu kemijski potencial spremeni manj kot vodi). Izkaže se, da sta premika temperature ledišča in vrelišča vode v prvem približku kar sorazmerna osmotskemu tlaku vode. Fiziološka raztopina npr. zavre pri temperaturi približno 100,15 °C, zamrzne pa pri približno –0,5 °C. Morska voda je približno štirikrat bolj slana od fiziološke raztopine, zato zamrzne pri približno –2 °C. Odvisnost temperature ledišča in vrelišča od osmotskega tlaka ima tudi praktično vrednost: izkoriščajo jo *osmometri*, tj. inštrumenti za merjenje osmolarnost raztopin.

15.6 Raztapljanje plinov

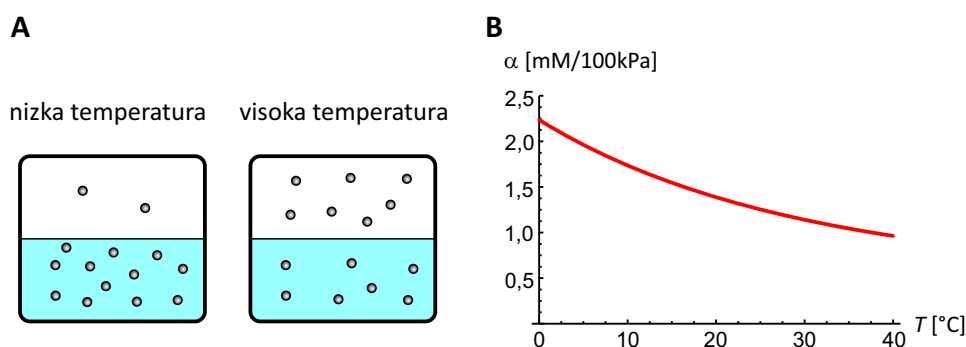
Poleg prehajanja vode med tekočim in plinastim stanjem je za fiziološke procese zelo pomembno tudi prehajanje drugih plinov med zrakom in raztopinami. Intuitivno sklepamo, da se raztopi tem več plina, čim več ga je v plinastem stanju nad raztopino. Izkaže se, da v ravnovesju za mnoge pline v prvem približku velja kar sorazmerna odvisnost koncentracije plina v raztopini od delnega tlaka plina nad raztopino:

$$c = \alpha p . \quad (15.12)$$

kjer je c molarna koncentracija plina v raztopini, p delni tlak plina nad raztopino, α pa je *topnostni koeficient*. Zgornja zveza se imenuje tudi *Henryjev zakon*, po angleškem kemiku Williamu Henryju, ki zakon odkril v začetku 19.

stoletja (včasih ta zakon zapišejo tudi v obliki $p = Kc$, pri čemer se K imenuje Henryjev koeficient, $K = 1/\alpha$).

Topnostni koeficient je v prvi vrsti odvisen od razlike entalpij molekul plina v plinastem in raztopljenem stanju – čim več vezi tvorijo molekule plina z vodo, tem raje se plin topi in tem večji je njegov topnostni koeficient. Poleg tega je topnostni koeficient odvisen tudi od temperature. Intuitivno lahko sklepamo, da se topnostni koeficient hidrofilnih plinov z višanjem temperature manjša: z višanjem temperature se večja tudi termično gibanje, zaradi česar molekule plina iz vode vse lažje »skačejo« v plinasto stanje in jih je torej vse manj v raztopini (slika 15.7A). Pri danem tlaku se npr. v vodi pri temperaturi 37 °C raztopi kar 30% manj kisika kot pri sobni temperaturi (slika 15.7B). Topnostni koeficienti za nekatere pline pri sobni temperaturi so predstavljeni v tabeli 15.1, odvisnost topnostnega koeficienta od temperature pa izpeljana v MaFijemskem primeru 15.1.



Slika 15.7: **A)** Shematični prikaz zmanjševanja topnosti plinov s temperaturo. Če lahko molekule plina z molekulami vode tvorijo vezi (se pravi, da je plin hidrofilen), je raztapljanje energijsko ugodno in pri nizki temperaturi bo raztopljeno veliko plina. Z zviševanjem temperature se večja termično gibanje, zato lahko vedno več molekul zapusti raztopino in se preseli v plinasto stanje, v katerem je entropija večja. **B)** Odvisnost topnostnega koeficienta kisika v vodi od temperature (povzeto po [12]). Koeficient se s temperaturo hitro zmanjšuje, pri telesni temperaturi se v vodi raztopi približno 30% manj kisika kot pri sobni temperaturi.

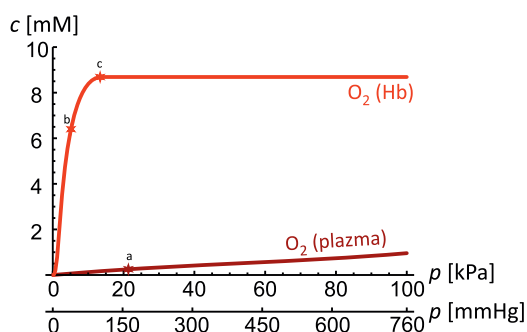
Kri je tudi vodna raztopina, zato se v njej raztapljajo vsi plini, ki so v zraku. Od teh sta za fiziologijo najbolj pomembna kisik in ogljikov dioksid, ki se izmenjujeta pri dihanju. Slika 15.8 prikazuje odvisnost koncentracije teh dveh plinov v krvi v odvisnosti od njunega delnega tlaka. Iz slike vidimo, da bi se nam pri normalnih pogojih, ko je delni tlak kisika v zraku 21 kPa, v krvi

plin	O ₂	N ₂	CO ₂
α [mM/100kPa]	1,3	0,6	33

Tabela 15.1: Topnostni koeficient za tri fiziološko pomembne pline pri temperaturi 25 °C (povzeto po [3]). Topnostni koeficient nam pove, koliko molarna raztopina plina bi nastala v vodi, če bi bil delni tlak plina nad raztopino enak normalnemu zračnemu tlaku (100 kPa).

raztopilo le malo kisika. Na srečo sta tu fiziki priskočili na pomoč: evolucija in biokemija in je glavni prenašalec kisika v krvi hemoglobin, katerega koncentracija v krvi je nekaj več kot 2 mM, vsaka molekula hemoglobina pa lahko nase veže 4 molekule kisika. Poleg tega je vezava kisika na hemoglobin ugodna in se hemoglobin s kisikom napolni (saturira) že pri delnem tlaku kisika približno 15 kPa (to nam pride zelo prav, saj je povprečni delni tlak kisika v alveolah nekaj manjši kot v zunanjem zraku). Opozorimo naj še, da zaradi sorazmernosti med delnim tlakom plina nad raztopino in njegovo koncentracijo v raztopini, v medicini tudi vsebnost plinov v krvi pogosto merijo kar z ustreznim ravnovesnim delnim tlakom plina oz. ponavadi kar v mmHg.

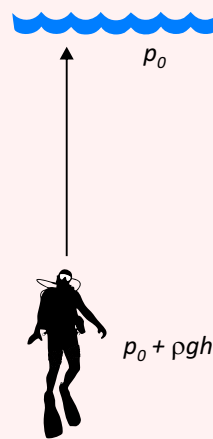
Če je v raztopini veliko raztopljenega plina, se bo ob nenadnem padcu tlaka nad raztopino začel plin v obliki mehurčkov izločati iz raztopine. V vsakdanjem življenju ta pojav srečamo vsakič, ko odpremo steklenico z gazirano pijačo, v medicini pa hitro izločanje plinov iz raztopine srečamo pri *dekompresijski bolezni*, do katere lahko pride nepazljivo potapljanje z jeklenko (primer 15.2).



Slika 15.8: Shematični prikaz odvisnosti koncentracije raztopljenega kisika od njegovega delnega tlaka. Pri normalnem delnem tlaku kisika v zraku (približno 20 kPa, točka *a*) je v krvni plazmi raztopi le malo kisika. V krvi se praktično ves kisik prenaša vezan na hemoglobin, katerega vezavna krivulja ima značilno sigmoidno obliko, nasiči pa se že pri delnem tlaku kisika približno 15 kPa. Točki *b* in *c* označujeta delna tlaka kisika v venski krvi in alveolah, iz česar vidimo, da se koncentracija kisika v krvi v pljučih poveča za približno 2 mM. V medicini delne tlake ponavadi merijo v mmHg, zato je na sliki prikazana tudi os s to enoto.

Primer 15.2: dekompresijska bolezen

Potapljač z jeklenko diha zrak pod tlakom, ki je enak zunanjemu tlaku vode. Na veliki globini zato vdihuje zrak pod velikim tlakom, zaradi česar se mu v krvi in tkivih raztopi več plina kot na površini. Če se potapljač na veliki globini zadržuje dalj časa, nato pa hitro izplava na površje, se mu zunanji tlak v hipu zelo zmanjša. Plini, ki so bili raztopljeni v krvi in tkivih, se zato začnejo izločati v kri v obliki mehurčkov, ki lahko zamašijo kapilare v organih in privedejo do t. i. kompresijske bolezni. Dekompresijski boleznini se lahko izognemo s počasnim dviganjem na površje, kar omogoči, da se plini iz krvi in tkiv sprostijo počasi in jih lahko sproti izdihamo skozi pljuča.



Izračunajmo, kolikšna prostornina dušika se izloči iz 1 dl krvi, če se potapljač hitro dvigne s 40 m globine na površje!
Tlak vdihanega zraka iz jeklenke na globini 40 m je enak 500 kPa, delni tlak dušika pa

je 78 % le-tega. Koncentracija dušika v krvi na globini 40 m bo zato

$$c = \alpha p = 0,6 \text{ mM}/100 \text{ kPa} \cdot 0,78 \cdot 500 \text{ kPa} = 2,34 \text{ mM} .$$

Pri tem smo za topnost dušika vzeli kar podatek iz tabele 15.1.

Ko se potapljač hitro vrne na površino, mu delni tlak dušika v pljučih pade na 78 kPa, koncentracija v krvi raztopljenega dušika pa je zato lahko le še

$$c = 0,6 \text{ mM}/100 \text{ kPa} \cdot 78 \text{ kPa} = 0,47 \text{ mM} .$$

Razlika koncentracij, 1,9 mM, se v obliki mehurčkov izloči iz krvi. Iz 1 dl krvi se torej izloči 0,19 mmol dušika. Ker so na gladini približno standardni pogoji, lahko prostornino izločenega dušika ocenimo kar iz podatka, da je prostornina enega mola plina enaka približno 22 l. Iz 1 dl krvi se torej izloči približno $22 \text{ l} \cdot 0,00019 \approx 4 \text{ ml}$ dušika.

MaFijski primer 15.1: Izpeljava Henryjevega zakona

Henryjev zakon (en. 15.12) je intuitivno lahko razumeti: čim višji je tlak plina nad raztopino, tem več molekul plina se raztopi v raztopini. Z našim znanjem termodinamike znamo ta zakon tudi izpeljati ter ob tem še oceniti, od česa je odvisen topnostni koeficient α . Začnimo z zapisom pogoja za ravnovesje: v ravnovesju mora biti kemijski potencial za molekule plina v raztopini enak kot v plinu:

$$\mu_r = \mu_p .$$

Pri kemijskem potencialu moramo upoštevati entropijska prispevka za plin in raztopino (en. 15.7 in 15.8), poleg tega pa tudi entalpijski prispevek – če lahko molekula plina v vodi vzpostavi vezi, ima zato v vodi nižjo entalpijo kot v plinastem stanju. Pogoj za ravnovesje lahko torej zapišemo kot:

$$RT \ln \frac{c}{c_0} - \Delta \bar{H}_v = RT \ln \frac{p}{p_0} ,$$

pri čemer je $\Delta \bar{H}_v$ vezavna entalpija, ki se sprosti ob selitvi enega mola plina iz plinastega stanja v raztopino (ob taki definiciji za hidrofilne pline velja $\Delta \bar{H}_v > 0$). To zvezo najprej preuredimo tako, da člene z logaritmom zberemo na eni strani enačbe:

$$RT \left(\ln \frac{c}{c_0} - \ln \frac{p}{p_0} \right) = \Delta \bar{H}_v ,$$

nato pa faktor RT prestavimo na desno stran enačbe, logaritma združimo in obe strani enačbe antilogaritmiramo:

$$\frac{cp_0}{c_0p} = e^{\frac{\Delta \bar{H}_v}{RT}} .$$

Ko izrazimo odvisnost koncentracije od tlaka, dobimo

$$c = p \frac{c_0}{p_0} e^{\frac{\Delta \bar{H}_v}{RT}} .$$

iz česar vidimo, da sta c in p zares premo sorazmerna, kot to napoveduje Henryjev zakon. Če to enačbo primerjamo s Henryjevim zakonom ($c = \alpha p$), razberemo vrednost topnostnega koeficienta

$$\alpha = \frac{c_0}{p_0} e^{\frac{\Delta \bar{H}_v}{RT}}.$$

Ker je vrednost $\Delta \bar{H}$ pozitivna, vrednost topnostnega koeficienta z višanjem temperature pada, kar je za kisik prikazano na sliki 15.7B.

15.7 Barometrska formula in Boltzmanov faktor

Pri mehaniki smo v poglavju o hidrostatskem tlaku omenili, da se tlak v plinih z višino ne spreminja linearno kot v vodi, ampak eksponentno (plini so v nasprotju z vodo stisljivi). Oboroženi z znanjem termodinamike poskusimo to odvisnost tudi izračunati (kasneje bomo zelo podoben račun ponovili pri računanju elektrokemijskega potenciala in prekomembranske napetosti).

Predstavljajmo si idealni plin v prostoru brez vetra in pri dani temperaturi (slika 15.9A). V ravnovesju mora biti kemijski potencial plina povsod enak (če kemijski potencial plina ne bi bil povsod enak, bi molekule plina tekale k nižjemu kemijskem potencialu in sistem ne bi bil v ravnovesju). Spomnimo se, kako je kemijski potencial plina odvisen od višine (en. 15.6) ter od tlaka (en. 15.7) in zapišimo, da je kemijski potencial na višini z enak kot kemijski potencial na višini 0:

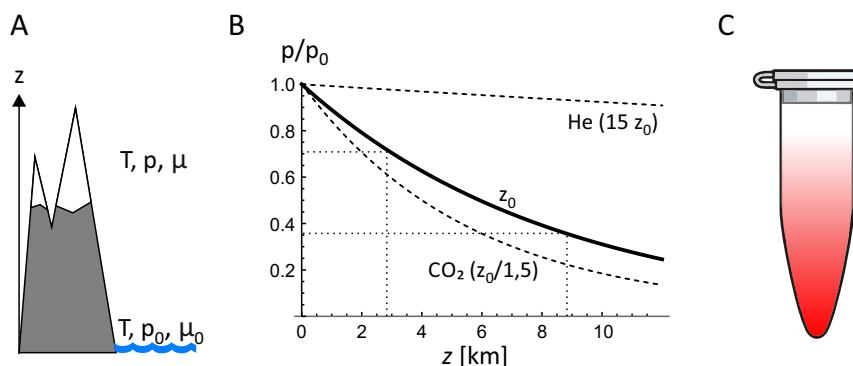
$$Mgz + RT \ln \frac{p}{p_0} = 0. \quad (15.13)$$

Pri tem prvi člen opisuje odvisnost molarne potencialne energije od višine (en. 15.6), drugi člen pa je entropijski (en. 15.7), kemijski potencial na višini 0 pa je kar 0. Ko zgornjo enačbo antilogaritmujemo, dobimo t. i. *barometrsko formulo*, ki opisuje odvisnost tlaka zraka od višine:

$$p = p_0 e^{-Mgz/RT} = p_0 e^{-z/z_0}, \quad (15.14)$$

kjer je p_0 tlak na višini 0, $z_0 = \frac{RT}{Mg}$ pa je značilna dolžina eksponentnega padanja, ki je sorazmerna temperaturi in obratno sorazmerna molekulski masi plina, $z_0 = \frac{RT}{Mg}$ (slika 15.9B).

Obnašanje značilne dolžine je v skladu z našim razumevanjem proste entalpije. Sistem po eni strani teži k čim nižji energiji, po drugi k čim višji entropiji, temperatura sistema pa to ravnotežje uravnava. Pri nizki temperaturi je



Slika 15.9: Prikaz barometrijske formule. **A)** Pri gladini morja (na višini $z = 0$) je tlak plina p_0 , njegov kemijski potencial pa μ_0 . Na višini z je tlak plina p , kemijski potencial pa μ . V termodinamskem ravnovesju je kemijski potencial plina povsod enak, $\mu = \mu_0$. **B)** Po barometrijski formuli pada tlak eksponentno z višino z značilno dolžino $z_0 = RT/Mg$. Za zrak pri sobni temperaturi ($M \approx 29$ g/mol in $T \approx 293$ K) je $z_0 \approx 8,5$ km. Črtkani črti označujeta tlak na Mount Everestu ($p \approx e^{-1}p_0 \approx 0,37p_0$) in na Triglavu ($p = e^{-2864/8500}p_0 \approx 0,71p_0$). Značilna dolžina z_0 bi bila pri višji temperaturi daljša, pri večji masi plina pa manjša. Graf prikazuje tudi relativno padanje tlaka za helij, ki ima približno 15 krat manjšo maso od zraka, ter za ogljikov dioksid, ki ima približno 1,5 krat večjo maso. **C)** Analogno spreminjanju zračnega tlaka v atmosferi tudi pri ultracentrifugaciji molekul v epruveti ne nastane ostra koncentracijska meja ampak eksponentna.

entropijski člen majhen v primerjavi z entalpijo in sistem bo najnižjo G dosegel v stanju s čim nižjo entalpijo. Pri visoki temperaturi bo člen TS prevladal nad H in sistem bo najnižjo G dosegel tako, da se bo premaknil proti stanju s čim večjo entropijo. Nižja, kot bo temperatura, bolj bodo torej molekule plina v prostoru »padle na tla,« oziroma krajša bo značilna dolžina z_0 . Višja, kot bo temperatura, bolj razmetane bodo molekule po vsem prostoru in daljša bo z_0 .

Značilna dolžina z_0 je obratno sorazmerna molekulski masi plina, zato je za helij približno osem krat večja kot za dušik in kisik. Molekule helija bodo pri dani temperaturi bolj razmetane po prostoru kot molekule težjih plinov. Ker parcialni tlak helija z višino pada počasneje, ga je na velikih višinah relativno več kot težjih plinov. Helij zato bolj »izpareva« iz atmosfere v vesolje, zaradi česar bomo po nekaterih ocenah v nekaj sto letih porabili vso njegovo zalogo na Zemlji.

Značilna dolžina za zrak pri sobni temperaturi je približno $z_0 = 8500$ m

(slika 15.9B), kar slučajno ustreza višini Mount Everesta. V vsakdanjem življenju padanja zračnega tlaka z višino niti ne opazimo, saj je tlak pri npr. 5 m visokem stropu sobe praktično enak kot pri tleh (v tem primeru je razmerje tlakov $p/p_0 = e^{-5/8500} = 0,9994$). Po drugi strani je tlak na najvišji gori od tlaka pri gladini morja manjši ravno za faktor $e \approx 2,7$.

V Barometrski formuli se skriva pomembna splošna značilnost termodinamskih sistemov: v ravnovesju se snov med različnimi možnimi stanji porazdeli glede na njihovo energijo po t. i. *Boltzmannovi porazdelitvi*, po kateri je delež zasedenost stanja i z energijo W_i sorazmeren faktorju $e^{-W_i/k_B T}$ (ta faktor imenujemo tudi *Boltzmannov faktor*). Najbolj zasedena so torej vedno stanja z najnižjo energijo, proti višjim energijam pa se bo zasedenost manjšala eksponentno. Z višanjem temperature bi se zasedenost stanj izenačevala, pri absolutni ničli pa bi bile vse molekule v stanju z najmanjšo energijo. Če ima npr. protein več možnih konformacij, bodo v raztopini z veliko proteini vedno prisotne vse konformacije, ki pa bodo porazdeljene v skladu z Boltzmannovo porazdelitvijo: največ proteinov bo v konformaciji z najnižjo energijo, proteinov v konformacijah z višjimi energijami pa bo eksponentno vse manj. Intuitivno smo se s porazdelitvijo snovi med različnimi stanji srečali že pri razmišljanju o ravnotežju med energijskimi in entropijskimi efekti pri prosti entalpiji (slika 15.3).

Topljenci v raztopini se s stališča entropije obnašajo podobno kot plini, zato lahko pričakujemo, da se bo koncentracija topljenca v epruveti ravno tako nižala eksponentno z višino. Pri raztopinah moramo sicer upoštevati tudi vzgon, a vseeno bo značilna dolžina Boltzmannovega faktorja približno sorazmerna RT/Mg . V praksi je ponavadi značilna dolžina veliko daljša od velikosti epruvete in razlike koncentracij niti ne opazimo. Drugače je, če s pomočjo ultracentrifuge pospešek povečamo (pri tem ne smemo pozabiti, da pospešek v epruveti z oddaljenostjo od osi centrifuge narašča, $a_r = r\omega^2$, primer 2.3). V epruveti ne nastane ostra koncentracijska meja, ampak se koncentracija spreminja postopoma, v skladu z Boltzmannovo porazdelitvijo (slika 15.9C). To moramo upoštevati pri merjenju sedimentacijskega ravnovesja pri ultracentrifugaciji raztopin proteinov, ki je ena najstarejših metod za določanje molske mase proteinov oz. za sledenje njihovi oligomerizaciji.

15.8 Ravnotežje v kemijskih reakcijah

Pred zaključkom poglavja o prosti entalpiji še dokončno povežimo fiziko in kemijo. V ta namen si oglejmo, kako skozi oči termodinamike razložimo pre-

proste kemijske reakcije. Kot primer si predstavljajmo preprosto reakcijo pri kateri se a molekul vrste A spoji z b molekulami vrste B, pri čemer nastane spojina C:



Entalpijsko je vezava med molekulami A in B ugodna, saj se ob tem ustvari vezi. Zaradi termičnega gibanja se molekule gibljejo po prostoru in če se sreča prava kombinacija molekul, se vezi ustvari spontano. Reakcija pa kljub temu ne poteče v celoti v desno, saj se med termičnim gibanjem dogaja tudi, da zaradi trkanja molekul C le-te razpadajo nazaj v A in B. S stališča entropije je zgornja reakcija neugodna, saj se ob nastajanju molekul C zmanjšuje entropija sistema (predpostavimo, da gre za preproste molekule brez veliko notranjih prostostnih stopenj). Pričakujemo, da se z zviševanjem temperature ravnotežje reakcije seli v levo.

Na ravnoesje pogledimo še s stališča kemijskih potencialov. Sistem bo ravnoesje dosegel takrat, ko bo celotna prosta entalpija sistema minimalna. Celotno entalpijo sistema zapišimo s pomočjo kemijskih potencialov:

$$G = n_A \mu_A + n_B \mu_B + n_C \mu_C . \quad (15.16)$$

Med potekom reakcije se spreminja število molov vsake od spojin, pri čemer iz enačbe za reakcijo (en. 15.15) sledi, da se ob povečanju količine snovi C za $\Delta n_C = \Delta n$, količina snovi A zmanjša za a -krat toliko, $\Delta n_A = -a \Delta n$, količina snovi B pa se zmanjša za b -krat toliko, $\Delta n_B = -b \Delta n$. Med potekom reakcije se torej prosta entalpija (en. 15.16) spremeni za

$$\Delta G = -(a \mu_A + b \mu_B - \mu_C) \Delta n . \quad (15.17)$$

Reakcija bo torej tekla v desno (spojina C bo nastajala), če bo izraz v oklepaju pozitiven. V ravnoesju bo prosta entalpija dosegla minimum in se ne bo več spreminjala, zato bo v ravnoesju izraz v oklepaju enak 0:

$$a \mu_A + b \mu_B - \mu_C = 0 . \quad (15.18)$$

V zgornji pogoj vstavimo izraze za kemijske potenciale snovi (spomnimo se izraza za kemijski potencial topljenca, $\mu = \mu_0 + RT \ln \frac{c}{c_0}$, en. 15.8):

$$a(\mu_{A0} + RT \ln \frac{c_A}{c_0}) + b(\mu_{B0} + RT \ln \frac{c_B}{c_0}) - (\mu_{C0} + RT \ln \frac{c_C}{c_0}) = 0 . \quad (15.19)$$

V kemijo bomo prestopili, če koncentracije zapišemo v trdih oklepajih ($c_A \rightarrow [A]$...) in se dogovorimo, da bomo vse koncentracije pisali v enoti mol/l (enote

v logaritmih nas torej ne bodo več skrbele in upoštevali bomo, da je takem zapisu $c_0 = 1$ in ga lahko izpustimo). Račun nadaljujemo tako, da člene s konstantami prestavimo na desno stran enačbe:

$$-RT(\ln[C] - a \ln[A] - a \ln[B]) = \mu_{C0} - a\mu_{A0} - b\mu_{B0} . \quad (15.20)$$

Desna stran enačbe je konstantna in jo imenujemo standardna reakcijska molarna prosta entalpija, $\Delta \overline{G}_r^\circ$. Združimo še člene z logaritmi:

$$-RT \ln \frac{[C]}{[A]^a [B]^b} = \Delta \overline{G}_r^\circ , \quad (15.21)$$

prestavimo člen z RT na drugo stran enačbe ter vse skupaj antilogaritmiramo in končno dobimo znani kemijski opis ravnotežne reakcije:

$$\frac{[C]}{[A]^a [B]^b} = e^{-\frac{\Delta \overline{G}_r^\circ}{RT}} = K . \quad (15.22)$$

Konstanto K imenujemo *konstanta ravnotežja*. Vrednost konstante ravnotežja je več kot ena, če je standardna reakcijska molarna prosta entalpija negativna (to je, če se ob vezavi A in B v C sprosti več vezavne entalpije, kot je izguba zaradi zmanjšanja entropije). V tem primeru se z višanjem temperature konstanta ravnotežja manjša in se ravnotežje reakcije seli v levo (sistem se seli proti stanju z večjo entropijo). Z zgornjo izpeljavo smo vstopili na obširno in zanimivo področje kemije, da pa se v njem ne izgubimo, se sedaj vseeno raje vrnimo nazaj v fiziko.

Poglavje 16

Transport toplote in snovi

Termodinamiko bomo zaključili z opisom prevajanja toplote med telesi z različno temperaturo in pretakanjem snovi med predelki. Zanimivo bo spoznanje, da lahko zelo različne transportne pojave (transport toplote, snovi, električnega naboja ...) vse opišemo na podoben način in da pri mnogih takih pojavih velja Ohmov zakon, ki smo ga spoznali že v osnovni šoli pri opisovanju električnega toka.

16.1 Prevajanje toplote

V vsakdanjem življenju se s prevajanjem toplote pogosto srečujemo, zato imamo o njem dobro intuitivno predstavo. Zamislimo si na primer, da se pozimi znajdemo v hladnem prostoru. Vsi vemo, da nas bo v takem primeru zeblo tem bolj, čim hladnejši je prostor. Nadalje vemo, da nas bodo pred izgubo toplote varovala primerna oblačila – zeblo nas bo manj, če si nadenemo čim debelejšo izolacijo iz čim boljšega toplotnega izolatorja (debela puhasta jakna bo boljša od tanke platnene). Nazadnje pa tudi vemo, da se ob hudem mrazu intuitivno zvijemo v klobčič, s čimer si zmanjšamo površino, preko katere izgubljammo toploto.

Izkaže se, da je naše intuitivno razumevanje prevajanja toplote povsem v skladu z natančnim fizikalnim opisom. Količina, ki opisuje, koliko toplote izgubljammo na časovno enoto, se imenuje *toplotni tok*, ki ga z enačbo definiramo kot:

$$P = \frac{Q}{t} \quad (16.1)$$

V skladu z zgornjim opisom je toplotni tok med dvema telesoma, ki sta v toplotnem stiku, sorazmeren razliki temperatur med telesoma (ΔT) in površini toplotnega stika (S) ter obratno sorazmeren debelini izolacije med telesoma (L), na toplotni tok pa vpliva tudi, iz katere snovi je izolacija. Velja torej:

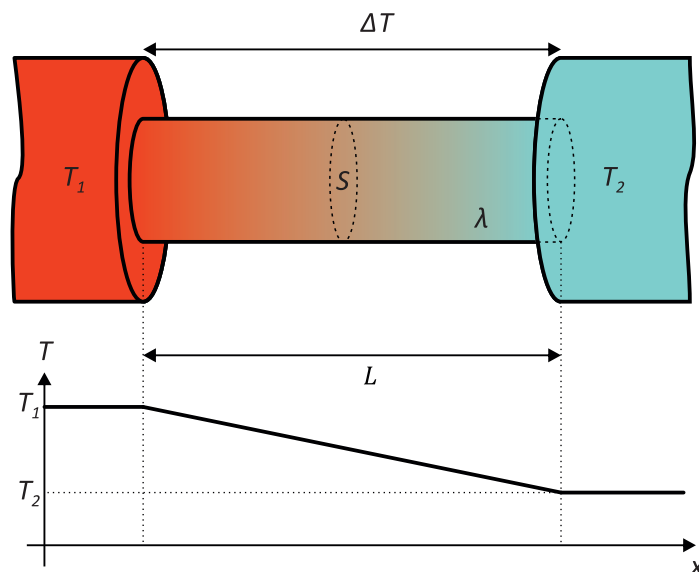
$$P = \frac{\lambda S}{L} \Delta T \quad (16.2)$$

pri čemer smo z λ označili *toplotno prevodnost* snovi, iz katere je narejena izolacija (uporablja se tudi izraz *koeficient toplotne prevodnosti*). Čim boljši toplotni izolator je snov, tem manjša je njena vrednost λ . Vrednosti toplotne prevodnosti za nekatere tipične materiale so navedene v tabeli 16.1. V tabeli vidimo, da je zrak zares odličen toplotni izolator, več kot 20-krat boljši od vode. Dober toplotni izolator je tudi prazen prostor (vakuum), saj se v njem toplota s pomočjo termičnega gibanja snovi sploh ne more prenašati. Kasneje bomo v poglavju o elektromagnetnem valovanju videli, da se lahko toplota preko vakuumu vseeno prenaša v obliki termičnega sevanja.

snov	aluminij	voda	les	volna	stiropor	zrak
λ [W/mK]	240	0,6	0,15	0,039	0,033	0,026

Tabela 16.1: Okvirne vrednosti toplotne prevodnosti nekaterih snovi (povzeto po [13]). Zrak je odličen toplotni izolator. Toplotna prevodnost telesnih tkiv je ponavadi sorazmerna njihovi vsebnosti vode in je torej malo manjša od toplotne prevodnosti vode.

Enačba 16.2 velja v stacionarnem primeru, tj. če se temperatura teles v toplotnem stiku ne spreminja. V takem primeru se tudi toplotni tok s časom ne spreminja, poleg tega pa se temperatura v izolaciji med telesoma spreminja kar linearno z razdaljo od enega do drugega telesa (slika 16.1). Za topla telesa v hladnem okolju je dolgotrajnejše stacionarno stanje možno le, če se v njih neprestano sprošča nova toplota, ki nadomešča oddano. Ko si želimo pozimi prostor ogreti na določeno temperaturo, mora biti v njem izvor toplote z močjo, ki je enaka toplotnemu toku, ki se izgublja preko sten prostora. Podobno moramo toplokrvna bitja uravnnavati svojo stalno telesno temperaturo z neprestanim uravnovešanjem oddane toplote in toplote, ki jo v telesu proizvedemo z metabolizmom.



Slika 16.1: Toplotni tok med telesom z visoko temperaturo (T_1) in telesom z nizko temperaturo (T_2) je sorazmeren razliki temperatur ($\Delta T = T_1 - T_2$), površini toplotnega stika (S), ter toplotni prevodnosti stika (λ), ter obratno sorazmeren debelini izolacije (L). Če se temperaturi teles s časom ne spreminjata, temperatura v izolaciji linearno pada od T_1 do T_2 .

16.2 Transport snovi z difuzijo

V prejšnjem razdelku smo opisali, kako razlika v temperaturah povzroči toplotni tok, ki teče od toplejšega proti hladnejšemu telesu. Spomnimo se, da je na molekularnem nivoju prehajanje toplote povezano s termičnim gibanjem molekul, ki si z naključnim medsebojnim trkanjem izmenjujejo energijo. Z naključnim trkanjem med molekulami je povezana tudi difuzija snovi v raztopini (o njej smo govorili že v razdelku 12.2) in izkaže se, da pri difuziji veljajo podobne zakonitosti kot pri prevajanju toplote, le da pri difuziji govorimo o snovnem (masnem) toku, ki ga poganja razlika v termodinamskih potencialih oz. koncentracijski razlika (spomnimo se, da je v raztopinah je termodinamski potencial v prvi vrsti odvisen od koncentracije snovi). Analogno z enačbo 16.2 lahko za stacionarni pretok snovi med dvema predelkoma različnima koncentracijama snovi zapišemo

$$\Phi_n = \frac{DS}{L} \Delta c, \quad (16.3)$$

kjer snovni tok $\Phi_n = n/t$ pove, koliko molov snovi se pretoči v določenem času (enota je mol/s), S je površina preko katere teče snov, L je razdalja po kateri teče snov, D je difuzijska konstanta snovi, ki smo jo srečali že v en. 12.3, Δc pa je razlika koncentracij med predelkoma (v enoti mol/l). Difuzijska konstanta torej pri pretoku snovi igra podobno vlogo kot termična prevodnost pri toplotnem toku - čim manjša je difuzijska konstanta, tem manjši bo snovni tok, do katerega pride zaradi razlike v koncentracijah.

16.3 Transport preko bioloških membran

V bioloških sistemih se pomemben del transporta snovi vrši preko celičnih membran, katerih glavna vloga je razmejevanje različnih funkcionalnih predelkov in regulacija transporta molekul med njimi. Celične membrane so zelo tanke (L je zelo majhen, le nekaj večji od velikosti povprečne molekule), hkrati pa je v njih difuzija zapletena in jo težko opišemo le s preprosto difuzijsko konstanto. Za opisovanje difuzije snovi preko membrane se zato ponavadi ne uporablja enačbe 16.3, temveč malo drugačen zapis:

$$\Phi_n = PS\Delta c, \quad (16.4)$$

kjer je P *prepustnost membrane*, ki ima enoto m/s (kljub temu, da ima prepustnost enako enoto kot hitrost, gre za dve povsem različni količini). Hitrost difuzije preko membrane je torej odvisna od razlike koncentracij, površine membrane in njene prepustnosti. Prepustnost membrane je lahko različna za različne snovi, poleg tega pa jo lahko celice z različnimi mehanizmi tudi regulirajo - spomnimo se npr., da se med nastankom akcijskega potenciala prepustnost membrane za kalijeve in natrijeve ione zelo spremeni. Kasneje bomo pri obravnavanju električnih pojavov spoznali, da gonilna sila za difuzijo ionov preko membrane ni le razlika njihovih koncentracij temveč tudi prekomembranska električna napetost.

Omenimo naj še, da v celicah poleg pasivne difuzije, ki jo opisujemo z enačbo 16.4, obstajata še dva načina transporta snovi preko membrane. Prvi je t. i. *olajšani transport*, pri katerem prehajanje snovi preko membrane poteka s pomočjo različnih membranskih proteinov, t. i. prenašalcev. Olajšani transport je tudi pasiven (snovni tok teče v smer proti nižji koncentraciji), a ni odvisen le od razlike koncentracij, temveč tudi od dostopnosti prostih prenašalcev. Z višanjem koncentracijske razlike se tak transport saturira (tj. doseže vrednost, preko katere ne more), saj v membrani zmanjka prostih prenašal-

cev. Druga pomembna vrsta prekomembranskega transporta je t. i. *aktivni transport*, pri katerem celice z različnimi mehanizmi snov črpajo v smeri proti večji koncentraciji, a za to porabljajo energijo (največkrat v obliki molekul ATP). Znan primer takega transporta so natrij-kalijeve črpalke, ki vzdržujejo prekomembranski gradient teh ionov.

16.4 Enoten pogled na transportne pojave, Ohmov zakon

Pri obravnavanju tekočin po ceveh smo omenili, da je pretakanje tekočin analogno pretakanju električnega naboja, ter da je Hagen–Poiseuillev zakon (enačba 9.11) analogen Ohmovemu zakonu iz elektrike. Tudi pogled na opis toplotnega toka (enačba 16.2) in opis toka snovi (enačbi 16.3 in 16.4) razkrije enako podobnost. V vseh primerih namreč velja, da je tok (električni, toplotni, prostorninski ...) sorazmeren količini, ki tok poganja (električna napetost, razlika temperatur, razlika tlakov ...), ter obratno sorazmeren upor. Ohmov zakon za toplotni tok in tok snovi lahko torej zapišemo

$$P = \frac{\Delta T}{R_t} \quad \text{in} \quad \Phi_n = \frac{\Delta c}{R_d}, \quad (16.5)$$

kjer je R_t toplotni upor:

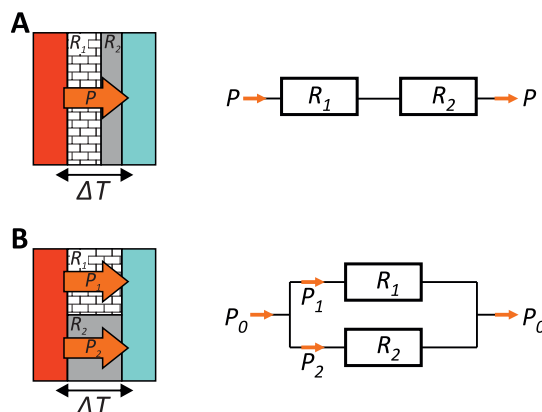
$$R_t = \frac{L}{\lambda S}, \quad (16.6)$$

upor za difuzijski tok snovi preko membrane pa je

$$R_d = \frac{1}{PS}. \quad (16.7)$$

Analogija z Ohmovim zakonom nam pomaga, ko tokovi ne tečejo po homogeni snovi, temveč tečejo vzporedno ali zaporedno po različnih snoveh. V takih primerih lahko namreč brez težav izračunamo skupni upor sistema: upor zaporednih upornikov se seštevata (za skupni upor velja: $R_S = R_1 + R_2 + \dots$), upor vzporednih uporov pa izračunamo iz seštevka obratnih vrednosti (za skupni upor velja: $1/R_S = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots$). Poleg tega v vseh naštetih

primerih velja, da se celotna količina toka ohranja (niti električni naboj niti toplota niti snov ne morejo izginiti ali nastati iz nič), zato skozi zaporedno vezana upornika teče enak tok (slika 16.2).



Slika 16.2: Seštevanje uporov pri toplotnem toku. A) Če sta med toplim in hladnim telesom dve plasti različne izolacije, toplotni tok teče najprej skozi eno in nato še skozi drugo plast. Gre torej za »zaporedno vezavo« izolaciji in velja $P = \Delta T / R_S$, kjer je skupni upor obeh izolacij $R_S = R_1 + R_2$. B) Če sta izolaciji ena zraven druge, toplotni tok skozi njiju teče vzporedno. Izolaciji sta torej »vezani vzporedno,« zato velja $P_0 = P_1 + P_2$ ter $P_0 = \Delta T / R_S$, kjer skupni upor izračunamo iz $1/R_S = 1/R_1 + 1/R_2$.

16.5 Približevanje ravnovesju

Če v hladnem okolju vroče telo ne proizvaja svoje toplote, se ohlaja dokler ne doseže ravnovesja oz. temperature okolice. Na začetku je razlika temperatur med telesom in okolico največja, zato telo toploto takrat izgublja najhitreje. Med ohlajanjem se razlika temperatur manjša, zato telo izgublja vedno manj toplote (enačba 16.2) in se tudi ohlaja vse počasneje. Iz tega lahko sklepamo, da je ohlajevanje proces, ki je eksponentno odvisen od časa: na začetku poteka hitro, nato pa vse počasneje. Podobno velja tudi za segrevanje hladnega telesa na temperaturo okolice. Podrobnejši račun pokaže (MaFijski primer 16.1), da za približevanje ravnovesju velja

$$\Delta T(t) = \Delta T_0 e^{-t/\tau}, \quad (16.8)$$

pri čemer je ΔT temperaturna razlika med telesom in okolico, τ pa je značilni čas ohlajanja oz. ogrevanja in je enak produktu toplotne kapacitete telesa ter upornosti izolacije:

$$\tau = R_t C . \quad (16.9)$$

Enačba se ujema z našo predstavo o ohlajanju oz. segrevanju teles: približevanje končni temperaturi je tem počasnejše (τ je tem večji), čim boljša je izolacija in čim večjo toplotno kapaciteto ima telo. Toplotna kapaciteta je namreč povezana s količino toplote, ki jo mora telo oddati, da se ohladi (enačba 13.5, ki smo jo spoznali pri kalorimetriji) – vsi si dobro predstavljamo, da imajo majhna telesa malo toplotno kapaciteto in se bodo zato ohlajala hitreje od velikih teles.

Podobno kot za toplotni tok velja tudi za pretok snovi. Če koncentracija snovi v nekem predelku ni enaka koncentraciji snovi v okolici in se snov z okolico lahko izmenjuje, se bo na začetku izmenjevala hitro, potem pa vedno počasneje, saj se bo s časom manjšala razlika koncentracij, ki tok snovi poganja. Tudi tu gre torej za eksponenten proces. Podrobnejši račun pokaže, da se razlika koncentracij med predelkom in okolico s časom spreminja po enačbi

$$\Delta c(t) = \Delta c_0 e^{-t/\tau} , \quad (16.10)$$

pri čemer je značilni čas približevanja ravnovesju enak

$$\tau = R_d V . \quad (16.11)$$

V tem primeru je torej približevanje tem počasnejše, čim večji je difuzijski upor in čim večja je prostornina predelka. Prostornina tu igra podobno vlogo kot toplotna kapaciteta pri izmenjevanju toplote – obe opisujeta, kako velika zaloga (toplote oz. snovi) se mora med približevanjem ravnovesju izmenjati z okolico.

MaFijski primer 16.1: približevanje ravnovesju

Pokažimo, da je približevanje ravnovesju eksponenten proces, ki ga lahko opišemo z enačbama 16.8 in 16.9. Račun bomo naredili le za izmenjevanje toplote, analogen primer za izmenjevanje snovi lahko bralec za vajo opravi sam.

Pred začetkom računanja razmislimo, kaj se dogaja z vročim telesom s temperaturo T_1 , ki je v hladni okolici s temperaturo T_2 . Zaradi razlike temperatur telo izgublja toploto ter se zaradi tega ohlaja. Okolica je v primerjavi s telesom zelo velika, zato se

zaradi prejete toplote ne bo ogrela in bo temperatura T_2 konstantna. Temperaturna razlika se s časom manjša, zato se manjšal tudi toplotni tok, ki ga telo izgublja (količina toplote na sekundo) in posledično se bo telo ohlajevalo vedno počasneje. Ker temperaturna razlika vpliva na velikost toplotnega toka, ta pa vpliva nazaj na hitrost zmanjševanja temperaturne razlike, račun ne bo enostaven. Pa začnimo. Zaradi izgubljanja toplote se telesu temperatura niža po enačbi 13.5:

$$Q = C\Delta T_1, \quad (16.12)$$

pri čemer pa temperatura vplova nazaj na hitrost izgubljanja toplote, kar opisuje Ohmov zakon (enačbi 16.2 in 16.6):

$$P = \frac{Q}{t} = -\frac{T_1 - T_2}{R_t}t, \quad (16.13)$$

pri čemer je minus v enačbi zato, ker je pri pozitivni temperaturni razliki toplotni tok negativen (telo toploto izgublja). Enačbi sta torej medsebojno sklopljeni, poleg tega pa se količina toplote, ki jo telo izgublja, vseskozi manjša. Pri reševanju moramo enačbi zato prepisati v diferencialno obliko, ki ne predpostavlja konstantnega toplotnega toka. Upoštevamo torej, da telo v vsakem kratkem času (dt) izgubi le malo toplote (dQ), kar povzroči majhno znižanje temperature (dT_1), toplotni tok v tem kratkem času pa je $P = dQ/dt$. Enačbi se tako zapišeta kot

$$dQ = C dT_1 \quad \text{in} \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{T_1 - T_2}{R_t} \quad (16.14)$$

Enačbi lahko sedaj združimo, pri čemer pa zaradi lažjega računanja najprej vpeljimo novo spremenljivko za razliko temperatur in njeno majhno spremembo:

$$u = T_1 - T_2 \quad \text{in} \quad du = dT_1. \quad (16.15)$$

Pri tem smo upoštevali, da je T_2 konstantna in je zato majhna sprememba u kar enaka majhni spremembi T_1 . Če združimo enačbi 16.14, tako dobimo

$$C \frac{du}{dt} = -\frac{1}{R} u. \quad (16.16)$$

Iz te enačbe je jasno vidno, da je hitrost spreminjanja temperaturne razlike sorazmerna temperaturni razliki in izkušeni matematiki v taki enačbi že vidijo eksponentno odvisnost. Do tega rezultata pridemo tako, da na eno stran enačbe zapišemo vse člene, ki vsebujejo u , na drugo pa vse člene s t , hkrati pa na eno stran postavimo tudi vse konstante:

$$-RC \frac{du}{u} = dt. \quad (16.17)$$

To enačbo sedaj integriramo od časa 0 (temperaturno razliko ob tem času zapišimo z u_0) do poljubnega časa t (temperaturno razliko ob tem času zapišimo kot $u(t)$):

$$-RC \int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{u} = \int_0^t dt. \quad (16.18)$$

Rezultat integracije je

$$-RC (\ln u(t) - \ln u_0) = t , \quad (16.19)$$

oziroma

$$-RC \ln \frac{u(t)}{u_0} = t . \quad (16.20)$$

Nazadnje še prestavimo produkt $-RC$ na drugo stran enačbe in enačbo antilogaritimiramo:

$$u(t) = u_0 e^{-t/RC} . \quad (16.21)$$

Če upoštevamo še $u = \Delta T$ in $\tau = RC$, dobimo ravno enačbi [16.8](#) in [16.9](#).

Del IV

Električni in magnetni pojavi

Poglavje 17

Osnove elektrostatiike

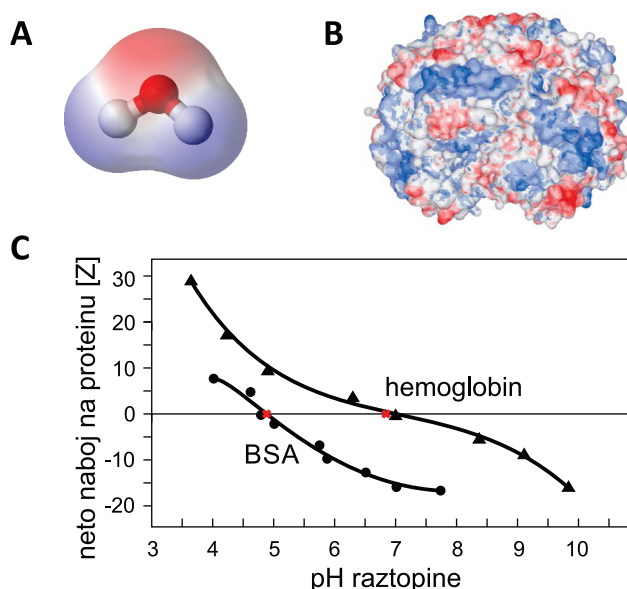
17.1 Električni naboj v bioloških sistemih

Poleg mase je električni naboj ena od najpomembnejših lastnosti osnovnih gradnikov narave. V nasprotju z maso je lahko naboj tudi negativen – med osnovnimi delci ima npr. elektron negativen naboj, proton pozitivnega, nevtron pa je nevtralen oz. nima naboja. Po absolutni vrednosti sta naboja elektrona in protona enaka t. i. *osnovnemu naboju*, $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}$ As. Enota za naboj je torej amper-sekunda, pri čemer je enota amper (A) ena od osnovnih enot pri elektriki (kasneje bomo videli, da z njo merimo električno tok).

Enaki naboji se med seboj odbijajo in nasprotni privlačijo, vendar v vsakdanjem življenju te sile redko opazimo, saj je snov ponavadi sestavljena iz enakega števila pozitivnih in negativnih nabojev ter je navzven električno nevtralna. Povsem drugače je v svetu molekul, saj tam vlada ravno električna sila med naboji, ki na majhni skali ne morejo biti povsem enakomerno porazdeljeni. Prav zaradi električne sile so elektroni in protoni ujeti v atome, električna sila drži skupaj atome v molekulah in zaradi električne sile se molekule združujejo v snovi.

Električno nabiti atomi in molekule se imenujejo *ioni*: če je v njih presežek elektronov nad protoni, se imenujejo *anioni*, v nasprotnem primeru pa jih imenujemo *kationi*. Kuhinjska sol npr. v vodi disociira v natrijev kation (Na^+) in klorov anion (Cl^-). Mnoge molekule so sicer električno nevtralne, a je naboj v njih razporejen nesimetrično in so zato *polarne*. Taka je npr. molekula vode, pri kateri je stran s kisikom malo bolj negativna od strani z vodikoma (slika 17.1A). Poseben primer takih molekul so t. i. ioni-dvojčki oz. zwitterioni, pri katerih je ena stran nabita z enim, druga pa z nasprotnim nabojem.

Električni naboj označimo z e , število osnovnih nabojev na nekem delcu pa z valenco iona Z ($e = Ze_0$). Elektron in Cl^- imata tako $Z = -1$, nevtron $Z = 0$, proton in Na^+ imata $Z = 1$, ion magnezija Mg^{2+} pa $Z = 2$.



Slika 17.1: Shematski prikaz razporeditve naboja A) na molekuli vode in B) na proteinu hemoglobinu pri nevtralni vrednosti pH. Z modro barvo so prikazani pozitivno nabiti deli, z rdečo pa negativno nabiti. C) Odvisnost naboja na proteinu od pH raztopine za hemoglobin (trikotniki) in serumski albumin (BSA, krogi). Izoelektrična točka hemoglobina je približno 6,8, BSA pa približno 4,7.

Na bioloških molekulah je razporeditev naboja lahko še mnogo bolj zapletena, saj so te molekule velike in imajo lahko veliko nabitih ali polarnih skupin (slika 17.1B). Poleg tega lahko mnoge biološke molekule izmenjujejo protone z raztopino, zato je njihov naboj odvisen od pH raztopine. Spomnimo se namreč, da je pH raztopine merilo za koncentracijo vodikovih ionov v raztopini:

$$\text{pH} = -\log c_{\text{H}^+} \quad (17.1)$$

pri čemer moramo v zgornjo enačbo vstaviti molarno koncentracijo.

Pri proteinih protone z raztopino izmenjujejo predvsem proste amino- ($-\text{NH}_3^+ \rightleftharpoons -\text{NH}_2 + \text{H}_{(\text{aq})}^+$) in karboksilne skupine ($-\text{COOH} \rightleftharpoons -\text{COO}^- + \text{H}_{(\text{aq})}^+$). Pri DNA je nosilka naboja fosfatna skupina v verigi (PO_4^-), zaradi česar

ima pri nevtralnem pH vsak bazni par dva negativna naboja.

Pri nizkem pH je v raztopini veliko protonov, zaradi česar se jih nekaj preseli tudi na ustrezne skupine na makromolekulah, ki zato postanejo pozitivno nabite. Obratno se zgodi pri visokem pH – protoni se iz molekul preselijo v raztopino, molekule pa ostanejo negativno nabite. Naboj na makromolekulah zato ponavadi pada z naraščanjem pH, točko v kateri je naboj na molekuli enak nič pa imenujemo *izoelektrična točka* (slika 17.1C). DNA je npr. pri nevtralnem pH negativno nabita, njena izoelektrična točka pa je približno pri pH 5. Tudi glave mnogih lipidnih molekul so nabite; glave fosfolipida fosfatidilserin (PS) npr. pri nevtralnem pH nosijo en negativni naboj (njihova izoelektrična točka je pri približno pH 1).

17.2 Sila med točkastima nabojema

Ena od osnovnih lastnosti električnih nabojev je, da se med seboj privlačijo oz. odbijajo z električno silo. Električno silo med dvema nabojema v praznem prostoru opisuje znameniti Coulombov zakon

$$F_e = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (17.2)$$

kjer je r razdalja med nabojema e_1 in e_2 , ϵ_0 pa je influenčna konstanta ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$). Naboja z enakim predznakom se odbijata, z nasprotnim pa privlačita.

Če je v prostoru več nabojev, Coulombova sila deluje med vsakim parom nabojev, pri čemer prisotnost ostalih nabojev ne vpliva na velikost sile med dvema nabojema. Coulombova sila je torej aditivna: sila na izbran naboj je vsota sil vseh ostalih nabojev v prostoru na ta naboj. Če bi npr. želeli ugotoviti, kako se bo nabita makromolekula obnašala v bližini nabite celične membrane, bi v principu to lahko izračunali s pomočjo enačbe 17.2. Zaradi velikega števila nabojev na membrani, s katerimi bi morali izračunati Coulombovo silo, pa bi bil tak račun precej zahteven in ga v praksi ne moremo enostavno izvesti. Na srečo si lahko pri opisovanju električnih sil v sistemih z velikim številom nabojev pomagamo s konceptom električnega polja, ki ga bomo spoznali v prihodnjem razdelku.

17.3 Električno polje

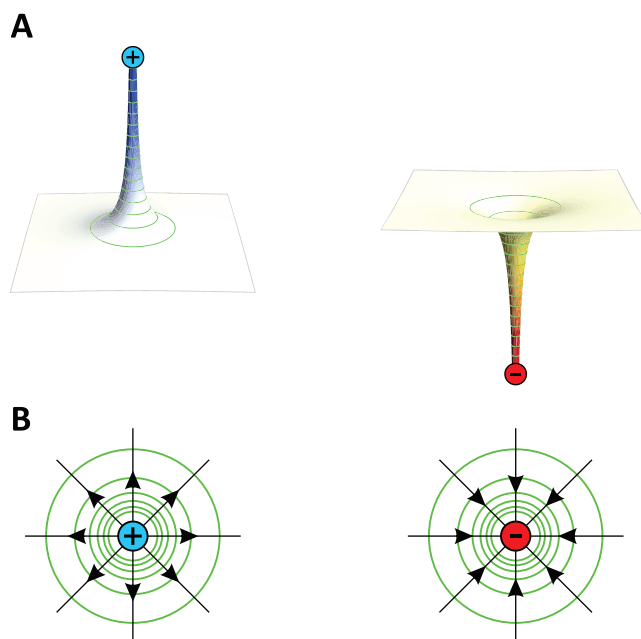
Interakcije med nabitimi delci, ki jih sicer opisuje Coulombova sila (en. 17.2), lahko zelo nazorno opisujemo tudi s pomočjo koncepta *električnega polja*. Predstavljamo si lahko namreč, da vsak naboj v svoji okolici ustvarja električno polje in da to električno polje nato s silo deluje na druge naboje. Na prvi pogled se nam mogoče zdi, da je koncept polja nepotrebna komplikacija, a do konca poglavja bomo spoznali, da nam koncept polja zelo olajša razumevanje mnogih električnih pojavov, nepogrešljiv pa je tudi pri razumevanju magnetizma. V tem razdelku bomo električno polje opisali na primeru polja v okolici točkastega naboja, v nadaljevanju pa bomo opisali še polje v drugih primerih.

Najprej se spomnimo poglavja pri mehaniki, v katerem smo pokazali, da lahko na obnašanje masnih teles v gravitacijskem polju enakovredno gledamo skozi oči sile ali energije. Električna sila je podobno kot sila teže tudi konservativna, zato lahko pri njej uporabimo enak trik (matematični zapis Coulombovega zakona je zelo podoben zapisu gravitacijskega zakona). Vpeljemo torej električno polje, ki ga opisujemo z *električnim potencialom* (φ) in *jakostjo električnega polja* ($\vec{E}$). Predstavljamo si namreč lahko, da negativni naboj v prostoru ustvari potencialno jamo, pozitivni pa potencialni vrh (slika 17.2A). Drug naboj, ki ga postavimo v to električno polje, bo čutil silo, ki je sorazmerna strmini potencialnega brega. Pozitivne naboje električna sila tako vleče proti nižjemu potencialu, negativne pa proti višjemu potencialu (to je drugače kot pri gravitaciji, kjer je masa lahko le pozitivna in zato maso vedno vleče proti dolini, tj. proti nižjemu potencialu).

Jakost električnega polja si lahko lepo predstavljamo s pomočjo *silnic*, ki prikazujejo, kakšna sila bi delovala na pozitivni naboj, ki bi ga postavili v polje. Na sliki 17.2B so predstavljene silnice v okolici točkastega naboja. Sila na pozitivni naboj, ki ga postavimo v tako polje, bo kazala v smeri silnic, sila na negativni naboj pa ravno v nasprotni smeri. Velikost sile v neki točki prostora je sorazmerna gostoti silnic v tisti točki: silnice, ki se širijo iz točkastega naboja, z oddaljenostjo od njega postajajo vedno redkejše, kar se ujema z enačbo za Coulombovo silo (en. 17.2), ki pravi, da sila okoli točkastega naboja pada s kvadratom razdalje.

Če se v električnem polju premikamo vzdolž silnic, se nam torej spreminja potencial, če pa se premikamo pravokotno na silnice, ostajamo vseskozi na istem potencialu. Črte, ki povezujejo točke z istim potencialom, imenujemo *ekvipotencialne črte* in so analogne plastnicam (izohipsam), tj. črtam, ki na zemljevidih povezujejo točke z isto višino.

Opis električnega polja nadgradimo še z enačbam:



Slika 17.2: Električno polje v okolici točkastega naboja. A) Prikaz električnega potenciala v okolici pozitivnega in v okolici negativnega naboja. Pozitivni naboj okoli sebe ustvari potencialni vrh, negativni pa jamo. Z zeleno so označene ekvipotencialne črte, tj. črte ki povezujejo točke na enaki višini potenciala. B) Prikaz električnih silnic za oba primera. Silnice vedno kažejo navzdol po potencialnem bregu in so vedno pravokotne na ekvipotencialne črte (sliki B sta pogleda s ptičje perspektive na sliki A). Silnice električnega polja nakazujejo smer sile na pozitivni naboj, ki bi ga postavili v polje, in torej kažejo stran od pozitivnega oz. proti negativnem naboju. Električno polje torej pozitivne naboje vleče proti dnu potencialne jame, negativne pa proti vrhu.

- Električna sila, ki jo čuti naboj v električnem polju, je sorazmerna velikosti naboja in jakosti električnega polja:

$$\vec{F}_e = e\vec{E} . \quad (17.3)$$

Jakost električnega polja v neki točki prostora je torej vektor, ki kaže v isto smer, kot kaže električna sila na pozitivni naboj v tisti točki. Sila na negativni naboj kaže v nasprotni smeri kot silnice.

- Električna sila je sorazmerna strmini električnega potenciala, tj. odvo-

du potenciala po prostoru (tj. gradientu potenciala). Če se potencial spreminja le v smeri x torej velja:

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} . \quad (17.4)$$

Minus v zgornji enačbi nakazuje, da silnice kažejo v smer proti nižjemu potencialu.

- Zgornjo zvezo lahko tudi obrnemo: če se vzdolž silnice premaknemo za razdaljo Δx , se nam potencial spremeni za

$$\Delta\varphi = -E\Delta x . \quad (17.5)$$

Minus v enačbi spet pomeni, da se med premikanjem v smeri silnic potencial niža.

- Če se premikamo pravokotno na silnice, se nam potencial ne spremeni. Gibljemo se torej po ekvipotencialni črti.
- Na naboj e v polju deluje sila, zato je vsako premikanje naboja vzporedno s silnicami povezano z delom $A = F\Delta x$, to delo pa je povezano s spremembo električne potencialne energije. Primerjava zgornjih enačb nam pove, da je električna potencialna energija naboja e v potencialu φ torej

$$W_e = e\varphi . \quad (17.6)$$

- Končno je nastopil čas, da vpeljemo eno od najbolj osnovnih električnih količin: električna napetost med dvema točkama v prostoru je potencialna razlika med tema dvema točkama:

$$U = \Delta\varphi . \quad (17.7)$$

Napetost torej igra vlogo višinske razlike pri gravitacijskem potencialu in jo v praksi srečamo večkrat kot absolutno vrednost električnega potenciala. Slednja je pravzaprav stvar dogovora, napetost pa je merljiva količina.

- Če zadnji dve enačbi združimo, ugotovimo, da se naboju, ki prepotuje napetost U energija spremeni ravno za

$$\Delta W_e = eU . \quad (17.8)$$

S to enačbo je povezana enota za energijo eV, ki opisuje spremembo električne energije osnovnega naboja, ki prepotuje napetost 1 V. Velja kar $1 \text{ eV} = e_0 \cdot 1 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 1 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. To enoto uporabljamo za opisovanje energij v svetu atomov, saj so le-te ravno reda velikosti eV in je zato tam enota J nepraktična.

Oboroženi z novimi definicijami lahko zapišemo jakost električnega polja in električni potencial v okolici točkastega naboja. S primerjavo enačb 17.2 in 17.3 ugotovimo, da točkasti naboj e okoli sebe ustvarja električno polje z jakostjo

$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} , \quad (17.9)$$

kjer je r razdalja do tega naboja (izraz za Coulombovo silo dobimo, če si predstavljamo, da naboj e_2 okoli sebe ustvarja polje, ki s silo deluje na naboj e_1 , ter združimo enačbi 17.3 in 17.9).

S pomočjo zveze, da je jakost električnega polja enaka odvodu potenciala po kraju, lahko tudi le z našim znanjem matematike uganemo izraz za višino električnega potenciala v okolici točkastega naboja

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} . \quad (17.10)$$

Vsak lahko preveri, da z odvajanjem enačbe 17.10 po r dobimo ravno enačbo 17.9 (minus, ki se pojavi pri odvajanju, se izniči z minusom iz enačbe 17.4). Jakost električnega polja torej pada s kvadratom oddaljenosti od točkastega naboja, električni potencial pa obratno sorazmerno z oddaljenostjo.

17.4 Dipol

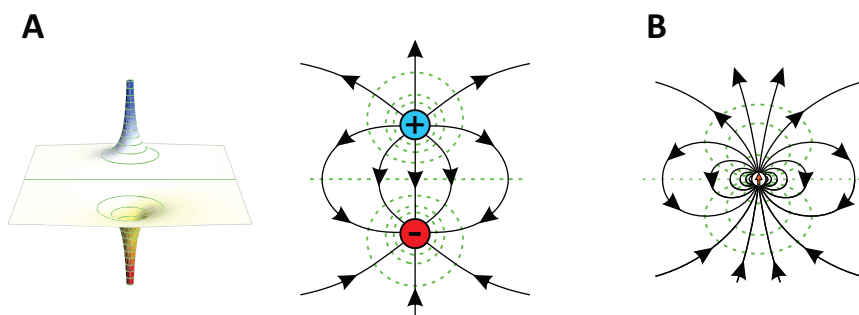
Polarne molekule so navzven sicer električno nevtralne, a zaradi nesimetrično razporejenega naboja kljub temu v svoji okolici ustvarjajo električno polje. Najpreprostejša razporeditev naboja je t. i. *električni dipol*, pri katerem sta blizu skupaj pozitivni in negativni naboj, ki sta po velikosti enaka. Kasneje bomo videli, da se zaradi električne aktivnosti srca tudi okoli njega ustvarja dipolno

električno polje in da nam poznavanje takega polja pomaga pri razumevanju EKG.

Enačba, ki opisuje električno polje v okolici dipola, je zapletena, a si to polje lahko grafično vseeno nazorno predstavljamo. Če pozitivni in negativni naboj iz slike 17.2 postavimo blizu skupaj, dobimo sosednja vrh in jamo, kot ju prikazuje slika 17.3A. Silnice polja dipola torej »izvirajo« v pozitivnem naboju in »poniknejo« v negativnem. Kako velik je dipol in njegovo usmerjenost opisujemo z *vektorjem električnega dipola*, ki je definiran kot produkt velikosti nabojev v dipolu in razdalje med njima:

$$\vec{p}_e = e\vec{r}, \quad (17.11)$$

pri čemer vektor dipola po dogovoru kaže od negativnega proti pozitivnem naboju. Velikost vektorja dipola imenujemo tudi *električni dipolni moment*. Večji kot je električni dipolni moment molekule, bolj polarna je molekula. Pri mnogih polarnih molekulah se naboj niti ne razmakne v dobro definirana točkasta naboja na določeni razdalji, a si njihove dipole vseeno predstavljamo kot vektorje električnega dipola, ki kažejo od negativne proti pozitivni nabiti strani molekule ter okoli sebe ustvarjajo značilno dipolno električno polje (17.3B).

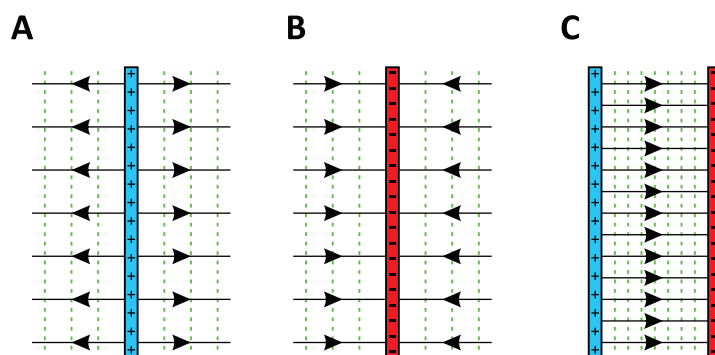


Slika 17.3: Električno polje v okolici dipola. A) Prikaz električnega potenciala in ustreznih silnic. Ekvipotencialne črte so označene z zeleno. Pozitivni naboj, ki se znajde v bližini dipola, čuti električno silo v smeri silnic oz. v smeri proti nižjemu potencialu. B) Pri polarnih molekulah je težko govoriti o dveh popolnoma ločenih točkastih nabojih, zato si njihov dipol predstavljamo kot vektor, ki kaže od negativne strani molekule proti pozitivni strani, velikost vektorja pa je sorazmerna s polarnostjo (vektor dipola je na sliki shematično označen z oranžno puščico). Čeprav posameznih točkastih nabojev v taki molekuli ne razločimo, pa tudi taka molekula okoli sebe ustvarja značilno dipolno električno polje.

Pri vodi (slika 17.1) je težko govoriti o dobro definiranih ločenih točkah nabojih, vseeno pa ima molekula vode zaradi svoje polarnosti relativno velik električni dipolni moment. Velikost dipolnega momenta izolirane molekule vode je $p_e = 6,1 \cdot 10^{-30} \text{ As nm} \approx 40e_0\text{pm}$. Dipolni moment vode je torej ekvivalenten momentu, ki bi ga dobili, če bi bila pozitivni in negativni osnovni naboj med seboj oddaljena 40 pm (za primerjavo: razdalja med kisikom in vodikom v molekuli vode je približno 96 pm).

17.5 Nabita površina, kondenzator

Zadnja porazdelitev naboja, pri kateri si bomo podrobneje ogledali električno polje, je velika enakomerno nabita ravna površina. V bližini take površine lahko silnice kažejo le pravokotno nanjo, saj se vzporedne komponente zaradi simetrije med seboj izničijo (slika 17.4). Polje v bližini nabite površine je torej homogeno in ni odvisno od razdalje od površine (kasneje bomo videli, da to ne velja, če so v okolici površine prosti ioni, kot so npr. v fiziološki raztopini). Silnice seveda kažejo stran od pozitivno nabite površine oz. proti negativno nabiti površini, ekvipotencialne črte pa so površini vzporedne.



Slika 17.4: A) Električno polje v okolici pozitivno nabite površine, B) okoli negativno nabite površine in C) med pozitivno in negativno površino (npr. v kondenzatorju ali v celični membrani). Če so površine velike in enakomerno nabite, je polje v vseh treh primerih homogeno, silnice kažejo pravokotno na površino, ekvipotencialne črte pa so vzporedne površini.

Dve sosednji nasprotno nabiti površini imenujemo *kondenzator*. Taka porazdelitev naboja je v naših telesih prisotna npr. na celičnih membranah, ki so na eni strani pogosto nabite drugače kot na drugi (več o tem še kasneje, ko

bomo obravnavali prekomembranski potencial). Ker je električno polje aditivno, je v primeru dveh ravnih površin polje med njima še enkrat večje kot v primeru ene same površine, na zunanji strani pa polja sploh ni (slika 17.4C). Natančen račun pokaže, da je jakost električnega polja med nabitima ravnima površinama, med katerima je prazen prostor, enaka

$$E = \frac{e}{\epsilon_0 S} . \quad (17.12)$$

Večja kot je gostota naboja na površini (e/S), večje je polje med njima. Ker so silnice med površinama vzporedne, je potencialna razlika med njima kar $\Delta\varphi = Ed$, kjer je d razdalja med površinama (ta rezultat sledi neposredno iz enačbe 17.5). Če zgornje enačbe združimo, dobimo pomembno zvezo med nabojem in napetostjo med nabitima površinama kondenzatorja:

$$e = CU , \quad (17.13)$$

kjer je C kapaciteta kondenzatorja, katere vrednost je za ravne površine enaka

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} . \quad (17.14)$$

Enota za kapaciteto je farad, $1 \text{ F} = 1 \text{ As/V}$. Kapaciteta je torej sorazmerna velikosti površin, na katerih je nabran naboj, in obratno sorazmerna razdalji med površinama. Tipične kapacitete bioloških membran so reda velikosti 10^{-2} F/m^2 (primer 17.1).

Primer 17.1: kapaciteta membrane in akcijski potencial

Ocenimo, koliko molov ionov Na^+ mora preiti preko membrane celice, da se ustvari prekomembranska napetost 100 mV (za približno tako vrednost se prekomembranska napetost spremeni pri nastanku akcijskega potenciala v živčnih celicah). Za lažji račun privzemimo, da je celica okrogla in ima radij $10 \mu\text{m}$.

Celotna kapaciteta membrane take celice je

$$C = 10^{-2} \text{ F/m}^2 \cdot 4\pi(10 \mu\text{m})^2 = 1,26 \cdot 10^{-11} \text{ F} \quad (17.15)$$

Količino naboja, ki je potrebna za vzpostavitev prekomembranske napetosti 100 mV, izračunamo s pomočjo enačbe 17.13:

$$e = CU = 1,26 \cdot 10^{-11} \text{ As/V} \cdot 100 \text{ mV} = 1,26 \cdot 10^{-12} \text{ As} = 7,85 \cdot 10^6 e_0 \quad (17.16)$$

Za vzpostavitev akcijskega potenciala torej potrebujemo le nekaj manj kot 8 milijonov ionov Na^+ .

Ocenimo še, za koliko se ob tem spremeni koncentracija natrijevih ionov v celici:

$$c = \frac{n}{V} = \frac{N}{N_A V} = \frac{7,85 \cdot 10^6 \text{ mol}}{6,02 \cdot 10^{23} \cdot 4,2 \cdot 10^{-12} \text{ l}} = 3,1 \mu\text{M} \quad (17.17)$$

pri čemer smo upoštevali, da je prostornina celice $V = 4/3\pi r^3 = 4,2 \cdot 10^{-12} \text{ l}$. Ob vzpostavitvi akcijskega potenciala se torej v celici koncentracija natrijevih ionov poveča zanemarljivo malo (tipične koncentracije natrija v celicah so reda velikosti 10 mM)!

Poglavje 18

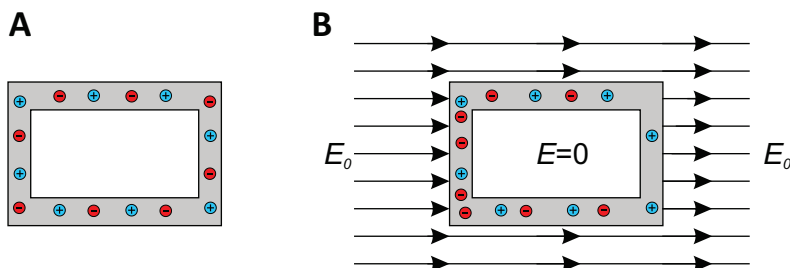
Električno polje v snovi

Enačbe za električno polje, ki smo jih napisali do sedaj, veljajo v praznem prostoru, ne pa tudi v snovi. Vsaka snov je namreč tudi sama sestavljena iz nabitih delcev, ki s svojo prisotnostjo vplivajo na električno polje. V tem poglavju si bomo ogledali tri primere interakcije med poljem in snovjo, ki so pomembni v za medicino.

18.1 Kovine: Faradayeva kletka

Ena glavnih značilnost kovin je, da so v njih prosti, dobro gibljivi elektroni (kovine so zaradi tega dobri prevodniki električnega toka). Če kovino postavimo v električno polje, električna sila (enačba 17.3) proste elektrone povleče v smer proti silnicam polja, pozitivna jedra atomov v kovini pa se ne morejo premakniti, saj so vpeta v snovi (slika 18.1). Razporejanje naboja ustvari električno polje, ki je ravno nasprotno zunanjemu (silnice polja, ki nastane zaradi razporejanja, kažejo od pozitivnega naboja proti negativnemu), zaradi česar se električno polje v kovini zmanjša. Naboji se razporejajo toliko časa, dokler je v kovini še prisotno polje, ravnovesje pa je doseženo, ko se polje v kovini dokončno izniči. Ker se razporejanje naboja v kovinah zgodi zelo hitro, v notranjosti kovin praktično nikoli ni električnega polja, ne glede na to, kaj se s poljem dogaja zunaj njih.

Zgoraj opisani pojav izrabimo pri t. i. *Faradayevi kletki*. Če namreč nek prostor ovijemo v kovino, zaradi prerazporejanja naboja v kovini tudi v prostoru znotraj nje ni električnega polja, ne glede na to, kakšno je polje v okolici. Pojav do neke mere deluje celo, če je okoli prostora ovita le kovinska mreža. V Faradayevi kletki zato npr. izvajamo vse zahtevne električne meritve, ki bi



Slika 18.1: Shematični prikaz delovanja Faradayeve kletke. A) Kovine so snovi s prosto gibljivimi elektroni (pozitivna jedra atomov kovine so trdno vpeta v kovino in se ne morejo premikati). Če na kovino ne deluje električno polje, so elektroni v kovini razporejeni enakomerno. B) Če kovino postavimo v zunanje električno polje E_0 , se zaradi električne sile elektroni pomaknejo v smer nasproti električnih silnic, za seboj pa pustijo pozitivno nabita atomska jedra. Prerazporejeni naboji ustvarjajo električno polje, ki je ravno nasprotno zunanjemu (silnice zaradi prerazporejenih nabojev kažejo od + proti -). Elektroni se premikajo, dokler je v kovini še prisotno električno polje in v zelo kratkem času dosežejo ravnovesje, ko se njihovo in zunanje polje ravno izničita in je polje znotraj kovine enako 0. Prostor, obdan s kovino, je tako izoliran pred zunanjim električnim poljem.

jih lahko zmotili vplivi električnega polja iz okolice. Pojav lahko enostavno preizkusimo tudi sami: če prenosni telefon zavijemo v nekaj plasti alufolije, telefon ne bo več mogel sprejemati klicev, saj telefonski signal ne bo več mogel prodreti do njega (telefonski signal se prenaša preko mikrovalov, ki so elektromagnetno valovanje). Omenimo še, da popolne elektro-magnetne izolacije ni enostavno izdelati, saj nas Faradayeva kletka varuje le pred električnim poljem, ne pa tudi pred magnetnim - zelo težko je npr. narediti dobro izolacijo za magnetna polja z nizko frekvenco.

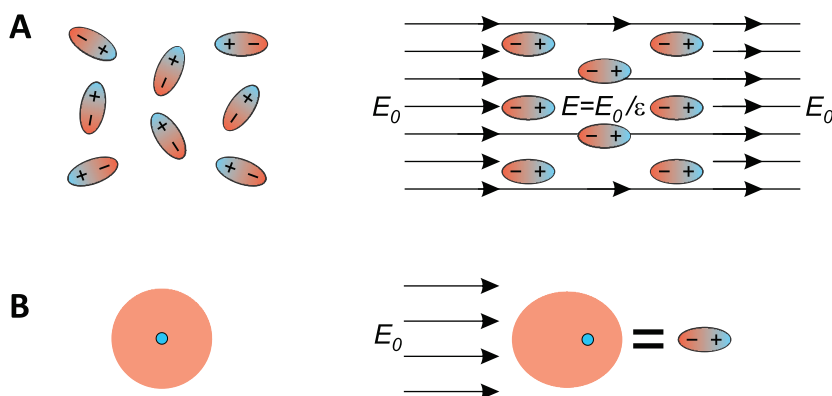
18.2 Neprevodne snovi

V neprevodnih snoveh sicer ni prostih nabojev, ki bi se lahko premikali pod vplivom zunanjega električnega polja, kljub temu pa lahko tudi v takih snoveh naboj v molekulah interagira z zunanjim poljem in mu nasprotuje. Interakcijo med snovjo in poljem si lahko najlažje predstavljamo na primeru polarnih molekul (slika 18.2A). Električno polje vleče pozitivni del molekule v eno smer, negativni del molekule pa v nasprotno. Na polarno molekulo v homogenem električnem polju tako ne deluje neto sila, ampak le navor, ki molekulo obrne

v smer silnic¹. Če se spomnimo definicije navora (enačba 3.5 pri mehaniki) in definicije električnega dipola (enačba 17.11), lahko izračunamo, da je navor polja na molekulo enak vektorskemu produktu med dipolom molekule in jakostjo električnega polja:

$$\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E} \quad \text{oz.} \quad M = p_e E \sin \alpha, \quad (18.1)$$

kjer je α kot med dipolom in silnicami polja. Navor je torej največji, če je dipol pravokoten na silnice, če pa je dipol vzporeden silnicam, je navor v homogenem polju enak 0.



Slika 18.2: Shematični prikaz delovanja vpliva zunanjega polja na molekule v neprevodni snovi. A) Polarne molekule (npr. voda). Levo: če na molekule ne deluje zunanje električno polje, so v povprečju orientirane naključno. Desno: v zunanjem polju (E_0) se snov polarizira, saj se zaradi delovanja električne sile molekule obrnejo v smeri polja. Polarizirana snov ustvarja polje, ki kaže v obratno smer od zunanjega, zaradi česar se celotno polje v snovi zmanjša. Dielektričnost snovi (ϵ) pove, za kolikokrat je polje v snovi (E) manjše od zunanjega. B) Do podobnega efekta pride tudi pri nepolarnih molekulah (npr. žlahtnih plinih). Levo: če na nevtralno molekulo ne deluje zunanje polje, je negativni elektronski oblak simetrično razporejen okoli pozitivnih jeder. Desno: zunanje polje povzroči, da se elektronski oblak in jedro razmakneta, zaradi česar se molekule polarizirajo. Zaradi tega imajo tudi snovi iz nepolarnih molekul svojo dielektričnost.

Zaradi obračanja molekul se pod vplivom zunanjega električnega polja na-

¹V posebnih situacijah lahko v snovi ustvarimo zelo nehomogeno polje, zaradi česar pozitivni in negativni del polarne molekule ne čutita enako velike sile. V takem primeru polje na polarno molekulo ne deluje le z navorom, ampak tudi s silo.

boj malo prerazporedi tudi v neprevodnih snoveh (slika 18.2A). V primerjavi s kovinami pa je v njih prerazporejanje naboja bistveno manjše, zato se v neprevodnih snoveh polje le zmanjša in ne izgine popolnoma. Zmanjšanje polja v snovi je odvisno od lastnosti, ki jo imenujemo *dielektričnost* (ϵ) in je definirana z

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon}, \quad (18.2)$$

pri čemer je E_0 zunanje električno polje, E pa polje v snovi. Dielektričnost snovi torej nima enote in opisuje, za kolikšen faktor se v snovi zmanjša zunanje električno polje (ϵ je vedno večji od 1).

Dielektričnost imajo tudi snovi iz povsem nepolarnih molekul, npr. CH_4 ali molekule žlahtnih plinov. Take molekule sicer nimajo stalnega dipola, a se v električnem polju vseeno polarizirajo, saj se negativni elektronski oblak in pozitivno jedro razmakneta vsak v svojo smer ter tako ustvarita polje, ki kaže v nasprotno smer od zunanjega (slika 18.2B). Za občutek: dielektričnost vode je 80 (voda je ena najbolj polarnih navadnih snovi), etanola približno 24, jedilnega olja okoli 3, plina helija pri normalnih pogojih pa približno 1,00007.

Ker je v snoveh manjše električno polje kot v praznem prostoru, so v snovi ustrezno drugačne tudi enačbe za jakost električnega polja. Če želimo enačbe, ki smo jih zapisali za prazen prostor, uporabiti tudi za opis polja v snovi, moramo v njih namesto ϵ_0 zapisati produkt $\epsilon\epsilon_0$. Coulombov zakon (enačba 17.2) za silo med dvema nabojema v snovi se tako napiše $F = e_1 e_2 / 4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2$. Podobno velja tudi za kapaciteto kondenzatorja (enačba 17.14): če v kondenzatorju ni praznega prostora ampak neprevodna snov, se mu kapaciteta poveča, saj velja $C = \epsilon\epsilon_0 S/d$.

18.3 Ionske raztopine: senčenje naboja

Na koncu si oglejmo še, kako se električno polje obnaša v naših celicah, ki so napolnjene in obdane z ionsko raztopino (raztopini ionov pravimo tudi *elektrolit*). Ioni v raztopini so točkasti in prosto gibljivi naboji. Če zunanje polje ni prisotno, so kationi in anioni po raztopini razporejeni enakomerno in je raztopina električno nevtralna (če bi bil v neki prostornini pribitek ionov ene vrste, bi se ti med seboj odbijali in se razmikali vse dokler ne bi raztopina postala nevtralna). V prisotnosti zunanjega polja pa se zaradi električne sile ioni gibljejo vzporedno s silnicami. Čeprav so ionske raztopine s tega stališča

podobne kovinam, pa je koncentracija prostih nabojev v raztopinah bistveno manjša kot v kovinah, poleg tega pa je v raztopinah tudi več termičnega gibanja, zaradi česar se ionske raztopine pod vplivom električnega polja obnašajo malo drugače kot kovine.

Kot primer si pogledajmo, kakšno električno polje čutijo nabite makromolekule v raztopini, ki se znajdejo v bližini nabite površine, npr. celične membrane (slika 18.3). Če bi bila nabita površina v praznem prostoru, bi bilo polje okoli nje tako kot na sliki 17.4 in bi torej segalo (neskončno) daleč stran. V ionski raztopini je drugače, saj naboj z membrane privlači nasprotno ione iz raztopine, ki se zato naberejo ob membrani ter električno polje membrane *zasenčijo*. Zaradi termičnega gibanja ionov to senčenje ni popolno in v bližini membrane električno polje vseeno obstaja – zahteven račun pokaže, da električni potencial v ionski raztopini z oddaljenostjo od nabite površine pada eksponentno:

$$\varphi(x) = \varphi_0 e^{-x/\lambda_D}, \quad (18.3)$$

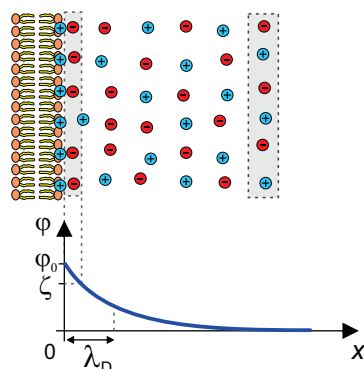
pri čemer značilno dolžino eksponentnega padanja λ_D imenujemo *Debyeova dolžina* (izg. »debajeva dolžina«).

Močnejše kot je senčenje, krajša je Debyeova dolžina. Z našim znanjem fizike lahko uganemo, da bo senčenje tem močnejše, čim večja bo koncentracija ionov v raztopini (če ionov ni, tudi senčenja ni). Poleg tega bo senčenje manjše pri višji temperaturi, saj je takrat termično gibanje močnejše preprečuje senčenje (z besedami termodinamike: nabiranje ionov ob površini zmanjšuje entropijo, kar s stališča proste entalpije ni ugodno). Natančen izračun pokaže, da je vrednost Debyeve dolžine enaka

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0 k_B T}{2e_0^2 N_A c_{\text{ion}}}} \approx \frac{0,3 \text{ nm}}{\sqrt{c_{\text{ion}}}} \quad (18.4)$$

kjer je $k_B T$ termična energija, ki smo jo spoznali pri termodinamiki, v imenovalcu pa je *ionska moč raztopine*², ki jo dobimo, če seštejemo molarne koncentracije vseh ionov v raztopini pomnožene s kvadratom naboja, ki ga nosijo, $c_{\text{ion}} = \frac{1}{2} \sum Z_i^2 c_i$. V drugem delu enačbe smo zmnožili vse konstante, upoštevali sobno temperaturo, koncentracijo pa moramo v enačbo vstaviti v enoti mol/l.

²V literaturi se ionska moč včasih imenuje tudi ionska jakost, označuje pa se tudi z μ ali z I ; pri nas bomo ta simbola raje uporabljali za magnetno permeabilnost in električni tok.



Slika 18.3: Shematični prikaz senčenja električnega polja nabite površine v ionskih raztopinah. Ob nabiti površini se naberejo ioni z nasprotnim nabojem, a lahko zaradi svojega termičnega gibanja naboj na površini zasenčijo le delno (zaradi entropije ioni ne morejo biti na miru in »pospravljeni« ob površini). Izkaže se, da električni potencial z oddaljenostjo od površine pada eksponentno z značilno dolžino, ki jo imenujemo Debyeova dolžina (λ_D), njena velikost v fiziološki raztopini pa je približno 1 nm. V fiziološki raztopini se električno polje torej čuti le nekaj nm daleč, na večji oddaljenosti pa je raztopina električno nevtralna (v izbrani prostornini je enako število pozitivnih in negativnih ionov). Na sliki je shematično prikazana tudi vrednost zeta potenciala površine (ζ), tj. potenciala na tisti razdalji od površine, pri kateri ioni na površino niso več adsorbirani.

Izračunajmo Debyeovo dolžino za fiziološko raztopino, ki je 0,15 M raztopina NaCl. Ker sta natrij in klor enovalenčna, je ionska moč take raztopine prav tako $c_{\text{ion}} = 0,15 \text{ M}$ ($c_{\text{ion}} = \frac{1}{2}((-1)^2 0,15 \text{ M} + (+1)^2 0,15 \text{ M})$), iz česar sledi, da je $\lambda_D \approx 0,8 \text{ nm}$. V fizioloških raztopinah je torej vrednost Debyeove dolžine le reda velikosti nm, zato lahko nabite makromolekule med seboj interagirajo le, če so manj kot nekaj nm narazen. Iz zgornjega razmisleka tudi sledi, da so interakcije med makromolekulami zelo odvisne od ionske moči raztopine, zato bi biokemijski procesi v destilirani vodi potekali precej drugače kot v fiziološki raztopini. V biokemijskih poskusih, v katerih nastopajo nabite molekule, moramo zato skrbeti ne le za pravo vrednost pH ampak tudi za ustrezno ionsko moč. Za konec omenimo še, da Debyeova dolžina v principu obstaja tudi v kovinah, a je tam zaradi velike gostote naboja zanemarljivo majhna.

Primer 18.1: zeta potencial

Zaradi senčenja se v ionskih raztopinah nabite površine svoji okolici kažejo manj nabitost, kot so v resnici. Pravzaprav je »nabitost površine« v takih primerih težko definirati, saj je težko potegniti ostro črto med površino in na površino adsorbiranimi ioni. Nabitost površin v ionskih raztopinah se zato pogosto raje opisuje z *zeta potencialom*, ki je kar vrednost električnega potenciala na tisti oddaljenosti od površine, pri kateri ioni niso več adsorbirani na površino (ta razdalja ni vedno dobro definirana, tipično pa je nekaj manj od Debyeve dolžine, slika 18.3). Zeta potenciali nabitih makromolekul so največ nekaj 10 mV. Za molekulo BSA se na območju pH s slike 17.1 zeta potencial npr. giblje med +20 mV pri $\text{pH} = -3$ in -20 mV pri $\text{pH} = 7$.

Poglavje 19

Električni tok

Električni tok je eden najosnovnejših električnih pojavov. Ne le, da električni tok poganja vse sodobne naprave, električni tok je tudi stalno prisoten v naših telesih in ima osrednjo vlogo pri mnogih fizioloških procesih.

Električni tok je povezan s premikanjem električnega naboja po prostoru. Smer električnega toka je po dogovoru enaka smeri gibanja pozitivnega naboja (in je torej nasprotna smeri gibanja negativnega naboja), velikost električnega toka pa opisuje količino naboja, ki se pretoči v določenem času:

$$I = \frac{e}{t} . \quad (19.1)$$

Ker je električni tok ena prvih opisanih električnih količin, si je prislužil osnovno električno enoto amper, A (enoto za naboj so definirali šele kasneje, zaradi česar je sestavljena iz ampera in sekunde). Če se tok s časom spreminja, moramo zgornjo enačbo zapisati z odvodom, $I = de/dt$.

V tem poglavju se bomo najprej spomnili osnovne zakonitosti električnega toka - Ohmovega zakona, nato si bomo pogledali, kako se tok prevaja skozi raztopine, kakšne so posebnosti izmeničnega toka ter na koncu opisali še električni tok skozi telo.

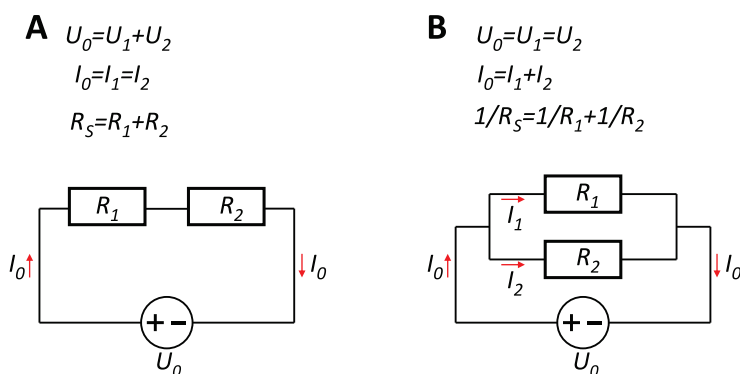
19.1 Ohmov zakon

Iz osnovne šole se spomnimo, da električni tok steče, če električni prevodnik priključimo na električno napetost, zvezo med njima pa opisuje znameniti Ohmov zakon:

$$U = RI, \quad (19.2)$$

kjer je U napetost, R pa električna upornost prevodnika. Enota za napetost je volt, V, enota za upornost pa ohm, $\Omega = \text{V/A}$. Električni tok teče od višjega električnega potenciala proti nižjemu (od $+$ proti $-$, smer električnega toka je torej enaka smeri gibanja pozitivnega naboja).

Za električni tok veljajo podobne zakonitosti kot za ostale tokove, ki smo jih srečali do sedaj (npr. za toplotni in difuzijski tok). Če tok teče zaporedoma skozi več uporov, je tok skozi vse upore enak, skupni padec napetosti pa je enak vsoti padcev napetosti na posameznih uporih (slika 19.1A). Če se tok razveji, mora biti tok, ki priteče v razvejišče, po velikosti enak toku, ki odteče iz razvejišča. Pri vzporedni vezavi uporov je tako padec napetosti na vseh uporih enak, vsota tokov skozi posamezne upore pa je enaka celotnemu toku, ki priteče v razvejišče (slika 19.1B). Ohmov zakon velja za vsak upor posebej, pa tudi za skupno upornost vezja, sestavljenega iz več uporov. Slednjega v primeru zaporedne vezave izračunamo kot vsoto posamezni upornosti, $R_S = R_1 + R_2$, v primeru vzporedne vezave pa skupno upornost izračunamo iz zveze $\frac{1}{R_S} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.



Slika 19.1: Tokovi skozi upore in padci napetosti na uporih pri zaporedni in vzporedni vezavi uporov. Skupna upornost zaporedno vezanih uporov je $R_S = R_1 + R_2$, skupno upornost vzporedno vezanih uporov pa izračunamo iz zveze $\frac{1}{R_S} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Ohmov zakon velja za vsak upor posebej, pa tudi za skupni upor: $U_0 = R_S I_0$.

Ker naboji med gibanjem v snovi čutijo upor (trenje), moramo za vzdrževanje električnega toka neprestano opravljati delo, snov pa se zaradi električnega toka segreva (več o trenju pri električnem toku bomo spoznali v nasle-

dnjem razdelku). Moč, ki se porablja na uporah lahko izračunamo, če upoštevamo, da energija za premagovanje upora pride iz električne energije pretočenega naboja. Če upoštevamo, da električno energijo in napetost povezuje zveza $\Delta W_e = eU$ (enačba 17.8) in se spomnimo, da je $I = e/t$ in $P = \Delta W_e/t$, dobimo izraz za moč, ki se troši na upor:

$$P = IU = \frac{U^2}{R} = RI^2, \quad (19.3)$$

kjer smo zadnja dva zapisa moči dobili tako, da smo tok oz. napetost izrazili iz Ohmovega zakona (v prvem zapisu smo I zamenjali z U/R , v drugem pa U z RI). Moč, ki se troši na upor (in s tem njegovo segrevanje) je torej odvisna od kvadrata toka, ki teče skozi upor.

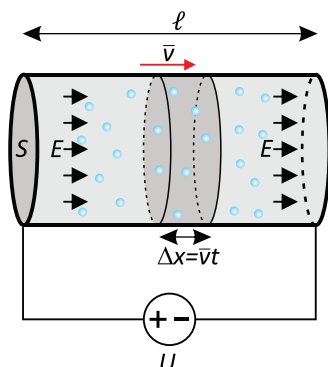
19.2 Električni tok v raztopinah

Podobno kot pri pretakanju toplote tudi pri električnem toku velja, da po prevodniku teče tem več toka, čim večji je njegov presek, in da je upor tem večji, čim daljši je prevodnik. Upornost prevodnika je od njegove velikosti (slika 19.2) torej odvisna kot

$$R = \frac{\ell}{\sigma S} = \frac{\zeta \ell}{S}, \quad (19.4)$$

kjer je ℓ dolžina prevodnika, S ploščina njegovega preseka, konstanti σ in ζ pa sta specifična prevodnost oz. specifična upornost snovi, iz katere je na-rejen prevodnik. Oba zapisa lahko uporabljamo povsem ekvivalentno, saj je specifična upornost obratno sorazmerna specifični prevodnosti, $\zeta = 1/\sigma$. V nekaterih situacijah iz navade uporabljamo zapis s specifično upornostjo, v drugih zapis s prevodnostjo. Enota za specifično upornost je Ωm , enoto za specifično prevodnost pa se pogosto zapiše kot S/m , kjer je S enota siemens ($\text{S} = 1/\Omega$).

Na Ohmov zakon pogledajmo še s stališča električnih pojmov, ki smo se jih naučili v prejšnjem poglavju. Za začetek pogledajmo, kaj se dogaja, ko na snov s prosto gibljivimi nosilci naboja (npr. elektroni v kovini ali ioni v raztopini) priključimo izvor električnega toka. Izvor električnega toka v snovi ustvarja stalno električno polje, ki preko električne sile povzroči gibanje nosilcev naboja. Podobno kot telesa v viskozni tekočini tudi gibajoči se naboji čutijo silo



Slika 19.2: . Shematični prikaz gibanja pozitivnega naboja (označenega z modro) v električnem polju. Električni prevodnik, ki ima presek S in dolžino ℓ , priključimo na električno napetost U . V snovi se vzpostavi električno polje z jakostjo $E = U/\ell$. V stacionarnem stanju se pozitivni naboji s povprečno hitrostjo $\bar{v}$ gibljejo proti nižjemu električnemu potencialu. V času t se pretoči naboj v sivo označeni prostornini, iz česar lahko izračunamo zvezo med električnim tokom in hitrostjo (enačba 19.5).

upora, zato pod vplivom električne sile ne pospešujejo v nedogled, ampak hitro dosežejo končno hitrost. Ker tudi pri elektriki veljajo enaka geometrijska pravila kot pri pretakanju tekočin (primerjajmo sliko 19.2 s sliko 9.2A ter se spomnimo enačbe 9.8 pri mehaniki), je tudi velikost električnega toka sorazmerna povprečni hitrosti naboja. Če je gostota naboja v snovi enaka ρ_e (tj. naboj na enoto prostornine) in se naboj premika s povprečno hitrostjo $\bar{v}$, lahko iz slike 19.2 razberemo, da se naboj v času t premakne za razdaljo $\Delta x = \bar{v}t$, zato se ga v tem času pretoči $e = \rho_e V = \rho_e \Delta x S = \rho_e \bar{v}t S$. Električni tok je enak količini naboja na enoto časa ($I = e/t$), zato torej velja:

$$I = \rho_e \bar{v} S \quad \text{oz.} \quad j = \frac{I}{S} = \rho_e \bar{v} . \quad (19.5)$$

V zgornji enačbi smo definirali še *gostoto električnega toka* j , ki opisuje tok na enoto preseka in nam pride prav pri opisovanju tokov, ki niso povsod po preseku enaki.

Končna hitrost potovanja nabojev je odvisna od jakosti električnega polja, pa tudi od vrste snovi in lastnosti nabojev. Pri isti električni sili npr. kalijeve ioni čutijo manj upora kot natrijevi, zato je njihova končna hitrost pri dani jakosti električnega polja večja, kot je končna hitrost natrijevih ionov. Končno hitrost gibanja nabojev pri dani jakosti polja je odvisna od *gibljivosti nabojev*,

ki jo označimo z β in velja kar

$$\bar{v} = \beta E . \quad (19.6)$$

ion	H ⁺	Na ⁺	K ⁺	OH ⁻	Cl ⁻	SO ₄ ²⁻
gibljivost [$10^{-8} \text{ m}^2/\text{Vs}$]	36	5,2	7,6	-21	-7,9	-8,3

Tabela 19.1: Izmerjene gibljivosti nekaterih ionov v vodi pri 25 °C (povzeto po [3]). Gibljivost anionov je negativna, saj potujejo v smeri, ki je nasprotna smeri električnega polja. Gibljivost elektronov v kovinah je približno milijon-krat večja od gibljivosti ionov.

Gibljivosti nekaterih ionov v vodi so prikazane v tabeli 19.1. Iz tabele je razvidno, da je gibljivost kalijevega iona večja od gibljivosti natrijevega iona, čeprav je slednji manjši in bi zato pričakovali, da pri gibanju čuti manj upora. Razlog za večji upor natrijevega iona je v tem, da je zaradi majhne velikosti natrija v njegovi bližini večje električno polje (po Coulombovem zakonu jakost polja pada s kvadratom oddaljenosti) in zato močnejše privlači molekule vode, ki posledično potujejo skupaj z njim in mu s tem povečajo efektivno velikost (okoli iona se naredi t. i. hidratacijski ovoj). V tabeli tudi vidimo, da je gibljivost protonov in hidroksidnih ionov precej večja od ostalih ionov. Natančen mehanizem gibanja teh ionov ni povsem poznan, po eni od hipotez lahko ti ioni kar nekako preskakujejo med sosednjimi molekulami vode.

Povezavo med efektivno velikostjo iona in njegovo gibljivostjo lahko ocenimo, če za silo upora uporabimo linearni (Stokesov) zakon (en.9.8 pri mehaniki). Ko se ioni gibljejo enakomerno, je sila upora nasprotno enaka električni sili, $6\pi r\eta v = eE$. Če jakost električnega polja izrazimo z hitrostjo in gibljivostjo (enačba 19.6) ter upoštevamo, da je naboj iona odvisen od njegove valence ($e = Ze_0$), dobimo oceno za gibljivost:

$$\beta = \frac{Ze_0}{6\pi r\eta} , \quad (19.7)$$

kjer je r efektivni polmer iona (t. i. *hidrodinamski radij*), η pa viskoznost raztopine.

Enako kot ioni se pod vplivom električnega polja gibljejo tudi velike nabite makromolekule (npr. DNA in proteini), kar izrabljamo pri številnih *elektroforetskih* metodah za ločevanje in določanje makromolekul v raztopinah (primer 19.1).

Povežimo še električno prevodnost raztopin z gibljivostjo ionov v njej. Če definicijo za gibljivost (enačba 19.6) vstavimo v enačbo za zvezo med tokom in hitrostjo (enačba 19.5), dobimo

$$I = \rho_e S \beta E . \quad (19.8)$$

Spomniti se moramo še, da je sprememba napetosti, če vzdolž silnice električnega polja prepotujemo razdaljo ℓ enaka $U = \Delta\phi = E\ell$ (enačba 17.5). Nato v zgornjem izrazu E nadomestimo z U/ℓ , ter dobljeni izraz primerjamo z Ohmovim zakonom in enačbo za električno upornost prevodnika z dolžino ℓ (enačba 19.4). Iz primerjave sledi odvisnost specifične prevodnosti raztopine od gibljivosti in gostote naboja v njej:

$$\sigma = \beta \rho_e = F Z \beta c , \quad (19.9)$$

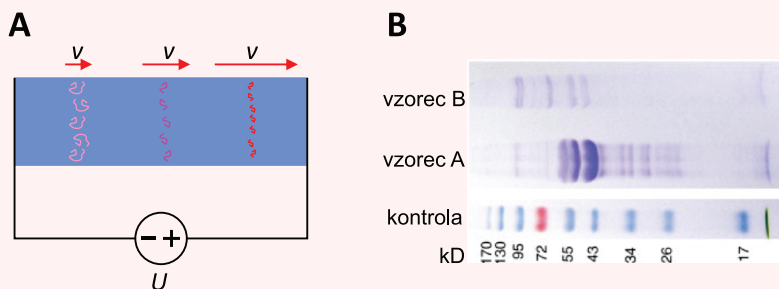
kjer smo za drugim enačajem prevodnost zapisali s pomočjo molarne koncentracije iona v raztopini, F pa je *Faradayeva konstanta*, ki opisuje naboj enega mola osnovnega naboja ($F = e_0 N_A$). Če je v raztopini raztopljenih več različnih ionov s koncentracijami c_i , je skupna specifična prevodnost kar vsota specifičnih prevodnosti posamezne vrste ionov, $\sigma = \sum \sigma_i = \sum F Z_i \beta_i c_i$ (specifična prevodnost je vedno pozitivna, saj sta valenca (Z) in gibljivost (β) v enačbi 19.9 ali hkrati pozitivni ali hkrati negativni).

Prevodnost vodnih raztopin je torej kar sorazmerna koncentraciji raztopljenih ionov in njihovi gibljivosti. Ker je koncentracija ionov v destilirani vodi zelo majhna (kolikšna je, si lahko vsak izračuna iz znane pH vrednosti vode), je destilirana voda praktično izolator. Sklepamo lahko tudi, da snovi, ki v vodi ne disociirajo na ione (npr. glukoza), na prevodnost raztopine nimajo velikega vpliva (vplivajo lahko le tako, da spremenijo viskoznost raztopine in s tem gibljivost ionov, enačba 19.7).

Primer 19.1: elektroforeza

Elektroforeza je gibanje nabitih delcev v raztopinah in gelih pod vplivom zunanega električnega polja. Makromolekule imajo različne velikosti in oblike ter nosijo različno velik naboj, zaradi česar imajo tudi različne elektroforetske gibljivosti. Če torej raztopino makromolekul priključimo na električno napetost, se bodo začele gibati z različnimi hitrostmi in se bodo s časoma med seboj ločile. Manjše oz. bolj nabite mo-

lekule bodo hitrejš, večje oz. manj nabite pa počasnejše (slika A). Na osnovi elektroforeze deluje vrsta metod za ločevanje in določanje makromolekul, predvsem DNA in proteinov.



Ločevanje lahko optimiziramo s spretnim izborom medija, po katerem se gibljejo molekule. Vodna raztopina pogosto za to ni najbolj primerna, saj se gibljivosti v raztopinah ne razlikujejo dovolj - gibljivost je približno obratno sorazmerna velikosti molekule (enačba 19.7), po drugi strani pa imajo večje molekule ponavadi tudi večji naboj (sploh pri DNA je zveza med dolžino in nabojem kar linearna, saj ima vsak bazni par dva negativna naboja). Boljše ločevanje se doseže npr. v gelih, skozi katere manjše molekule potujejo bistveno lažje kot večje. Poleg tega lahko s pazljivo izbiro pH raztopine vplivamo na naboj na makromolekuli (če je pH enak izoelektrični točki makromolekule, se le ta v električnem polju seveda sploh ne bo premikala).

Slika B prikazuje primer rezultata ločevanja proteinov z elektroforezo na gelu. Na začetek gela vbrizgamo raztopino z neznano vsebnostjo proteinov ter na gel priključimo električno napetost. Ko se po nekaj časa proteini razločijo, jih obarvamo in vsaka vrsta proteinov se na gelu prikaže kot ločen pas. Če hkrati skozi gel vzporedno spustimo še kontrolno raztopino s proteini znanih velikosti (na sliki spodaj, velikosti so označene v kilodaltonih), lahko enostavno ugotovimo, koliko različnih vrst proteinov smo imeli v vzorcu in približno kako veliki so bili. Na sliki je bilo v vzorcu A npr. največ proteinov z velikostjo približno 50 kD, v vzorcu B pa je bilo teh proteinov manj, več pa je bilo proteinov z velikostjo 95 kD.

19.3 Izmenični tok

V prejšnjem poglavju smo opisovali električni tok v prevodni snovi, ko jo priključimo na stalno napetost in tok teče le v eno smer. Pogosto pa je praktično uporabljati izmenični tok, pri katerem se napetost na izvoru in posledično tudi električni tok periodično sinusno spreminjata. Izmenični tok je npr. lažje proizvajati in prenašati na dolge razdalje, zaradi česar ga uporabljamo v električnem omrežju (glavne zasluge za vpeljavo izmeničnega toka je imel legendarni Nikola Tesla). Poleg tega izmenični tok v ionskih raztopinah ne povzroči

elektrolize. V Evropi je frekvenca električnega omrežja 50 Hz, v Ameriki pa 60 Hz. Z angleško kratico se izmenični tok označi AC (alternating current), enosmerni pa DC (direct current).

Če se napetost spreminja sinusno, lahko njeno odvisnost od časa zapišemo analogno zapisu nihanja:

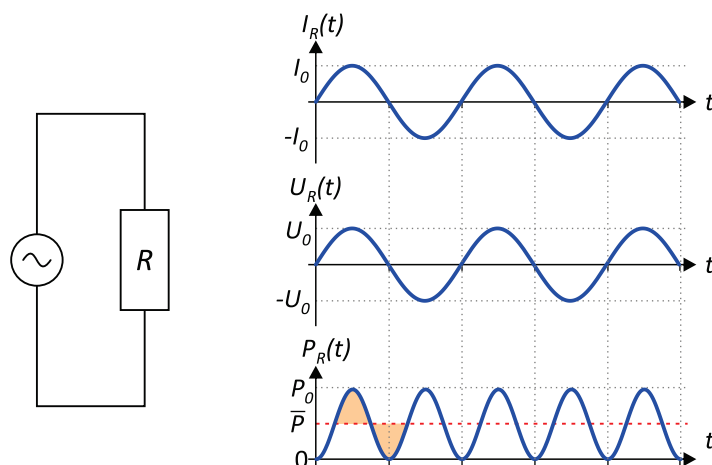
$$U(t) = U_0 \sin(\omega t) , \quad (19.10)$$

kjer je ω krožna frekvenca, ki je s frekvenco povezana z znano enačbo $\omega = 2\pi\nu$.

Če na izmenično napetost priključimo upor, se tok skozi upor po Ohmovem zakonu spreminja sorazmerno z napetostjo ($I(t) = U(t)/R$, enačba 19.2) in se torej tok spreminja v fazi z napetostjo:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t) , \quad (19.11)$$

pri čemer sta tudi amplituda toka in napetosti povezani preko Ohmovega zakona: $I_0 = U_0/R$ (slika 19.3).



Slika 19.3: Spreminjanje toka in napetosti skozi upor pri izmeničnem toku. Zaradi Ohmovega zakona sta tok in napetost v vsakem trenutku sorazmerna, njuni amplitudi pa sta povezani z upornostjo upora $U_0 = RI_0$. Moč, ki se troši na upor ($P(t) = I(t)U(t)$), se spreminja kot $\sin^2(\omega t)$ in je vedno pozitivna, v povprečju pa je enaka kar polovici amplitude, $\bar{P} = P_0/2$ (pri funkciji $\sin^2$ je površina vrha ravno enaka površini doline - na sliki sta oba označena z oranžno).

Napetost in tok se pri izmeničnem toku spreminjata periodično od pozitivne do negativne vrednosti, zato sta v povprečju enaka nič, $\overline{U(t)} = 0$ in $\overline{I(t)} = 0$.

Kot merilo za velikost napetosti in toka zato po navadi uporabimo *efektivno napetost* in *efektivni tok*, ki sta definirana kot

$$U_{\text{ef}} = \sqrt{\overline{U^2(t)}} \quad \text{oz.} \quad I_{\text{ef}} = \sqrt{\overline{I^2(t)}} \quad (19.12)$$

V angleščini se tako izračunane efektivne vrednosti imenujejo RMS vrednosti - *root-mean-square* - saj jih izračunamo tako, da količino najprej kvadriramo in s tem dobimo le pozitivne vrednosti, nato izračunamo povprečje, na koncu pa še korenimo. Ker je povprečje kvadrata sinusa enako eni polovici ($\overline{\sin^2(\omega t)} = \frac{1}{2}$), so pri sinusnih spremembah efektivne vrednosti za faktor $\sqrt{2}$ manjše od amplitude:

$$U_{\text{ef}} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0 \quad \text{oz.} \quad I_{\text{ef}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 \quad (19.13)$$

V Evropi je efektivna napetost v hišnem električnem omrežju enaka $U_{\text{ef}} = 230 \text{ V}$, v Ameriki pa $U_{\text{ef}} = 110 \text{ V}$.

Čeprav sta povprečni vrednosti toka in napetosti enaki nič, pa to ne velja za moč, ki se troši na upor. Moč je namreč vedno pozitivna ne glede na to, v katero smer teče tok, saj je produkt napetosti in toka (slika 19.3):

$$\overline{P} = \overline{I(t)U(t)} = I_0 U_0 \overline{\sin^2(\omega t)} = \frac{1}{2} I_0 U_0, \quad (19.14)$$

oziroma

$$\overline{P} = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}}. \quad (19.15)$$

Povprečno moč, ki se troši na upor, lahko torej pri izmeničnem toku izračunamo na enak način kot pri enosmernem, le da v formulo za moč (enačba 19.3) vstavimo efektivni vrednosti napetosti in toka.

19.4 Tok skozi kondenzator: reaktanca

Človeško telo električnemu toku ne predstavlja le enostavnega upora, saj so celice obdane z membrano, ki se z električnega stališča obnaša kot kondenzator. Za razumevanje obnašanja toka skozi telo si moramo zato najprej ogledati, kako se v izmeničnem toku obnašajo električni sistemi, ki jih sestavljajo upori in kondenzatorji.

Obnašanje upora v izmeničnem toku smo spoznali v prejšnjem poglavju: napetost na uporu v vsakem trenutku sorazmerna toku, razmerje njunih amplitud pa je po Ohmovem zakonu enako upornosti ($U_0/I_0 = R$). Pri kondenzatorju je drugače: osnovna lastnost kondenzatorja je, da se lahko na njem nabira naboj, pri čemer je električna napetost na kondenzatorju sorazmerna količini nabranega naboja ($e = CU$, enačba 17.13). Ko z električnim tokom na kondenzator priteka naboj, se kondenzator polni. Ob tem na kondenzatorju narašča napetost, s katero pa kondenzator nasprotuje toku (primer 19.2). Za kondenzator ne velja Ohmov zakon, ampak je tok skozi kondenzator sorazmeren odvodu napetosti na kondenzatorju po času ($I = de/dt = CdU/dt$). Če se torej napetost na kondenzatorju spreminja kot sinus, se bo tok spreminjal kot kosinus. Daljši račun pokaže, da za razmerje med amplitudo napetosti in amplitudo toka na kondenzatorju velja (MaFijski primer 19.1):

$$U_0/I_0 = X_C, \quad \text{kjer je} \quad X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (19.16)$$

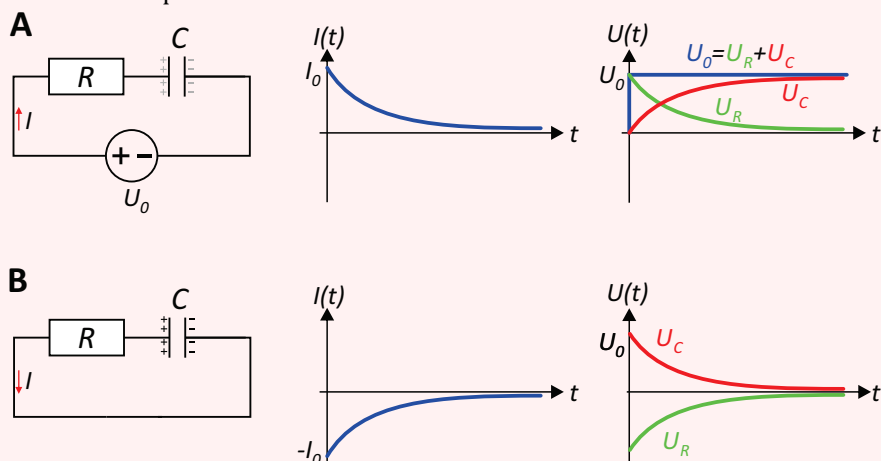
Količino X_C imenujemo *reaktanca* kondenzatorja, saj opisuje, kako močno se kondenzator «upira» toku (večja kot je reaktanca, manjša je amplituda toka pri dani amplitudi napetosti). Enota za reaktanco je enaka kot enota za upornost, tj. ohm. Pri tem je potrebno poudariti, da se kondenzator toku ne upira na enak način kot upor: na uporu se vedno porablja električna energija (enačba 19.15), kondenzator pa se v enem nihaju toka napolni in sprazni ter pri tem energijo najprej sprejme ter nato spet odda, zato je povprečna moč na kondenzatorju enaka 0.

Reaktanca je obratno sorazmerna frekvenci izmeničnega toka, kar si lahko intuitivno dobro predstavljamo: če na kondenzator priključimo enosmerni tok (pri njem je frekvenca enaka nič, reaktanca pa je torej neskončno velika), se bo kondenzator napolnil in nato toka sploh ne bo prepuščal (primer 19.2). Če je po drugi strani frekvenca toka visoka, se bo kondenzator polnil in praznil in bo izmenični tok skozi njega tekkel brez težav (reaktanca kondenzatorja je v tem primeru majhna).

Primer 19.2: polnjenje in praznjenje kondenzatorja

Osnovna značilnost kondenzatorja je, da se na njemu lahko nabere električni naboj, ki je z napetostjo na kondenzatorju povezan preko $e = CU$, kjer je C kapaciteta kondenzatorja. Za kondenzator zato ne velja Ohmov zakon, saj tok skozi kondenzator ni sorazmeren napetosti na kondenzatorju, temveč odvodu napetosti po času: $I = de/dt = CdU/dt$. Oglejmo si obnašanje toka in napetosti na kondenzatorju, če

prazen kondenzator priključimo na izmenično napetost in če poln kondenzator praznimo skozi upor.



Če prazen kondenzator priključimo na izvor enosmerne napetosti (slika A), po tokokrogu steče električni tok, s katerim na kondenzator priteka naboj in kondenzator se začne polniti. Zaradi tega na kondenzatorju narašča napetost (U_C), ki pa je ravno nasprotna napetosti izvora in zato nasprotuje toku. Ko se napetost na kondenzatorju po velikosti približuje napetosti na izvoru, se električni tok zmanjšuje proti nič. Na začetku je torej polnjenje hitro, potem pa vedno počasnejše. Natančnejši račun pokaže, da se kondenzator polni eksponentno s časom, $U_C = U_0(1 - e^{-t/\tau})$, tok pa pada eksponentno s časom, $I = I_0 e^{-t/\tau}$, pri čemer je značilni čas enak produktu upora in kapacitete, $\tau = RC$. Tok skozi kondenzator zares ni sorazmeren napetosti temveč njenemu odvodu. Napetost na uporu (U_R) je sorazmerna toku in tudi eksponentno pada s časom, vsota napetosti na uporu in kondenzatorju pa je vseskozi enaka napetosti na izvoru $U_R + U_C = U_0$.

Oglejmo si še obnašanje toka in napetosti na kondenzatorju, če napolnjen kondenzator iz primera A izpraznimo (slika B). Izvor izključimo iz tokokroga, zato skozi upor steče električni tok s katerim naboj odteka s kondenzatorja in kondenzator se začne prazniti (tok sedaj teče v obratni smeri, zato je negativen). Napetost na kondenzatorju se počasi približuje vrednosti 0, hkrati pa se manjša tudi električni tok, zato se kondenzator prazni vse počasneje. Natančnejši račun pokaže, da je tudi praznjenje kondenzatorja eksponentno, $U_C = U_0 e^{-t/\tau}$, pri čemer je značilni čas praznjenja spet enak produktu upora in kapacitete, $\tau = RC$ (MaFijski primer 19.1. Spomnimo se tudi, da smo analogen račun naredili pri obravnavi transporta toplote v poglavju 16.5: MaFijski primer 16.1). Tudi v tem primeru je tok sorazmeren odvodu napetosti na kondenzatorju, vsota napetosti na uporu in kondenzatorju pa je vseskozi enaka 0, saj v tokokrogu ni izvora napetosti.

MaFijski primer 19.1: tok skozi kondenzator

Za vajo izračunajmo, kako se spreminja tok skozi kondenzator ob njegovem praznjenju, nato pa pogledajmo še, kako se kondenzator obnaša v izmeničnem toku.

V primeru 19.2B smo navedli, da se kondenzator prazni eksponentno s časom, sedaj pa bomo ta rezultat tudi izračunali! Ob času 0 je kondenzator poln in je na njem napetost U_0 , nato pa ga priključimo na upor in se začne prazniti. Tok skozi upor je enak toku skozi kondenzator, pri čemer je tok skozi upor po Ohmovem zakonu enak $I = U_R/R$, tok skozi kondenzator pa je $I = de/dt = CdU_C/dt$. Če upoštevamo, da je padec napetosti na uporu nasprotno enak napetosti na kondenzatorju ($U_R = -U_C$), dobimo

$$I = \frac{CdU_C}{dt} = -\frac{U_C}{R}. \quad (19.17)$$

Zgornjo enačbo preuredimo

$$\frac{dU_C}{U_C} = -\frac{dt}{RC} \quad (19.18)$$

in integriramo

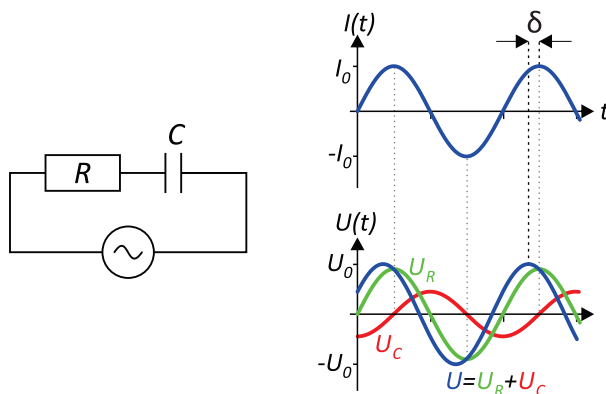
$$\ln U_C/U_0 = -\frac{t}{RC} \quad (19.19)$$

ter rezultat antilogaritmiramo in tako dobimo znano eksponentno odvisnost:

$$U_C(t) = U_0 e^{-t/\tau}, \quad (19.20)$$

kjer je značilni čas enak produktu upornosti in kapacitete, $\tau = RC$.

Oglejmo si še obnašanje toka in napetosti na kondenzatorju če vezje s kondenzatorjem in uporom priključimo na izmenično napetost.



Upor in kondenzator sta vezana zaporedno, zato skozi oba teče isti tok. Za lažji račun predpostavimo, da se tok spreminja kot kosinus:

$$I = I_0 \cos(\omega t) \quad (19.21)$$

Za upor velja Ohmov zakon, zato je napetost na uporu v vsakem trenutku sorazmerna toku in se tudi spreminja kosinusno (zelena krivulja na sliki)

$$U_R = U_{R0} \cos(\omega t) , \quad (19.22)$$

njuni amplitudi pa sta povezani preko $U_{R0} = RI_0$. Za kondenzator po drugi strani velja, da je tok sorazmeren odvodu napetosti. Če se tok spreminja kosinusno, se napetost na kondenzatorju torej spreminja sinusno (rdeča krivulja na sliki):

$$U_C = U_{C0} \sin(\omega t) . \quad (19.23)$$

Napetost in tok na kondenzatorju torej ne nihata v fazi, ampak napetost zaostaja za tokom za fazno razliko $\pi/2$. Povezavo med amplitudo napetosti na kondenzatorju in tokom dobimo, če tok izrazimo kot odvod napetosti po času in torej enačbo 19.23 odvajamo po času:

$$I = \frac{de}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} = \omega C U_{C0} \cos(\omega t) . \quad (19.24)$$

S primerjavo enačb 19.21 in 19.24 dobimo ravno izraz za reaktanco kondenzatorja, ki povezuje amplitudi napetosti in toka skozi kondenzator (enačba 19.16).

Skupni padec napetosti na vezju upora in kondenzatorja je enak vsoti padcev na uporu in kondenzatorju, $U = U_R + U_C$ (modra krivulja na sliki). S spretnim seštevanjem kotnih funkcij je mogoče pokazati, da se skupna napetost spreminja z enako frekvenco kot tok, a ima v splošnem glede na tok fazni zamik δ :

$$U = U_0 \cos(\omega t - \delta) \quad (19.25)$$

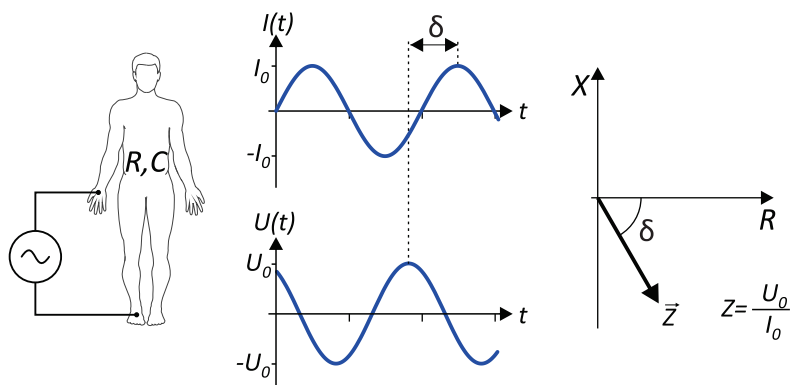
V naslednjem poglavju bomo spoznali, da so napetost in tok skozi sistem ter fazni zamik δ povezani preko električne impedance sistema.

19.5 Tok skozi telo in impedance telesa

Sistemi, ki so sestavljeni iz uporov in kondenzatorjev (npr. človeško telo), imajo v splošnem upornost (R) in reaktanco (X). V takih sistemih napetost in tok ne nihata v fazi in njuni amplitudi nista povezani s preprostim Ohmovim zakonom. Lastnost, ki povezuje napetost in tok v splošnem primeru, imenujemo *električna impedance* (oz. *bioimpedanca*, kadar gre za biološke sisteme, slika 19.4). V splošnem impedance zapišemo kot vektor $\vec{Z}$, pri katerem je ena komponenta enaka upornosti sistema, druga pa njegovi reaktanci¹. Dolžina vektorja impedance podaja razmerje med amplitudama napetosti in toka ($Z = U_0/I_0 = \sqrt{R^2 + X^2}$), njegova smer pa je povezana s faznim zamikom

¹V elektrotehniki impedance opišejo z vektorjem v kompleksni ravnini, a se mi v tak zapis ne bomo spustili, saj računanje s kompleksnimi števili presega naše znanje matematike

med napetostjo in tokom (označimo ga z $\delta = \arctan(X/R)$). Če je ima sistem le upornost, se tok in napetost spreminjata v fazi ($\delta = 0$), če pa ima sistem le kapacitivno reaktanco, napetost za tokom zaostaja za fazno razliko $\delta = \pi/2$.



Slika 19.4: Električna impedanca je posplošitev pojma električna upornost in jo uporabljamo v električnih sistemih, ki niso sestavljeni le iz uporov, ter zato pri njih za opisovanje izmeničnega toka ne moremo uporabiti enostavnega Ohmovega zakona. Tak sistem je tudi človeško telo, ki ima poleg upornosti tudi kapaciteto. Če na telo priključimo izmenični tok, se tok in napetost spreminjata s faznim zamikom (označimo ga z δ). Impedanca je vektor $\vec{Z}$, katerega dolžina (Z) opisuje razmerje med amplitudama napetosti in toka, smer pa fazno razliko med napetostjo in tokom (če napetost zaostaja za tokom, je δ po dogovoru negativen). Ena komponenta impedance je upornost sistema, druga pa njegova reaktanca (enačba 19.16). Impedanca telesa je odvisna od oblike in sestave telesa (deleža maščobe, razmerja telesnih tekočin...), pa tudi od frekvence izmeničnega toka.

Impedanca tkiv je odvisna od mnogih faktorjev, npr. od velikosti, oblike, od njihove sestave, pa tudi od frekvence izmeničnega toka (spomnimo se, da je reaktanca sistema odvisna od frekvence toka). Specifična upornost krvi je približno $1,5 \Omega\text{m}$, upornost maščobnega tkiva pa približno 25 krat večja. Obe tkivi se obnašata skoraj kot idealna upora, zato je njuna impedanca praktično enaka njuni upornosti ni odvisna od frekvence toka. Drugače je pri mišičnem tkivu, kjer ima kapaciteta celičnih membran večjo vlogo. Specifična upornost mišičnega tkiva je pri frekvenci 100 Hz nekajkrat večja od upornosti krvi, pri frekvenci 1 MHz pa pade na praktično enako vrednost.

Človeško telo si lahko z električnega stališča predstavljamo kot zapleteno vezje vzporedno in zaporedno vezanih tkiv, ki imajo vsaka svojo električno impedanco. Skupno impedanco telesa bi lahko izračunali podobno, kot smo

izračunali skupno upornost vezja več uporov (slika 19.1), a je račun v praksi zapleten in ga raje prepustimo elektrotehnikom. Omenimo le, da se v medicini intenzivno raziskuje uporabnost meritve impedance telesa za določanje deleža telesnih maščob in razmerja telesnih tekočin, kar bi bilo lahko zelo uporabno pri sledenju stanja pacientov na dializi (primer 19.3).

Za konec si pogledjmo še, kakšne poškodbe lahko v telesu povzroči električni udar. Električni tok na telo deluje predvsem preko dveh mehanizmov. Prvi je termični, saj se tkivo zaradi električnega toka segreva (toplota, ki se sprosti zaradi toka, je produkt moči in časa izpostavljenosti toku, $Q = Pt = RI_{ef}^2 t$). Ožganine in opekline so zato pogoste spremljevalke električnega udara.

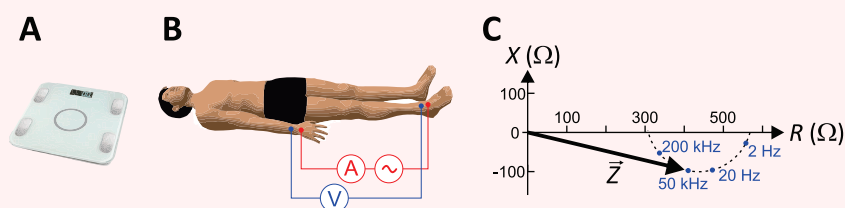
Drugi pomemben učinek toka na tkiva je biološki, saj tok vpliva na vzdraženje celic (predvsem nevronov in mišičnih celic). Če je tok majhen, ga zaznamo le kot ščemenje, večji tok pa lahko povzroči nehoteno krčenje mišic (ponesrečenec zaradi tega npr. ne more izpustiti žice, iz katere ga je streslo, ko jo je prijel z roko) ali celo fibrilacijo srčnih ventriklov (tabela 19.2). Velik delež smrtnih primerov zaradi električnega udara je povezan prav s srčnim zastojem. Po drugi strani lahko ventrikularno fibrilacijo prekinemo ravno z dovolj močnim tokom skozi srce, ki srce za hip »resetira« in mu omogoči, da začne spet normalno biti (ta postopek imenujemo defibrilacija, aparat, ki ga pri tem uporabljamo pa defibrilator).

vpliv	enosmerni tok	izmenični tok (60 Hz)
meja zaznave	3,5 mA	0,7 mA
meja bolečine	41 mA	6 mA
popoln krč mišice	60 mA	15 mA
ventrikularna fibrilacija	500 mA	100 mA

Tabela 19.2: Pregled vplivov električnega toka na človeško telo (povzeto po [8]). Vrednosti so približne, saj je dejanski vpliv odvisen od mnogih dejavnikov, poleg tega je zaradi etičnih razlogov težko izvajati natančne in kontrolirane meritve vplivov toka na telo. Po nekaterih drugih podatkih lahko do fibrilacije srčnih ventriklov pride že pri nižjem toku in je tok 500 mA dovolj velik že za njihovo defibrilacijo.

Primer 19.3: bioimpedanca

V poglavju 19.5 smo spoznali, da na prevajanje električnega toka skozi telo ne vpliva le njegova električna upornost, temveč tudi električna reaktanca, ter da skupaj ti dve lastnosti združimo v električno impedanco. Ker je električna impedanca človeškega telesa (včasih jo imenujemo tudi bioimpedanca) odvisna od njegove sestave, bi bilo mogoče z natančno meritvijo bioimpedance sklepati na sestavo telesa, npr. na delež maščobnega tkiva. Zaradi vse cenejših električnih inštrumentov je meritev impedanc vse dostopnejša in jo pogosto srečamo kar na stojnicah v malo večjih nakupovalnih središčih, delež maščobe v telesu pa naj bi nam znala izmeriti tudi že vsaka malo bolj »pametna« osebna tehtnica (slika A, taka tehtnica ima vgrajene elektrode, na katere moramo stopiti z bosimi nogami). Kljub temu pa meritev bioimpedance klinično veljavo dobiva le počasi. Bioimpedanco namreč največkrat merijo le pri eni frekvenci (50 kHz) in z našim znanjem fizike takoj razumemo, da je le iz dveh izmerjenih parametrov (Z in δ) nemogoče natančno določiti delež maščobnega tkiva v telesu. Na skupno impedanco telesa namreč ne vpliva le delež maščob v telesu, ampak tudi vsa druga tkiva, njihova razporeditev, oblika in velikost, prevodnost kontakta med elektrodami in kožo... Rezultatom meritev bioimpedance na stojnicah in tehtnicah zato ne moremo zaupati.



Klinično bolj perspektivna je morda meritev bioimpedance za sledenje uspešnosti terapije na posameznem bolniku (npr. med dializo ali prehransko terapijo), saj se geometrijski faktorji, ki vplivajo na impedanco, na posamezniku med terapijo ne spreminjajo bistveno. Pri klinični meritvi bioimpedance na pacientovo roko in nogo po navadi priključimo štiri elektrode: skozi dve v telo dovajamo izmenični tok z amplitudo nekaj μA , na drugih dveh pa merimo amplitudo in fazni zamik napetosti (slika B).

Meritve kažejo, da se impedanca telesa z zviševanjem frekvence toka spreminja približno po krožnici (slika C): pri nizkih frekvencah je upornost največja, reaktanca pa majhna, saj večino toka teče mimo celic po medceličnem prostoru in se kapaciteta membran sploh ne opazi. Z višanjem frekvence se večja delež toka, ki teče tudi skozi celice, zato se začne upornost manjšati, reaktanca pa večati. Pri zelo velikih frekvencah se začne reaktanca spet manjšati, saj je kapacitivna reaktanca membran obratno sorazmerna frekvenci. V kliniki se zato intenzivno raziskuje uporabnost meritve bioimpedance pri večih vrednostih frekvence toka, kar bi lahko skupaj z natančnejšimi meritvami oblike telesa dalo natančnejše informacije o sestavi telesa.

Primer 19.4: električni udar

Kako visoka napetost je smrtno nevarna? To vprašanje nima enostavnega odgovora, saj vpliv električnega udara na telo ni odvisen le od napetosti temveč tudi od poti toka skozi telo, njegove frekvence, trajanja udara in še mnogih drugih dejavnikov. Vseeno poskusimo oceniti najnižjo nevarno enosmerno napetost. Raziskave kažejo, da je upornost telesa, ki je preko velike površine v dobrem kontaktu z izvorom (npr. z mokro kožo), približno $500\ \Omega$. Iz tabele 19.2 razberemo, da je z nekaj smole in ob dolgem kontaktu za resne težave dovolj že približno tok $30\ \text{mA}$. Napetost, ki povzroči tak tok, je

$$U = RI = 500\ \Omega \cdot 0,03\ \text{A} = 15\ \text{V} , \quad (19.26)$$

kar je že blizu napetosti na avtomobilskem akumulatorju! Čeprav v praksi pogosto ni tako hudo, saj kontakt z izvorom ponavadi ni tako dober in po telesu steče bistveno nižji tok (suha koža lahko upor telesa npr. poveča na več tisoč Ω), je zgornji račun dober dokaz, zakaj je pri delu z električnimi izvori potrebna ustrezna previdnost.

Kaj pa udar strele? Pri streli so napetosti lahko tudi več $100.000\ \text{V}$, zato bi po zgornjem izračunu udar strele lahko povzročil ogromne tokove in nepopravljive poškodbe. Na srečo je udar strele pogosto zelo kratek (lahko traja tudi le nekaj μs), poleg tega pa lahko pri njem velik del toka steče po površini kože. Obnašanja toka skozi telo pri udaru strele še ne razumemo v celoti, dolgoletna statistika pa presenetljivo kaže, da je verjetnost za preživetje ob udaru strele več kot $50\ \%$.

Poglavje 20

Izvori električne napetosti in toka v telesu

Čeprav nas lahko visoka električna napetost ubije, pa brez elektrike tudi ne bi mogli živeti. Električna napetost namreč neprestano nastaja v telesu in poganja veliko celičnih procesov, ključna pa je tudi za delovanje živcev in mišic. Napetosti, ki nastanejo v telesu, so sicer relativno majhne (do približno desetinke volta), a vseeno dovolj velike, da jih lahko izmerimo in na njihovi osnovi sklepamo o delovanju procesov v telesu. V tem poglavju bomo spoznali, da je v telesu glavni izvor električne napetosti prekomembranski električni potencial, ki nastane kot posledica koncentracijskih gradientov ionov preko selektivno prepustnih celičnih membran. Najprej si bomo s pomočjo znanja termodinamike razložili nastanek t. i. *mirovnega prekomembranskega potenciala*, ki je prisoten v nevzdraženih celicah, nato pa še nastanek *akcijskega potenciala*, do katerega pride med vzdraženostjo. Na koncu bomo opisali, kako lahko sinhrona depolarizacija celic privede do merljivih električnih tokov v telesu.

20.1 Prekomembranski potencial

Mirovni prekomembranski električni potencial je v prvi vrsti povezan z dvema pojavoma: a) koncentracija nekaterih ionov je na eni strani membrane drugačna kot na drugi in b) membrana je selektivno prepustna in nekatere ione prepušča bolje kot druge. Na prekomembranski potencial najbolj vplivajo tisti ioni, pri katerih je koncentracijska razlika največja in za katere je membrana najbolj prepustna. Pri živčnih in mišičnih celicah v mirovnem stanju so to kalijevi ioni, katerih koncentracija je zaradi aktivnega prekomembran-

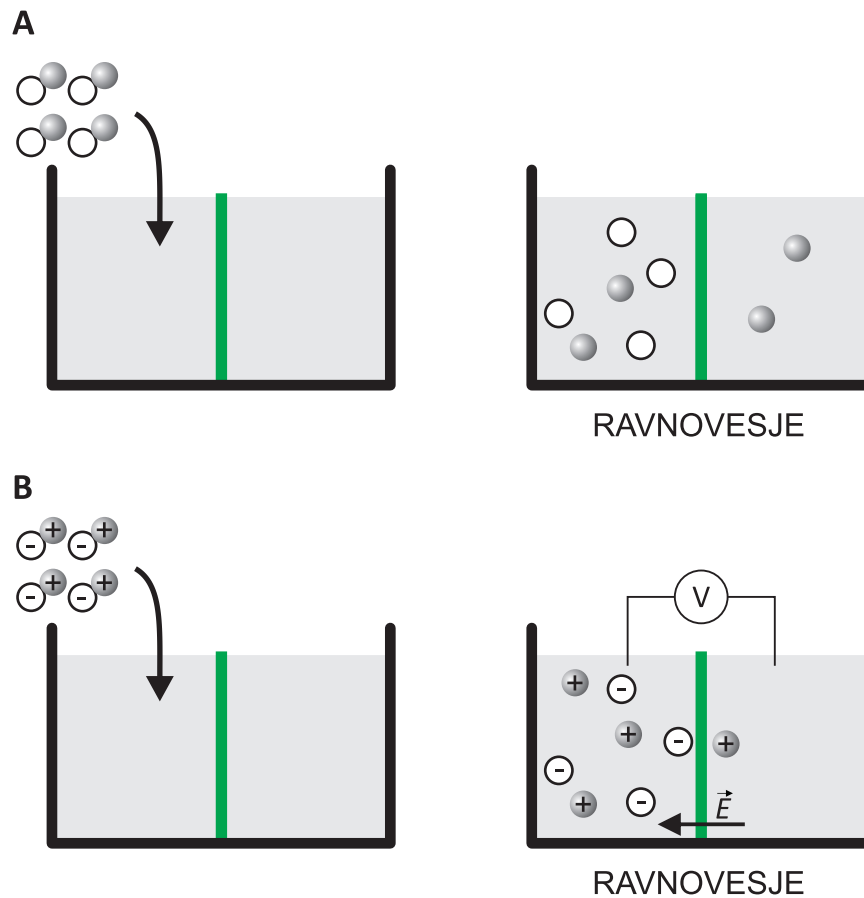
skega transporta v celici večja kot zunaj (tabela 20.1). Električni potencial v celici v mirovnem stanju je zato približno 100 mV nižji kot zunaj nje. To je na prvi pogled presenetljivo – kalijevi ioni so pozitivno nabiti, a je električni potencial bolj negativen na strani membrane, kjer je njihova koncentracija večja. Poglejmo si, zakaj je tako.

ion	K ⁺	Na ⁺	Cl ⁻
c_{not} [mM]	135	12	4
c_{zun} [mM]	4	140	116
P [cm/s]	10^{-7}	10^{-9}	10^{-8}

Tabela 20.1: Tipične koncentracije ionov v živčnih celicah in izven njih ter tipične prepustnosti membrane.

Izvor mirovnega prekomembranskega potenciala je najlažje razumeti v okviru t. i. *Nernstove enačbe*, ki opisuje kemijsko ravnovesje ionov na obeh straneh membrane. Za lažji začetek se spomnimo, kako smo opisovali kemijsko ravnovesje za nenabite raztopljene delce. Če na eni strani membrane raztopimo dve vrsti topljencev, membrana pa je prepustna le za eno vrsto, bodo le-ti zaradi koncentracijske razlike prehajali na drugo stran vse dokler ne bo njihov kemijski potencial enak na obeh straneh membrane (slika 20.1A). Ker je kemijski potencial za nenabite topljence odvisen le od koncentracije (spomnimo se enačbe 15.8 pri termodinamiki: $\mu = \mu_0 + RT \ln c/c_0$), bo v ravnovesju koncentracija teh topljencev na obeh straneh membrane enaka. Za topljence, ki preko membrane ne morejo, ravnovesja kemijskih potencialov seveda ne velja.

Situacija se zelo spremeni, če so topljenci nabiti. Če je na eni strani membrane raztopljena sol, membrana pa prepušča le katione, bodo le ti začeli prehajati na drugo stran membrane, a se bo pri tem hitro vzpostavil prekomembranski električni potencial, ki bo njihovemu prehajanju nasprotoval. Ko namreč kationi prehajajo preko membrane, za seboj puščajo presežek anionov, ki katione vlečejo nazaj (slika 20.1B). Ob tem se spomnimo primera 17.1, pri katerem smo videli, da mora za vzpostavitev prekomembranskega potenciala membrano prečkati zelo malo naboja (razmerje med njima določa kapaciteta



Slika 20.1: Do mirovnega (ravnovesnega) prekomembranskega potenciala pride, ko sta raztopini z različnima koncentracijama ionov pregrajeni s selektivno prepustno membrano (polprepustna membrana na sliki je označena z zeleno in prepušča le sive topljence). A) Primer, ko so topljenci električno nevtralni. Če je na eni strani membrane večja koncentracija topljencev, ki lahko prehajajo membrano, bodo ti topljenci membrano prehajali vse dokler njihova koncentracija na obeh straneh ne bo enaka. B) Če so topljenci električno nabiti, se že pri prehodu majhnega števila topljencev preko membrane ustvari električni potencial, ki njihovo prehajanje zaustavlja. V ravnovesju se torej koncentraciji topljencev ne izenačita, preko membrane pa se ustvari mirovni prekomembranski potencial.

membrane), tako malo, da se koncentracija ionov na obeh straneh membrane praktično ne spremeni. V primeru nabitih topljencev se ravnovesje vzpostavi zelo hitro in ne šele, ko je njihova koncentracija enaka na obeh straneh mem-

brane. Nernstovo enačbo dobimo, ko zapišemo pogoj za ravnovesje nabitih topljencev.

Kemijski potencial nabitih topljencev (ionov) ni odvisen le od njihove koncentracije, temveč tudi od električnega potenciala. Spomnimo se namreč, da je kemijski potencial snovi enak prosti entalpiji na mol, prosta entalpija pa je povezana z notranjo energijo. Ioni imajo v električnem potencialu tudi električno energijo, ki je enaka $W_e = e\varphi$ (enačba 17.6), zaradi česar bodo imeli ob prisotnosti električnega potenciala v kemijskem potencialu dodaten člen

$$\mu_e = \frac{W_e}{n} = \frac{NZe_0\varphi}{n} = ZF\varphi, \quad (20.1)$$

kjer je φ električni potencial, Z je valenca ionov, F pa je Faradayeva konstanta, ki opisuje naboj enega mola osnovnega naboja in smo jo spoznal že v en. 19.9, $F = e_0N_A$ (v zgornjem računu smo upoštevali še, da je $n = N/N_A$). Kemijski potencial v prisotnosti električnega polja včasih imenujemo tudi *elektrokemijski potencial*. V ravnovesju je torej elektrokemijski potencial ionov, ki lahko prehajajo membrano, enak na obeh straneh membrane:

$$\mu_0 + RT \ln \frac{c_{\text{not}}}{c_0} + ZF\varphi_{\text{not}} = \mu_0 + RT \ln \frac{c_{\text{zun}}}{c_0} + ZF\varphi_{\text{zun}}, \quad (20.2)$$

Če iz zgornje enačbe izrazimo prekomembranski potencial ($U = \varphi_{\text{not}} - \varphi_{\text{zun}}$), se členi z μ_0 in c_0 pokrajšajo in dobimo Nernstovo enačbo

$$U = -\frac{RT}{ZF} \ln \frac{c_{\text{not}}}{c_{\text{zun}}}, \quad (20.3)$$

ki opisuje zvezo med ravnovesnim prekomembranskim potencialom in koncentracijama ionov na obeh straneh membrane. V fiziologiji Nernstovo enačbo pogosto zapišemo tudi v bolj praktični obliki, pri kateri v zgornjo enačbo vstavimo fiziološko temperaturo ($T = 37^\circ\text{C} = 310\text{ K}$) in logaritem zapišemo z desetiško osnovo (upoštevamo tudi $\ln x = \log x / \log e$).

$$U \approx -\frac{60\text{ mV}}{Z} \log \frac{c_{\text{not}}}{c_{\text{zun}}}. \quad (20.4)$$

Iz tega zapisa Nernstove enačbe takoj vidimo, da 10-kratna razlika koncentracij enovalentnih ionov povzroči prekomembranski potencial 60 mV, 100-kratna pa prekomembranski potencial 120 mV.

Če v Nernstovo enačbo vstavimo koncentracije kalija (tabela 20.1), za mirovni prekomembranski potencial dobimo $U = -60 \text{ mV} \cdot \log(135/4) \approx -92 \text{ mV}$, kar približno ustreza dejanski vrednosti v celicah. Koncentracij ostalih ionov pri tem ni potrebno upoštevati, saj ti ioni ne morejo preko membrane in za njih ne velja ravnovesje elektrokemijskih potencialov na obeh straneh membrane. Čeprav je Nernstova enačba le približek, saj predpostavlja, da je membrana prepustna le za eno vrsto ionov, pa je zelo uporabna za hitro ocenjevanje prekomembranskega potenciala (primer 20.1).

Primer 20.1: hiperkalemija

V nekaterih bolezenskih stanjih lahko pride do spremembe koncentracije kalija v izven celični raztopini. Če je kalija preveč, govorimo o hiperkalemiji, v nasprotnem primeru pa o hipokalemiji. Ker je kalij ključen za mirovni prekomembranski potencial, ima lahko sprememba njegove koncentracije hude posledice. Poleg tega je njegova normalna izvencelična koncentracija majhna, zaradi česar lahko že majhna sprememba koncentracije povzroči veliko spremembo v električnem potencialu. Za hitro oceno vpliva spremembe koncentracije kalija na mirovni prekomembranski potencial lahko uporabimo kar Nernstovo enačbo (en. 20.4). Ocenimo, koliko se spremeni potencial, če se koncentracija kalija zunaj celice iz 4 mM poveča na 8 mM:

$$U = -60 \text{ mV} \cdot \log(135/8) \approx -74 \text{ mV} . \quad (20.5)$$

Majhna sprememba v koncentraciji kalija lahko torej bistveno vpliva na mirovni prekomembranski potencial. Vbrizganje kalijeve raztopine v žilo je lahko zato smrtno nevarno.

V živčnih in mišičnih celicah je za velike prekomembranske koncentracijske gradientne in s tem tudi za nastanek prekomembranskega potenciala v prvi vrsti odgovoren aktivni prekomembranski transport (npr. K^+/Na^+ črpalke). Do prekomembranskega potenciala pa lahko pride tudi brez aktivnega prekomembranskega transporta, saj je v celicah pogosto veliko nabitih makromolekul, ki pomembno prispevajo k celotnemu naboju v celici, a ne morejo preko membrane. V rdečih krvničkah je npr. veliko negativno nabitega hemoglobina (pH v rdečih krvničkah je malo nad 7), njihova membrana pa je najbolj prepustna za klorove ione. Ker je v celicah veliko negativnega naboja že na hemoglobinu, je negativnih klorovih ionov v njihovi notranjosti manj kot zunaj. Po Nernstovi enačbi je torej električni potencial v rdečih krvničkah nekaj manjši kot zunaj njih (za klorove ione je $Z = -1$). Na svoji poti po krvnem obtoku rdeče krvničke srečujejo z neprestanim spreminjanjem koncentracij ionov v krvni plazmi, poleg tega se spreminja tudi pH, zaradi česar preko membrane stalno prehajajo tudi kloridni ioni (pa tudi voda, saj mora biti med uravnavanjem elektrokemijskih potencialov topljencev vseskozi uravnan tudi osmotski

tlak). Elektrokemijsko in osmozno ravnovesje, pri katerem pomembno vlogo igrajo makromolekule, imenujemo tudi *Donnanovo ravnovesje*.

Nernstova enačba dobro velja v približku, ko je membrana prepustna le za eno vrsto ionov. Zahtevnejši račun pokaže, da je razširitev Nernstove enačbe za realne celice t. i. *Goldmanova enačba*, ki upošteva vse tri glavne vrste ionov in njihove prepustnosti:

$$U = -60 \text{ mV} \log \frac{P_K \cdot c_{K \text{ not}} + P_{Cl} \cdot c_{Cl \text{ zun}} + P_{Na} \cdot c_{Na \text{ not}}}{P_K \cdot c_{K \text{ zun}} + P_{Cl} \cdot c_{Cl \text{ not}} + P_{Na} \cdot c_{Na \text{ zun}}} . \quad (20.6)$$

V enačbi so znotrajcelične koncentracije kationov v števcu, znotrajcelične koncentracije anionov pa v imenovalcu. Če bi predpostavili, da je prepustnost kalija veliko večja od prepustnosti ostalih ionov, bi se Goldmanova enačba poenostavila v Nernstovo. Če v Goldmanovo enačbo vstavimo podatke iz tabele 20.1, dobimo vrednost -84 mV , iz česar vidimo, da je Nernstova enačba v tem primeru kar dober približek.

Do sedaj smo govorili le o mirovnem prekomembranskem potencialu. V celicah, ki se lahko vzdražijo (npr. v živčnih celicah), lahko poleg tega med vzdraženjem nastopi tudi *akcijski potencial*, pri čemer se prekomembranski potencial iz negativnega za kratek čas spremeni v pozitivnega. Do akcijskega potenciala pride, ko se prepustnost membrane za Na^+ ione hipno poveča za več kot 1000-krat, zaradi česar nekaj natrijevih ionov preide v celico in se potencial spremeni na nekaj $+10 \text{ mV}$ (če bi povečano prepustnost za natrij vstavili v Goldmanovo enačbo, bi dobili vrednost $+42 \text{ mV}$, če pa bi upoštevali, da so sedaj natrijevi ioni najbolj prepustni in bi jih vstavili v Nernstovo enačbo, bi dobili celo $+62 \text{ mV}$). Ob tem se spomnimo primera 17.1, v katerem smo pokazali, da spremembo potenciala povzroči že prehod majhne količine natrija, zaradi česar se med akcijskim potencialom koncentracija natrija v celici praktično ne spremeni.

20.2 Tkiva kot izvori električnega toka

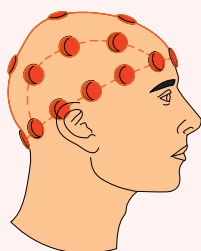
Depolarizacija celice (nastanek akcijskega potenciala) povzroči nastanek majhnega električnega toka v njeni okolici. Pri delovanju mišic in živcev se sinhrono depolarizira veliko število celic, zato se ti tokovi seštevajo in povzročijo majhne, a merljive spremembe električnega potenciala v okoliških tkivih in tudi na površini telesa. V medicini to dejstvo izrablja vrsta diagnostičnih metod, pri katerih z merjenjem električne napetosti na površini telesa dobimo

informacijo o delovanju organov v telesu (primer 20.2).

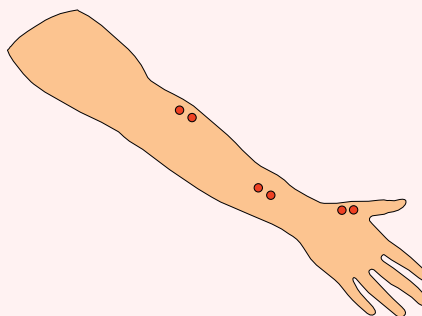
Primer 20.2: Merjenje napetosti na telesu: EKG, EEG in EMG

Med aktivnostjo mišic in živcev se v telesu prožijo majhni električni tokovi, ki jih lahko zaznamo kot spremembe električne napetosti na površini telesa. Z meritvijo napetosti na površini telesa lahko zato dobimo informacijo o delovanju organov v notranjosti telesa. Najbolj znana tovrstna metoda je elektrokardiografija (EKG), s katero dobimo informacije o električni aktivnosti srčne mišice. Z elektroencefalografijo (EEG) analiziramo delovanje možganov, z elektromiografijo (EMG) pa delovanje mišic in motoričnih živcev. Vse metode, pri katerih merimo napetost na površini telesa so povsem neinvazivne in za pacienta ne predstavljajo neprijetnosti. Metodo EKG bomo podrobneje spoznali v naslednjem poglavju, postavitev elektrod za EEG in EMG roke pa je shematično prikazana na spodnji sliki.

A



B

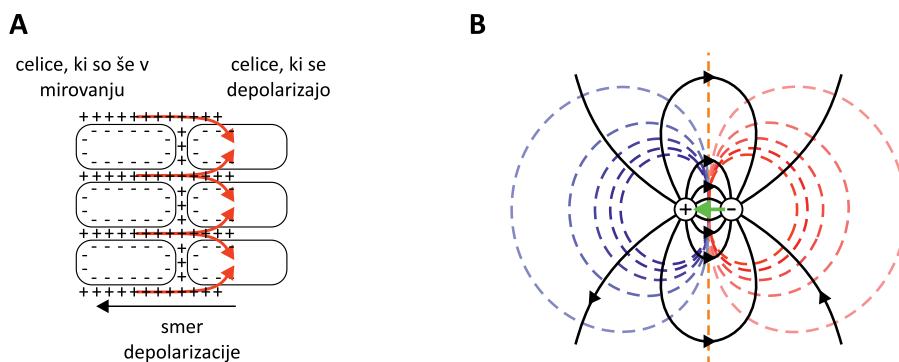


Pri vseh elektrofizioloških metodah je zelo pomembno, da je električni stik med elektrodami in kožo čim boljši. Med površinsko elektrodo in kožo zato nanese poseben gel, ki je električno dobro prevoden in poskrbi za to, da med kovinsko elektrodo in kožo ni zraka, ki je slab električni prevodnik. Če si želimo še posebej natančne meritve, lahko uporabimo tudi elektrode v obliki tankih igel, ki jih zapičimo neposredno v preiskovano tkivo.

Pri metodi EMG lahko elektrode uporabimo ne le za detekcijo napetosti ampak tudi za dovajanje napetostnih sunkov. S temi lahko mišice in živce umetno vzdražimo ter nato opazujemo potovanje vzdražnega vala vzdolž okončine. Na ta način je mogoče enostavno ugotoviti, kje vzdolž okončine je motorični živec poškodovan.

Preden se v naslednjem poglavju posvetimo delovanju EKG, si oglejmo preprost opis električnih tokov in potencialov, ki nastanejo ob sinhroni depolarizaciji celic v telesu. Ko se po tkivu širi depolarizacijski val, steče električni tok iz območja ne-vzbujenih celic proti območju celic, ki se depolarizirajo (slika 20.2A). Podobno steče električni tok tudi pri re-polarizaciji celic, le da so spremembe toka v tem primeru počasnejše, električno polje pa je manjše. V

primeru depolarizacije si lahko prvem približku ne-vzbujeno stran tkiva predstavljamo kot izvor, območje depolarizacij pa kot ponor električnega toka, pri čemer električni tok steče tudi po okoliškem tkivu. Tokovnice električnega toka v tkivu imajo ob tem podobno obliko kot silnice v okolici električnega dipola (slika 20.2B). Podobno kot pri elektrostatiki lahko torej tudi v primeru depolarizacije celic definiramo vektor dipola, ki ga v tem primeru imenujemo *tokovni dipol*. Če izvor toka označimo s $+$, ponor pa z $-$, kažejo tokovnice od $+$ proti $-$, vektor tokovnega dipola pa kaže od $-$ proti $+$, kar je analogno definiciji električnega dipola pri elektrostatiki. Velikost vektorja tokovnega dipola je sorazmerna z velikostjo toka, ki ga izvor in ponor poganjata po telesu.



Slika 20.2: Depolarizacija celic v mišicah in živcih je izvor električne napetosti, ki jo lahko zaznamo tudi na površini telesa. A) Shematični prikaz nastanka električnega toka v tkivu ob sinhroni depolarizaciji večjega števila celic. Depolarizacija povzroči električni tok, katerega izvor je v ne-vzbujenem delu tkiva, ponor pa v tkivu, ki se depolarizira. Pri tem je smer električnega toka nasprotna smeri širjenja depolarizacije. B) Prikaz električnega potenciala in toka v homogenem tkivu, v katerem sta izvor in ponor toka. Izvor ($+$) in ponor ($-$) električnega toka predstavljata t. i. električni tokovni dipol. Vektor tokovnega dipola je označen zeleno in kaže od $-$ proti $+$ (v smer premikanja depolarizacijskega vala v tkivu), tokovnice električnega toka pa so narisane črno in tečejo od izvora proti ponoru. Skupaj z električnim tokom se v tkivu pojavi tudi električni potencial, ki se niža vzdolž tokovnic (najvišji je v pri $+$ in najnižji pri $-$). Ekvipotencialne črte so na sliki označene črtkano (pri višjih potencialih so bolj modre, pri nižjih pa bolj rdeče barve, potencial 0 V je na sredini in je označen z oranžno). Električni potencial okoli tokovnega dipola ima enako obliko kot pri dipolu, ki smo ga srečali pri elektrostatiki. Velikost vektorja tokovnega dipola je tem večja, čim večji tok in potencialne razlike ustvarjata izvor in ponor.

Na osnovi dipolne slike si lahko nazorno predstavljamo električni poten-

cial, ki ga izvor in ponor toka ustvarita v okoliškem tkivu. Podobno kot v navadnem električnem krogu tudi pri tokovnem dipolu električni potencial pada vzdolž vsake tokovnice, pri čemer je najvišji v izvoru, najnižji pa v ponoru. Ekvipotencialne črte okoli tokovnega dipola bodo imele torej enako obliko kot ekvipotencialne črte okoli dipola pri elektrostatiki (slika 20.2B). Ob spreminjanju območja depolarizacije in repolarizacije celic v tkivu, se spreminjajo položaj, usmerjenost in velikost vektorja tokovnega dipola, ob tem pa se se ustrezno spreminja tudi potencial v telesu in na njegovi površini.

Poglavje 21

EKG

Celice v srčni mišici se neprestano periodično depolarizirajo in repolarizirajo in so glavni glavni izvor električne aktivnosti v telesu. Električna aktivnost srca lahko na površini telesa povzroči do nekaj mV velike spremembe električnega potenciala, ki jih je mogoče enostavno izmeriti. To meritev imenujemo *elektrokardiografija*, grafični prikaz spreminjanja napetosti med točkami na površini telesa v odvisnosti od časa imenujemo *elektrokardiogram*, oboje pa označimo s kratico EKG.

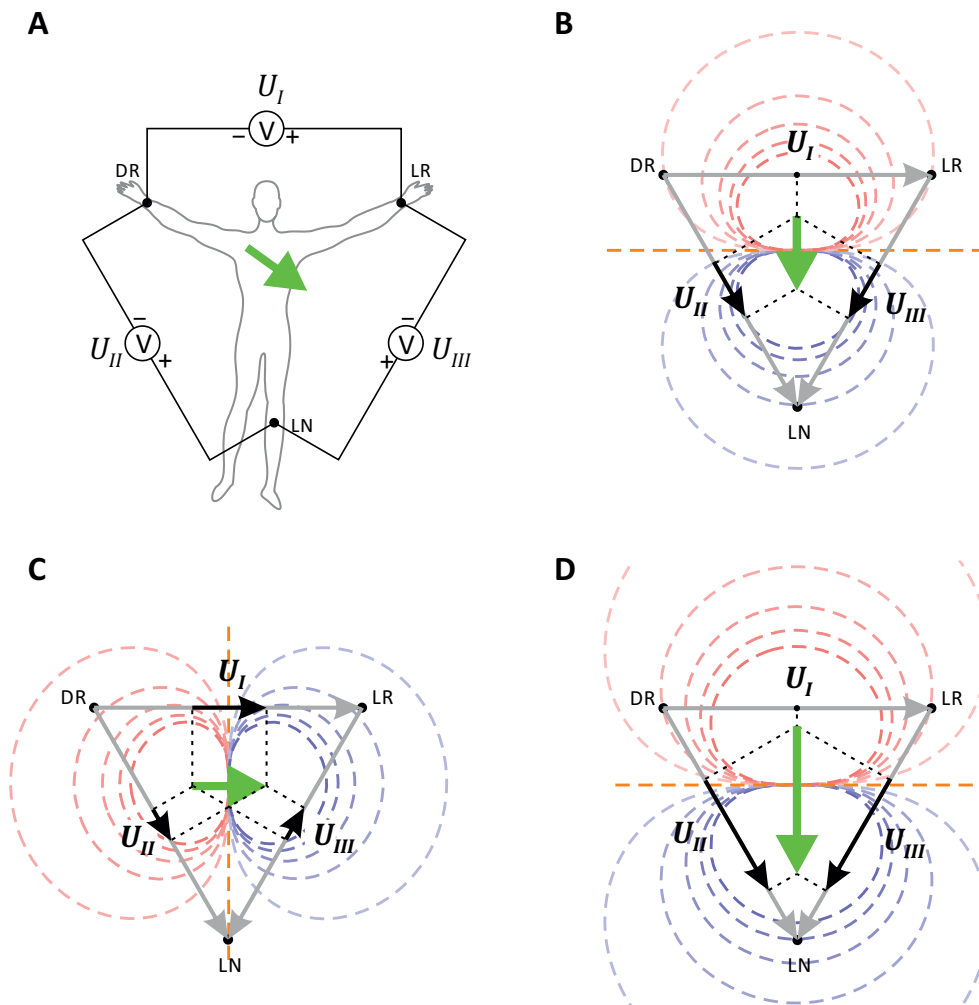
Pri osnovnem EKG merimo časovne odvisnosti napetosti med rokama in levo nogo, ki jih imenujemo tudi *standardni bipolarni odvodi*¹. Napetost med levo in desno roko imenujemo prvi odvod, napetost med levo nogo in desno roko drugi odvod ter napetost med levo nogo in levo roko tretji odvod (slika 21.1A). Zveze med odvodi in potenciali na rokah in nogi so torej

$$\begin{aligned}U_I &= \varphi_{LR} - \varphi_{DR}, \\U_{II} &= \varphi_{LN} - \varphi_{DR}, \\U_{III} &= \varphi_{LN} - \varphi_{LR}.\end{aligned}\tag{21.1}$$

Ker tri elektrode pri standardnih bipolarnih odvodih tvorijo zaključeno zanko, ti odvodi med seboj niso neodvisni in med njimi velja zveza $U_I + U_{III} = U_{II}$, ki jo lahko enostavno izpeljemo iz zgornjih enačb.

V prejšnjem razdelku smo videli, da lahko trenutno električno aktivnost srca opišemo z vektorjem tokovnega dipola. Odvisnost standardnih odvodov od velikosti in smeri dipola si lahko nadzorno prikažemo ob predpostavki, da

¹Izraz *odvod* pri EKG ni povezan z matematičnim odvodom, temveč opisuje način namestitve in vezave elektrod. V angleškem jeziku se npr. odvod pri matematiki imenuje *derivative*, pri EKG pa *lead*.

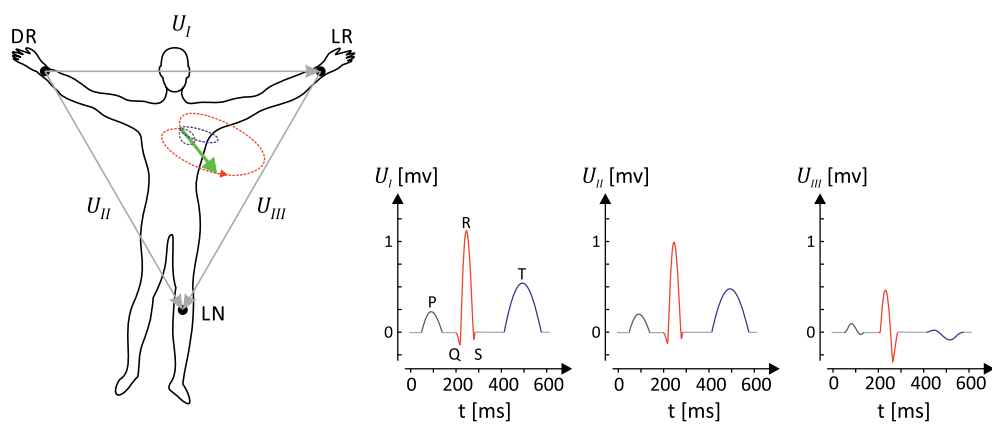


Slika 21.1: A) Pri osnovnem EKG merimo časovno spreminjanje treh napetosti med rokama in nogo, ki jih imenujemo *bipolarni standardni odvodi*: U_I je napetost med levo in desno roko, U_{II} med levo nogo in desno roko ter U_{III} med levo nogo in levo roko. Slike B, C in D prikazujejo vrednosti teh odvodov pri treh vrednostih električnega dipola v približku t. i. Einthovenovega trikotnika (dipol je v težišču, elektrode pa v ogliščih enakostraničnega trikotnika). Iz slik vidimo, da je vrednost posameznega odvoda enaka projekciji dipola na veznico med ustreznima elektrodama. A) Električni dipol kaže navzdol, zaradi česar sta roki na negativnih potencialih, noga pa na pozitivnem. Potenciala rok sta enaka, zato je $U_I = 0$ mV. B) Električni dipol ima enako velikost kot pri sliki A, obrnjen pa je v desno. C) Električni dipol srca ima še enkrat večjo vrednost kot na sliki A in je obrnjen navzdol. Vrednosti potencialov in napetosti so v primerjavi s sliko B podvojene.

so elektrode nameščene približno v oglišča enakostraničnega trikotnika s srcem v središču (slike 21.1 B, C in D, tak prikaz se po nizozemskem fiziologu imenuje *Einthovenov trikotnik*). Iz slik je lepo razvidno, da bosta v primeru, ko dipol kaže pravokotno na veznico med dvema elektrodama, elektrodi na isti ekvipotencialni črti in bo napetost med njima enaka nič. Po drugi strani bo napetost med elektrodama največja, če je dipol vzporeden veznici med elektrodama. Iz opisanega se nam izlušči preprosto pravilo, ki velja v približku Einthovenovega trikotnika: **napetost med elektrodama je sorazmerna s projekcijo dipola srca na veznico med njima**. Ob tem opazimo tudi omejitve meritve EKG na rokah in nogi: ker elektrode ležijo na frontalni ravnini telesa, tudi vrednosti odvodov predstavljajo projekcije v tej ravnini, zato celotnega 3D vektorja dipola zgolj z merjenjem na rokah in nogi ne moremo določiti. Za natančnejše določanje obnašanja depolarizacij srčne mišice v sagitalni in transverzalni ravnini je potrebno uporabiti 12-kanalni EKG, pri katerem so elektrode razporejene tudi po prsnem košu (MaFijski primer 21.1).

Oglejmo si še primer obnašanja normalnega dipola srca med enim srčnim utripom in ustrezne vrednosti standardnih bipolarnih odvodov (slika 21.2). V grobem ima normalni EKG tri odseke: najprej se depolarizirata atrija (P val), nato ventrikla (odsek QRS), na koncu pa se zazna tudi repolarizacijo ventriklov (T val). V vseh treh primerih se vektor dipola najprej poveča in nato zmanjša, vmes pa se mu spreminja tudi smer, zaradi česar vrh vektorja v vsakem intervalu opiše približno obliko elipse. Do največje električne aktivnosti pride med depolarizacijo ventriklov, zato v tej fazi dipol srca najbolj naraste in so spremembe napetosti najbolj izrazite v odseku QRS. V primeru na sliki so pri vsakem odseku največje spremembe dipola srca v smeri pravokotno na veznico med levo roko in nogo, zato sta U_I in U_{II} podobna, U_{III} pa je bistveno manjši. Signal repolarizacije atrijev je šibek in se največkrat prekriva z odsekom QRS, zato ga EKG težje zazna.

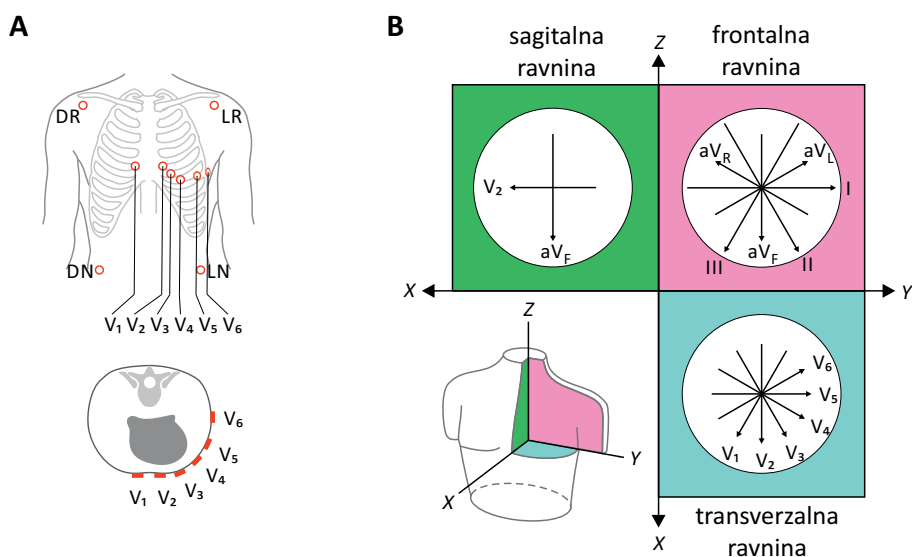
Na koncu velja opozoriti, da se lahko zaradi anatomske in funkcionalne razlike med ljudmi tudi njihovi normalni EKG do neke mere razlikujejo, spreminja pa se tudi s starostjo in fizično aktivnostjo. Poleg tega ne smemo pozabiti, da iz EKG dobimo le informacijo o električni aktivnosti srca, ki je sicer zelo povezana s njegovo mehansko aktivnostjo, vendar pa teh pojmov ne smemo kar enačiti. Izkušen zdravnik lahko na osnovi nenormalnega EKG sklepa o nepravilnosti delovanja srca, za celotno sliko njegovega delovanja in njegove zmožnosti črpanja krvi pa mora izmeriti tudi druge relevantne informacije, npr. krvni tlak in ultrazvočno sliko delovanja srca.



Slika 21.2: Shematični prikaz normalnega EKG. Leva slika prikazuje obnašanje dipola srca med enim srčnim utripom, desne slike pa ustrezne standardne bipolarne odvo-de. V enem utripu srca se njegov dipol trikrat izrazito poveča in pomanjša: prvi val ustreza depolarizaciji atrijev (P val, narisan sivo), drugi nastane zaradi depolarizacije ventriklov (QRS, narisan rdeče), tretji pa ob repolarizaciji ventriklov (T val, narisan modro). Iz relativne višine odvodov lahko razberemo, v kateri smeri se je dipol srca najbolj spreminjal — v prikazanem primeru je tretji odvod najmanjši, prva dva pa sta si podobna, zato lahko sklepamo, da je glavna os elipse QRS intervala pravokotna na veznico med ного in levo roko.

MaFijski primer 21.1: 12-kanalov za 3D EKG

S tremi standardnimi bipolarnimi odvodi lahko določimo le obnašanje dipola srca v frontalni ravnini. Sodobne EKG naprave zato največkrat merijo 12-kanalni EKG, s katerim dobimo informacijo o 3D obnašanju dipola: poleg treh standardnih bipolarnih odvodov izmerijo še 9 *unipolarnih odvodov*. Pri unipolarnih odvodih ne merimo napetosti med dvema točkama na telesu ampak napetost med eno točko na telesu in nekim standardnim potencialom (standardni potencial je ponavadi kar povprečje potencialov rok in noge). Trije od unipolarnih odvodov so ponavadi t. i. *ojačani unipolarni odvodi* rok in leve noge (označimo jih z angleškimi okrajšavami aV_R , aV_L in aV_F – ojačan = augmented), šest pa je prekordialnih in imajo elektrode razporejene po prsnem košu (označimo jih z V_1 do V_6 , slika A). S prekordialnimi odvodi lahko bolje analiziramo nekatere detajle v električnem obnašanju srca, predvsem pa tudi usmerjenost dipola srca pravokotno na frontalno ravnino, česar z odvodi na rokah in nogi ne moremo. Za meritev 12-kanalnega EKG namestimo skupaj deset elektrod: elektrode za standardne bipolarne odvode namestimo na začetek okončin (pri tem uporabimo tudi elektrodo za desno nogo, ki služi za meritev referenčne napetosti), šest elektrod pa na prsni koš. S pomočjo teh elektrod lahko izmerimo vseh 12 odvodov (I , II , III , aV_R , aV_L , aV_F , V_1 , V_2 , V_3 , V_4 , V_5 , V_6).



Unipolarni odvodi so definirani tako, da merijo projekcije vektorja dipola srca na veznico med središčem trikotnika in izbrano elektrodo. Unipolarne odvode rok in noge je tako mogoče izraziti s standardnimi bipolarnimi odvodi in so kar srednje vrednosti sosednjih standardnih bipolarnih odvodov. Unipolarni odvod noge je npr. definiran kot

$$U_{aV_F} = \varphi_{LN} - \frac{(\varphi_{DR} + \varphi_{LR})}{2} = \frac{1}{2}(U_{II} + U_{III})$$

Preprosto geometrijsko predstavo EKG z Einthovenovim trikotnikom lahko sedaj do-

polnimo. Videli smo, da so standardni bipolarni odvodi sorazmerni s projekcijami dipola na veznice med dvema ustreznimi elektrodami, ki ležijo na stranicah trikotnika. Podobno si lahko predstavljamo, da so unipolarni odvodi sorazmerni s projekcijami dipola na veznice med središčem srca in ustrezno unipolarno elektrodo. Ojačani unipolarni odvodi so tako sorazmerni s projekcijami na višine trikotnika v smeri okončin, prekordialni odvodi pa merijo velikost dipola v smeri od središča srca do posamezne prekordialne elektrode (slika B).

Zavedati se moramo, da je razumevanje EKG preko Enthovenovega trikotnika sicer zelo nazorno, a je kljub vsemu le približek in vseh detajlov z njim ne moremo razložiti (približkov je pravzaprav veliko: da je mogoče trenutno električno aktivnost srca opisati z dipolno sliko, da je središče električne aktivnosti srca vedno na sredini med elektrodami, da je telo homogena snov ...). Po preprosti sliki bi moral biti npr. odvod I sorazmeren z odvodom V_5 , saj sta smeri obeh odvodov vzporedni, a v praksi ni povsem tako.

Poglavje 22

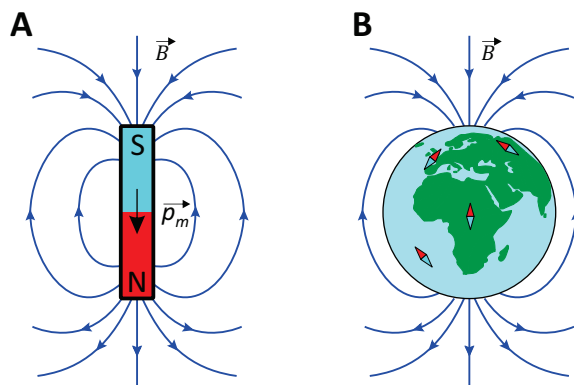
Magnetizem

V vsakdanjem življenju imamo z magnetizmom največ izkušenj preko različnih trajnih magnetov, npr. s kompasom, ki nam kaže smer proti severu, ali pa z magneti, ki jih pritrdimo na hladilnik v kuhinji. V tem poglavju bomo poleg tega spoznali, da so magnetni pojavi tesno povezani z električnimi ter da imajo veliko uporabno vrednost v medicini.

22.1 Magnetno polje

Pri obravnavanju električnih pojavov smo spoznali, da električna sila med električnimi naboji deluje »na daljavo« in jo lahko zato elegantno opišemo s pojmom električnega polja. Tudi magneti se med seboj odbijajo in privlačijo »na daljavo«, zato bomo lahko tudi magnetne pojave opisovali s pomočjo polja. Količino, ki opisuje kako močno je magnetno polje, imenujemo *gostota magnetnega polja* in jo označimo z $\vec{B}$, enota za gostoto magnetnega polja pa se po Nikoli Tesla imenuje tesla, T. Občutek za to količino lahko dobimo iz podatkov, da se velikost gostote magnetnega polja na Zemlji giblje v intervalu od $25 \mu\text{T}$ do $60 \mu\text{T}$ (v Sloveniji je približno $48 \mu\text{T}$), v napravah za slikanje z magnetno resonanco pa je polje veliko nekaj T. Enota tesla je z električnim enotami povezana preko zvez $\text{T} = \text{Vs}/\text{m}^2 = \text{N}/\text{Am}$.

Električno in magnetno polje sta med seboj tesno povezana, vendar pa je med njima tudi pomembna razlika: izvori električnega polja so točkasti električni naboji, pri magnetizmu pa točkastih izvorov magnetnega polja ne poznamo. Za vse trajne magnete velja, da polje na eni strani magneta izvira, na drugi pa ponika. Magneti so torej dipolni izvor magnetnega polja (slika 22.1A), pri katerem imajo silnice enako obliko, kot smo jo srečali pri električ-



Slika 22.1: A) Izvori magnetnega polja imajo vedno dva pola, točkastih izvorov pa ne poznamo. Magnetno polje trajnega magneta ima dipolno obliko: izvira na t. i. severnem magnetnem polu magneta (severni pol je označen z N, north) in ponika na južnem (S, south). Analogno električnemu dipolu, tudi magnetni dipol opišemo z vektorjem magnetnega dipola $\vec{p}_m$, ki kaže od južnega proti severnemu magnetnemu polu. B) Zemlja je tudi trajni magnet. Njen južni magnetni pol je na severnem geografskem tečaju, zato silnice magnetnega polja $\vec{B}$ kažejo proti severnemu geografskemu polu. Magnetne igle v kompasu zato s svojim severnim polom kažejo proti severnemu geografskemu polju zemlje ($\vec{p}_m$ igle kaže v smeri $\vec{B}$).

nem dipolu (slika 17.3). Če bi magnet prelomili na pol, bi dobili dva manjša dipolna magneta in ne izoliranih magnetnih monopolnih izvorov. Neobstoje magnetnih nabojev ima pomembno posledico: magnetno polje v snov prodira lažje od električnega, zato je dobro Faradayeva kletka za magnetno polje je zelo težko narediti (spomnimo se, da je bila za delovanje Faradayeve kletke nujna zmožnost hitrega prerazporejanja električnega naboja). Poleg tega pri magnetnem polju tudi ni efekta senčenja, ki smo ga srečali v ionskih raztopinah.

Podobno kot smo v razdelku 17.4 polarnim molekulam pripisali vektor električnega dipola $\vec{p}_e$, lahko magnetom pripišemo vektor magnetnega polja $\vec{p}_m$, ki opisuje kako močan izvor magnetnega polja je magnet in v katero smer je obrnjen. Po dogovoru vektor magnetnega dipola kaže od južnega proti severnemu polu magneta, magnetno polje pa izvira na severnem polu magneta ter ponika južnem. Magnetni dipol se v magnetnem polju obnaša podobno kot električni dipol v električnem polju – če je polje homogeno, v njem čutite navor, ki ga obrne v smer polja. Analogno enačbam za električno polje (en. 18.1) lahko torej tudi za magnetni dipol v homogenem magnetnem polju zapišemo

z vektorskim produktom

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} \quad \text{oz.} \quad M = p_m B \sin \alpha, \quad (22.1)$$

kjer je α kot med magnetnim dipolom in smerjo gostote magnetnega polja. Zaradi navora se magneti v magnetnem polju torej obrnejo tako, da njihov severni pol kaže v smeri gostote magnetnega polja (v ravnovesju $\vec{p}_m$ kaže v smer $\vec{B}$). Magnetni severni pol Zemlje je tako na južnem geografskem polu, igla kompasa pa s svojim severnim polom kaže proti severnemu geografskemu polu (slika 22.1 B).

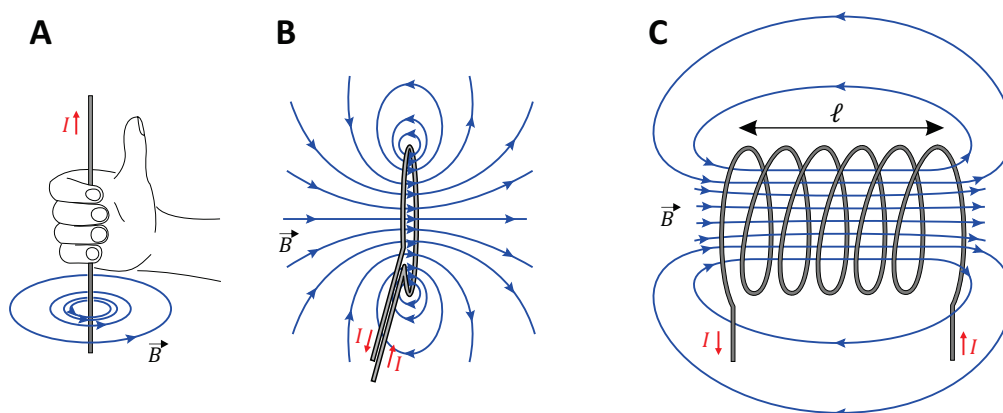
22.2 Izvor magnetnega polja je tudi električni tok

V poskusih z elektriko so kmalu ugotovili, da trajni magneti niso edini izvor magnetnega polja. Izkazalo se je namreč, da lahko magnetno polje ustvarimo tudi z električnim tokom in da se okoli dolge ravne žice, po kateri teče električni tok, ustvarijo vrtinci magnetnega polja (slika 22.2A). Pri tem gostota magnetnega polja pada obratno sorazmerno z oddaljenostjo od žice. Velja

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (22.2)$$

kjer je I električni tok v žici, r je oddaljenost od žice, μ_0 pa je *indukcijska konstanta*, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$. Smer silnic magnetnega polja lahko določimo s t. i. Oerstedovim pravilom: če palec desne roke usmerimo v smer toka, prsti kažejo v smer magnetnega polja. Zgornja zveza je eden od zapisov *Amperovega zakona*, ki je eden od osnovnih zakonov elektromagnetizma in opisuje nastanek magnetnega polja z električnim tokom.

V poglavju o elektriki smo spoznali, da med delovanjem živcev in mišic po naših telesih neprestano tečejo majhni električni tokovi. Zaradi Amperovega zakona so vsi ti tokovi tudi izvori magnetnih polj, ki jih lahko zaznamo na površini telesa. Ker pa so ta magnetna polja izjemno majhna (reda velikosti pT in manj), za njihovo detekcijo potrebujemo izjemno natančne detektorje, ki niso poceni. V medicini se zato naravni magnetizem telesa uporablja v glavnem le pri analizi delovanja možganov z metodo *magnetoencefalografijo* - MEG (primer 22.1). Za analizo električnih signalov v telesu so tako mnogo dostopnejše in zato tudi bolj razširjene elektrofiziološke metode, ki smo jih spoznali v prejšnjih poglavjih (EKG, EMG, EEG).

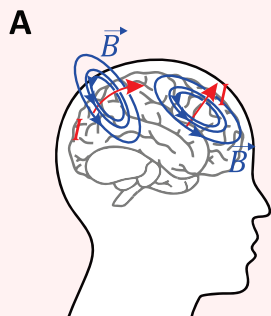


Slika 22.2: Električni tok je izvor magnetnega polja. A) V okolici dolge ravne žice, po kateri teče električni tok, se vzpostavijo vrtinci magnetnega polja. Smer vrtincev lahko določimo po naslednjem pravilu: če s palcem desne roke kažemo v smer električnega toka, nam prsti kažejo v smer magnetnega polja. B) Če žico navijemo v zanko, se prispevki posameznih kratkih odsekov žice seštevajo in zanka ustvarja dipolno obliko magnetnega polja. C) Če zaporedoma navijemo več zank, dobimo tuljavo, ki je uporaben elektromagnet, saj lahko njegovo jakost uravnavamo z električnim tokom.

Primer 22.1: MEG – magnetoencefalografija

V primeru 20.2 smo predstavili elektrofiziološke metode EKG, EEG in EMG, s katerimi lahko analiziramo električno aktivnost srca, možganov in skeletnih mišic oz. živcev. Po Amperovem zakonu (en. 22.2, slika 22.2A) je vsak električni tok tudi izvor magnetnega polja, zato se ob vsaki električni aktivnosti v telesu na njegovi površini pojavi tudi magnetno polje. V praksi ta pojav najpogosteje uporabljamo pri analizi delovanja možganov, z metodo imenovano magnetoencefalografija, MEG.

Slika A shematično prikazuje nastanek magnetnega polja zaradi električnih tokov v možganih. Vidimo, da največje magnetno polje na površini glave ustvarjajo tangencialni tokovi, radialne električne tokove v možganih pa z metodo MEG težje zaznavamo. V primerjavi z EEG lahko MEG zazna tudi znotrajcelične električne tokove, v obeh primerih pa lahko tokove zaznamo le, če je hkrati aktivnih zelo veliko nevronov (vsaj nekaj 1000).



Detektorje magnetnega polja po površini glave razporedimo podobno kot pri EEG, pri čemer tudi tu velja, da čim več detektorjev razporedimo po glavi, tem bolj natančno sliko možganske aktivnosti dobimo. Sodobne naprave za MEG uporabljajo tudi več kot 100 detektorjev. Ker električna aktivnost v možganih ustvarja le zelo šibko magnetno polje (reda velikosti pT in manj), moramo za detekcijo magnetnega polja uporabiti izjemno natančne detektorje. Po navadi uporabljamo t. i. SQUID detektorje (superconducting quantum unit interference device), ki morajo biti ohlajeni na nekaj stopinj K. Zaradi tega so naprave za MEG velike in drage (slika B).

Ocenimo še, kako velik električni tok v možganih povzroči nastanek magnetnega polja z gostoto 1 pT na površini glave! Če predpostavimo, da tok v glavi nastanejo v globini 4 cm, lahko s pomočjo Amperovega zakona izračunamo

$$I = \frac{2\pi r B}{\mu_0} = \frac{2\pi \cdot 0,04 \text{ m} \cdot 10^{-12} \text{ Vs/m}^2}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}} = 0,2 \mu\text{A} ,$$

kar je zares zelo majhen tok.

Amperov zakon lahko zelo koristno uporabimo za kontrolirano ustvarjanje magnetnega polja. Pri tem pa največkrat ne uporabljamo dolge ravne žice, ampak žico raje zavijemo v zanko, saj s tem dobimo dipolni izvor magnetnega polja (slika 22.2B). Če potrebujemo še močnejše polje, lahko žico navijemo večkrat in s tem naredimo *tuljavo* (slika 22.2C). Natančnejši račun pokaže, da je gostota magnetnega polja v notranjosti tuljave homogena (ni odvisna od oddaljenosti od žic) ter sorazmerna toku I , ki teče skozi tuljavo, in številu navojev N , ki jih navijemo na enoto dolžine tuljave ℓ :

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\ell} . \quad (22.3)$$

Tuljava je zelo uporaben izvor magnetnega polja, saj lahko pri njej gostoto

magnetnega polja enostavno uravnavamo s spreminjanjem električnega toka. Tuljavo, ki jo uporabimo kot izvor magnetnega polja, imenujemo tudi *elektromagnet* (tuljave imajo poleg tega v elektromagnetizmu tudi še druge uporabne lastnosti). Glavna omejitev pri uporabi tuljav za ustvarjanje magnetnega polja je električna upornost žic – če namreč po žici spustimo prevelik tok, se bo žica zaradi svojega upora preveč segrela in lahko celo stalila (primer 22.2). Za doseganje velikih magnetnih polj, ki jih potrebujemo v napravah za slikanje z magnetno resonanco, moramo zato uporabiti superprevodne tuljave, ki imajo praktično zanemarljiv električni upor, a jih je težko izdelati in vzdrževati, zaradi česar niso poceni.

Primer 22.2: tuljava za slikanje z magnetno resonanco

Ocenimo, kolikšen tok bi moral teči po tuljavi iz bakrene žice, da bi v njej ustvarili magnetno polje, ki je potrebno za slikanje z magnetno resonanco ($B \approx 1 \text{ T}$). Tuljava naj ima premer 1 m in dolžino 1 m, uporabili pa bomo žico s premerom 1 mm. Potrebni električni tok lahko izrazimo iz enačbe 22.3:

$$I = \frac{\ell B}{\mu_0 N},$$

pri čemer vidimo, da bomo za izračun potrebovali tudi število navojev žice v tuljavi. V tuljavo z dolžino $\ell = 1 \text{ m}$, lahko žico, ki je debela 1 mm, navijemo približno 1000 krat. Za tok torej dobimo rezultat:

$$I = \frac{1 \text{ m} \cdot 1 \text{ T}}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am} \cdot 1000} = 796 \text{ A}.$$

Za doseganje velikega magnetnega polja mora torej skozi tuljavo teči ogromen električni tok.

Ocenimo še, kolikšno moč bi ta tuljava trošila za ustvarjanje magnetnega polja. Če bi za tuljavo uporabili bakrene žice s specifično prevodnostjo $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ S/m}$, bi bila električna upornost celotne žice v tuljavi (spomnimo se enačbe 19.4):

$$R = \frac{x}{S\sigma} = \frac{3142 \text{ m}}{6 \cdot 10^7 (\Omega\text{m})^{-1} \cdot 7,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2} = 66 \Omega,$$

kjer smo celotno dolžino bakrene žice, navite v tuljavo, izračunali iz podatka za obseg tuljave in število navojev: $x = N \cdot 2\pi r = 1000 \cdot \pi \cdot 1 \text{ m} = 3142 \text{ m}$, površino preseka žice pa smo izračunali iz njenega radija: $S = \pi r^2 = \pi \cdot (0,5 \text{ mm})^2 = 7,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$. Čeprav se električna upornost žice v tuljavi ne zdi velika, pa je moč, ki bi bila potrebna za ustvarjanje polja enaka (enačba 19.3):

$$P = RI^2 = 66 \Omega \cdot (796 \text{ A})^2 = 42 \text{ MW},$$

kar je ogromna moč. Za vzdrževanje take moči bi potrebovali izjemno močan izvor električnega toka, poleg tega pa bi se v žici sproščala ogromno toplote, ki bi žico hitro stalila. Tuljave v napravah za slikanje z magnetno resonanco so zato izdelane iz superprevodnih materialov, ki imajo praktično zanemarljivo električno upornost.

22.3 Sila na električni naboj v magnetnem polju

Elektrika in magnetizem sta na več ravneh tesno prepletena. V prejšnjem razdelku smo videli, da premikanje električnega naboja (električni tok) ustvari magnetno polje, velja pa tudi obratno: magnetno polje lahko z magnetno silo deluje na električni naboj. V primerjavi z električno silo (en. 17.3) je magnetna sila malo bolj zapletena, saj deluje le na električno nabite delce, ki se gibljejo pravokotno na magnetno polje. Z enačbo lahko magnetno silo napišemo kot

$$\vec{F}_m = e \vec{v} \times \vec{B}, \quad (22.4)$$

kjer je e električni naboj delca, $\vec{v}$ njegova hitrost, $\vec{B}$ pa gostota magnetnega polja. V enačbi za magnetno silo je vektorski produkt hitrosti in gostote magnetnega polja, zato je velikost magnetne sile sorazmerna sinusu kota med hitrostjo in poljem $F_m = evB \sin \alpha$, njena smer pa je pravokotna tako na $\vec{v}$ kot tudi na $\vec{B}$ (spomnimo se definicije vektorskega produkta na sliki 1.5 v uvodnem poglavju). Magnetna sila torej nabitemu delcu spreminjala le smer hitrosti ne pa tudi njene velikosti. Delec, ki se giblje pravokotno na magnetno polje, bo torej v njem krožil z enakomerno hitrostjo (slika 22.3A).

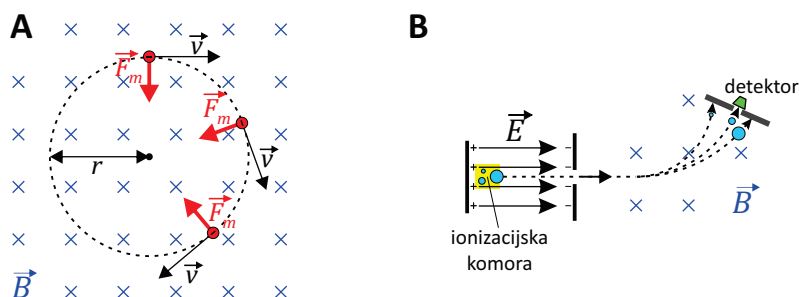
Z našim znanjem fizike lahko brez težav izračunamo radij kroženja nabitega delca v magnetnem polju: magnetna sila je namreč ravno radialna sila, ki ustvarja radialni pospešek za kroženje (enačba 2.5). Zapišemo lahko torej

$$evB = ma_r = mv^2/r. \quad (22.5)$$

Če iz zgornje enačbe izrazimo radij kroženja, dobimo

$$r = \frac{mv}{eB}. \quad (22.6)$$

Radij kroženja nabitega delca v magnetnem polju je torej odvisen od razmerja med njegovo maso in nabojem, kar s pridom izrabljamo v *masnih spektrometrih*, to je napravah, ki s katerimi lahko analiziramo molekularno sestavo vzorcev (slika 22.3B). Kroženje nabitih delcev v magnetnem polju izkoriščajo tudi v velikih pospeševalnikih, v katerih nabite delce v velikih krogih pospešujejo do velikih energij (npr. v CERNu v Švici, pa tudi v Sinhrotronu Elettra v Bazovici nad Trstom, v katerem s pomočjo sinhrotronskega sevanja preučujejo molekularno strukturo bioloških materialov).

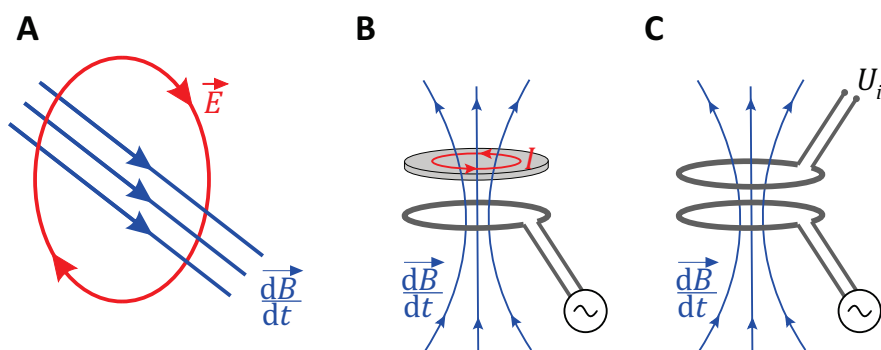


Slika 22.3: A) Shematični prikaz gibanja negativno nabitega delca v magnetnem polju (gostota magnetnega polja kaže pravokotno v površino strani). Magnetna sila na gibajoči se nabiti delec je pravokotna na hitrost (enačba 22.4), zato naboj v magnetnem polju enakomerno kroži. Smer sile določimo s pomočjo pravila za vektorski produkt (slika 1.5), upoštevati pa moramo tudi predznak naboja. B) Shematični prikaz magnetnega analizatorja v masnem spektrometru, s katerim lahko določimo molekularno sestavo vzorca. Molekule v vzorcu ioniziramo, jih pospešimo v električnem polju ter jih usmerimo skozi magnetno polje z izbrano gostoto. Radij zavijanja ioniziranih molekul v danem magnetnem polju je odvisen od razmerja med njihovo maso in nabojem (enačba 22.6), zato do detektorja pridejo le molekule z izbranim razmerjem. S spreminjanjem gostote magnetnega polja v analizatorju lahko torej določimo prisotnost različnih molekul v vzorcu oz. določimo njegov *masni spekter*.

22.4 Magnetna indukcija

Poglavje o magnetizmu zaključimo z opisom pomembnega pojava imenovanega *magnetna indukcija*, ki je nepogrešljiv za delovanje mnogih električnih naprav, srečamo pa ga tudi v medicini. Magnetno indukcijo opisuje Faradayev zakon, ki pravi, da se okoli magnetnega polja, ki se s časom spreminja, inducirajo vrtinci električnega polja. Grafično je ta zakon predstavljen na sliki 22.4A. V nadaljevanju si bomo pogledali dva primera uporabe indukcije.

Osnovni pogoj za indukcijo je magnetno polje, ki se s časom spreminja. Z našim znanjem elektromagnetizma že znamo narediti tako polje: na tuljavo priključimo izmenično napetost. Skozi tuljavo bo tako tok tekel izmenjaje v eno in v drugo smer, zaradi česar se bo tudi magnetno polje v tuljavi stalno spreminjalo in izmenjaje kazalo v eno in v drugo stran. Če ob tako tuljavo postavimo prevodno snov, bo izmenično magnetno polje v snovi induciralo vrtince električnega polja, ki bodo poganjali izmenične vrtince električnega toka (slika 22.4B). Na tak način deluje npr. indukcijska kuhalna plošča (tuljava je v kuhalni plošči, v dnu posode, ki jo postavimo na ploščo, pa nastajajo

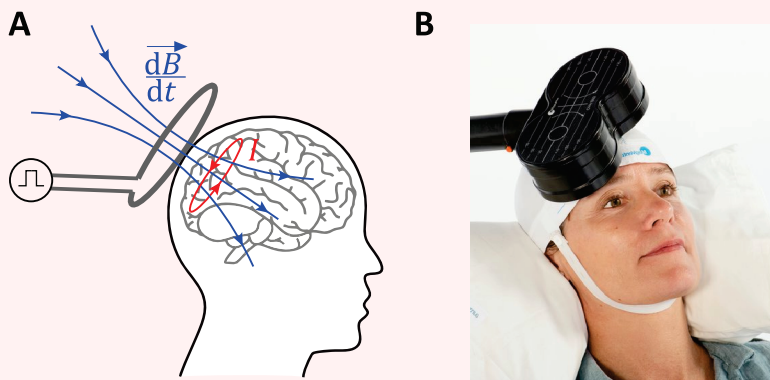


Slika 22.4: Shematični prikaz magnetne indukcije. A) Magnetna indukcija je eden od osnovnih pojavov v elektromagnetizmu: magnetno polje, ki se spreminja s časom, okoli sebe inducira nastanek vrtincev električnega polja. B) Časovno spreminjajoče magnetno polje ustvarimo s tuljavo, ki jo priključimo na izmenično napetost. Če v tako magnetno polje postavimo električni prevodnik, se v njem inducirajo vrtinci električnega toka. Ta pojav izrabljajo indukcijske kuhalne plošče, pa tudi transkraniialna magnetna stimulacija (primer 22.3). C) Če v izmenično magnetno polje postavimo sprejemno tuljavo, se v njej inducira izmenična napetost U_i . Na tak način lahko električno energijo brezžično prenesemo iz oddajne v sprejemno tuljavo.

vrtinci električnega toka, zaradi česar se dno posode segreje), v medicini pa magnetno indukcijo izkorišča transkraniialna magnetna stimulacija (TMS), pri kateri na enak način induciramo električne tokove v možganih (primer 22.3).

Primer 22.3: TMS – transkraniialna magnetna stimulacija

Izkušnje kažejo, da lahko nekatere duševne motnje zdravimo z električno stimulacijo možganov, čeprav mehanizem takega zdravljenja še ni poznan. V preteklosti se je v ta namen uporabljalo elektrokonvulzivno terapijo (t. i. elektrošoke), ki pa je zaradi svojih stranskih učinkov (in negativne slike v medijih) prišla na slab glas in se v Sloveniji ne uporablja več (v mnogih državah jo še vedno uporabljajo, saj je pri nekaterih stanjih edina učinkovita terapija).



Novejša metoda za električno stimulacijo možganov je transkranijska magnetna stimulacija, ki uporablja magnetno indukcijo in je mnogo manj invazivna od klasičnih elektrošokov. Pri tej metodi pacientu na glavo namestimo tuljavo in skozi njo spustimo sunelektrične napetosti. Tuljava za kratek čas ustvari magnetno polje, ki prodre v notranjost možganov, in ker se to polje s časom spreminja, se okoli njega inducira električni tok, ki stimulira možgane (slika A). Naprave za TMS ponavadi uporabljajo celo dve tuljavi, v katerih tok teče v nasprotnih smereh, s čimer je mogoče inducirani električni tok bolje fokusirati na določen predel možganov (slika B).

Če v spreminjajoče se magnetno polje postavimo prevodno zanko ali tuljavo, bodo inducirani vrtinci električnega polja v njej povzročili nastanek električne napetosti, ki se bo sledila spreminjanju magnetnega polja (slika 22.4C). Če magnetno polje ustvarjamo s tuljavo, priključeno na izmenično napetost, se bo tudi v sprejemni tuljavi inducirala izmenična napetost z isto frekvenco. Ker magnetno polje deluje na daljavo, tesen fizičen kontakt med oddajno in sprejemno tuljavo ni potreben, zaradi česar lahko magnetno indukcijo uporabimo za brezžičen prenos energije na daljavo (uporabne razdalje v praksi so nekaj cm). Indukcijo tako že uporabljajo nekateri prenosni telefoni za brezžično polnjenje baterije (sprejemna tuljava je v telefonu in je priključena na baterijo, oddajna tuljava pa je poseben podlogi, na katero položimo telefon), intenzivno pa se raziskuje tudi možnost uporabe te tehnologije za brezžično polnjenje baterij električnih implantantov, npr. srčnih spodbujevalnikov.

Z enačbo lahko v tuljavi inducirano napetost zapišemo kot

$$U_i = -\frac{d\phi_m}{dt} , \quad (22.7)$$

kjer je ϕ_m magnetni pretok skozi tuljavo, ki je definiran kot

$$\phi_m = N S B \cos \alpha . \quad (22.8)$$

Pri tem je N število navojev v tuljavi, S je površina preseka tuljave, B gostota magnetnega polja v tuljavi, kot α pa kot med gostoto magnetnega polja in osjo tuljave (magnetni pretok je največji, če je gostota magnetnega polja vzporedna osi tuljave). Iz enačbe vidimo, da se v tuljavi inducira napetost, če se s časom spreminja katera koli od zgornjih količin, ki definirajo magnetni pretok. Pri brezžičnem polnjenju baterij se s časom spreminja gostota magnetnega polja, v elektrarnah pa izmenično napetost ustvarjajo tako, da tuljavo vrtijo v statičnem magnetnem polju (ali obratno) in tako spreminjajo kot α .

Del V

Valovanje in sevanje v diagnostiki in terapiji

Poglavje 23

Valovni pojavi

V naravi srečujemo valovanja na vsakem koraku: valove na vodni gladini, zvočno valovanje (zvok in ultrazvok), elektromagnetno valovanje (vidna svetloba, radijski valovi, rentgensko sevanje ...), žarek elektronov v elektronskem mikroskopu itd. Čeprav so vsa ta valovanja na prvi pogled različna, imajo tudi veliko skupnih lastnosti, kot so npr. lom, uklon, sipanje in interferenca. Pomembna skupna lastnost je tudi, da se z valovanjem po prostoru prenaša energija, ki izvira iz njegovega izvora. Energija valovanja se lahko v snovi absorbira, zaradi česar imajo lahko valovanja vpliv na tkivo in jih lahko zaznamo s čutili ali z ustreznimi detektorji. V tem poglavju bomo najprej opisali splošne valovne pojave, ki so enaki za vse vrste valovanj, v naslednjih pa si bomo nato od bližje ogledali dve vrsti valovanja, ki sta pri medicini še posebej pomembni: to sta zvočno in elektromagnetno valovanje.

23.1 Osnovne značilnosti valovanj

Valovanje nastane, ko so deli prostora med seboj sklopljeni in se zaradi tega nihanje na enem mestu širi v okolico. Na primer: ko v vodo pade kamen, voda na mestu padca kamna zaniha gor in dol, njeno gibanje pa se zaradi interakcij med sosednjimi molekulami prenaša tudi na vodo v okolici in valovanje se razširi po vodni gladini. Podobno je pri zvočnem valovanju: nihanje izvora se prenese na okoliški zrak, ta povzroči nihanje svoje sosesčine in tako naprej. Pri tem je zanimivo, da molekule zraka ne potujejo po prostoru, ampak le nihajo okoli svojih ravnovesnih leg. Pri elektromagnetnem valovanju nihata jakost električnega polja in gostota magnetnega polja, zato se elektromagnetno valovanje lahko širi tudi po praznem prostoru (vakuumu). Ker je

z vsakim nihanjem povezana energija, se s širjenjem valovanja po prostoru prenaša energija.

Širjenja valovanja v prostor je povezano s sklopitvijo med sosednjimi deli prostora, zato je tudi hitrost širjenja valovanja c v splošnem odvisna od lastnosti prostora, tj. od snovi, po kateri se valovanje prenaša. Na primer: hitrost zvoka in hitrost svetlobe sta v zraku drugačni kot v vodi.

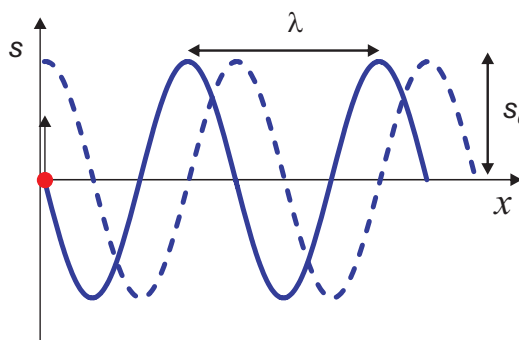
Če izvor valovanja niha sinusno, bo sinusne oblike tudi valovanje (sl. 23.1). Ko izvor opravi en nihaj, se valovanje razširi za eno valovno dolžino λ . Valovna dolžina je enaka razdalji med dvema sosednjima vrhoma ali med dvema sosednjima dolinama. Enako kot pri nihanju tudi pri valovanju velja zveza med nihajnim časom in frekvenco valovanja: $\nu = 1/t_0$. Nihajni čas nam pove trajanje enega nihaja, frekvenca pa število nihajev na časovno enoto. Enota za frekvenco je *hertz*, $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

Pot, ki jo valovanje s hitrostjo c opravi v času enega nihaja, je po eni strani enaka ct_0 , po drugi strani pa je to ravno valovna dolžina, zato velja med frekvenco, valovno dolžino in hitrostjo valovanja naslednja zveza

$$\lambda = ct_0 = c/\nu \quad \text{oziroma} \quad c = \lambda\nu. \quad (23.1)$$

Za valovanja v splošnem velja, da njihovo frekvenco določa frekvenca nihanja izvora, hitrost valovanja je odvisna od snovi, po kateri se valovanje širi, valovna dolžina pa je podana z zgornjo enačbo in je torej obratno sorazmerna frekvenci.

Slika 23.1: Shematični prikaz sinusnega valovanja. Izvor (na sliki je označen s piko) sinusno niha v navpični smeri, od njega pa se v smeri x širi valovanje. S polno črto je narisana val po dveh nihajnih časih od začetka nihanja ($t = 2t_0$, izvor se v tem trenutku giblje navzgor), s črtkano pa isti val četrto nihajnega časa kasneje ($t = 2,25t_0$). Odmik od ravnovesja označimo s s , valovno dolžino valovanja z λ , maksimalen odmik od ravnovesja (amplitudo) pa s s_0 .



Pri harmoničnem nihanju lahko časovno odvisnost odmika od ravnovesja ($s(t)$) opišemo s sinusno funkcijo. Pri sinusnem valovanju je podobno, le da je odmik od ravnovesja odvisen tudi od položaja v prostoru, $s(t, x)$. Primerjajmo enačbo za opis nihanja z enačbo za opis valovanja, ki se širi v eni dimenziji, v desno po osi x in ima konstantno amplitudo:

$$\text{Nihanje:} \quad s(t) = s_0 \sin(\omega t - \delta) . \quad (23.2)$$

$$\text{Valovanje:} \quad s(t, x) = s_0 \sin(\omega t - kx - \delta) . \quad (23.3)$$

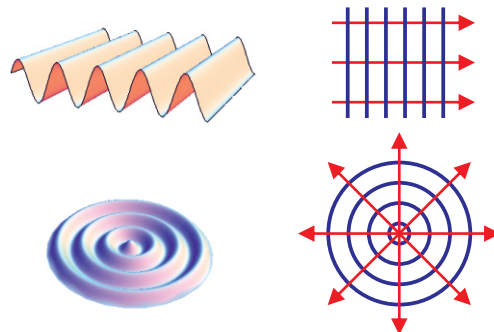
V obeh primerih je s_0 amplituda, celotno vrednost v oklepaju imenujemo *faza*, δ pa je fazni premik. Krožna frekvenca (ω) poskrbi za to, da se v času enega nihaja pri izbrani vrednosti x faza spremeni ravno za eno periodo (2π). Iz poglavja o nihanju se spomnimo, da velja $\omega = 2\pi\nu$. Pri valovanju analogno krožni frekvenci vpeljemo tudi valovni vektor (k), ki je povezan z valovno dolžino, $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ (v treh dimenzijah je k zares vektor, ki kaže v smeri širjenja valovanja), ki poskrbi za to, da se faza spremeni za eno periodo (za en val) tudi, če se ob izbranem času premaknemo po osi x za eno valovno dolžino.

Enačba 23.3 opisuje valovanje, ki potuje v desno (proti pozitivnim vrednostim x). O tem se prepričamo, če opazujemo na primer vrh vala, ki ima fazo $\pi/2$. Če naj ta vrh vala potuje v desno, se mu mora ob večanju časa t večati tudi koordinata x . Ker se mu ob tem faza ne sme spremeniti (opazujemo vrh vala z izbrano fazo), mora biti v oklepaju enačbe 23.3 pred x zato predznak minus. Valovanje, ki potuje v levo (proti negativnim vrednostim x), pa bo torej opisala enačba s pozitivnim predznakom pred k : $s(t, x) = s_0 \sin(\omega t + kx - \delta)$. Pri tej enačbi se z večanjem t faza ohranja z zmanjševanjem x .

Širjenje valovanja po prostoru si lahko najlažje ponazorimo, če narišemo *valovne fronte* ali pa *žarke* valovanja (sl. 23.2). Valovne fronte so črte, ki povezujejo dele prostora, ki nihajo v fazi, žarki pa kažejo v smeri širjenja valovanja in so pravokotni na valovne fronte. V splošnem je lahko širjenje valovanja po prostoru zelo zapleteno, pogosto pa se srečamo z dvema preprostima primeroma. O *ravnem valu* govorimo, če se valovanje širi le v eno smer in so žarki vzporedni (ravni val opisuje en. 23.3). Če pa so žarki radialno divergentni (če jih npr. oddaja točkast izvor), govorimo v dvodimenzionalnem prostoru o *krožnem valu* (valovne fronte so krožnice), v tridimenzionalnem prostoru pa o *krogelnem valu* (valovne fronte so površine krogle). Krožni val se na primer pojavi na vodni gladini po padcu kamna v vodo, krogelne valove pa oddaja vsako točkasto svetilo, ki sveti v prostor.

Pregled osnovnih valovnih pojmov zaključimo z razčlenitvijo vrst valovanj glede na smer nihanja. Valovanju, pri katerem je nihanje pravokotno na smer

Slika 23.2: Shematični prikaz ravnega vala (zgoraj) in krožnega vala (spodaj). Desno so narisani ustrezni žarki in valovne fronte. Žarki kažejo v smer širjenja valovanja, valovne fronte pa so pravokotne glede na žarke.



valovanja, pravimo *transverzalno* valovanje, če pa je smer nihanja enaka smeri širjenja valovanja, je valovanje *longitudinalno*. V splošnem se lahko smer nihanja pri transverzalnem valovanju neprestano spreminja, če pa je smer nihanja vseskozi dobro definirana, pravimo, da je valovanje *polarizirano*. V nadaljevanju bomo spoznali, da je zvočno valovanje longitudinalno, saj molekule zraka pri njem nihajo v smeri širjenja valovanja, elektromagnetno valovanje pa je transverzalno, saj jakost električnega in gostota magnetnega polja nihata v smeri, ki je pravokotna na smer širjenja valovanja.

23.2 Energija valovanja

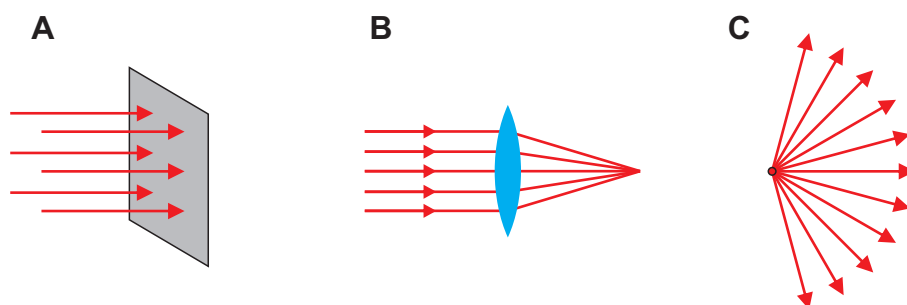
Vsa energija, ki jo valovanje nosi po prostoru, prihaja iz njegovega izvora. *Energijski tok* valovanja je tako kar enak moči, ki jo oddaja izvor. Na primer: 10 W žarnica vsako sekundo odda 10 J energije, zato bo tudi celotni energijski tok oddanega elektromagnetnega valovanja enak 10 W. Ponavadi tako moč kot tudi energijski tok označimo kar z enakim simbolom P . Podobno kot pri ostalih vrstah tokov (masnem, difuzijskem, toplotnem ...) tudi energijskemu toku pripišemo *gostoto energijskega toka*

$$j = \frac{P}{S}, \quad (23.4)$$

ki pove, koliko energije pride na časovno enoto skozi površino, ki je pravokotna na smer širjenja valovanja (sl. 23.3A). Enota za gostoto energijskega toka je W/m^2 . Če površina ni pravokotna na smer širjenja valovanja, moramo pri računu gostote toka skozi površino upoštevati še kot med površino in smerjo

žarkov. Smer žarkov glede na površino ponavadi definiramo s kotom glede na pravokotnico na površino (α), zato se zveza med j in P v splošnem zapiše kot $j = \cos \alpha P/S$. To formulo lahko preverimo s preprostim miselnim poskusom: če so žarki vzporedni površini ($\alpha = 90^\circ$), je gostota energijskega toka skozi površino očitno enaka 0, kar se ujema s formulo, saj je $\cos(90^\circ) = 0$.

Vsi učinki valovanja so neposredno povezani z njegovo energijo. Tako sta na primer od gostote energijskega toka odvisni glasnost zvoka in jakost svetlobe, ki ju zaznavamo. Tudi svetli deli na rentgenski sliki se od temnih ločijo ravno po tem, da so bili svetli osvetljeni z manjšo gostoto energijskega toka rentgenskih žarkov kot temni (in so zato na filmu povzročili šibkejšo kemijsko reakcijo). Gostota energijskega toka je torej zelo pomemben parameter valovanja, zato je v medicini nujno dobro poznavanje dejavnikov, ki nanjo vplivajo. V tem razdelku bomo spoznali najosnovnejša dejavnika, zaradi katerih se valovanju spreminja gostota energijskega toka, to sta konvergenca oz. divergenca žarkov in pa zmanjševanje gostote energijskega toka zaradi absorpcije, kasneje pa še kako na gostoto energijskega toka vplivajo ostali valovni pojavi.



Slika 23.3: (A) Gostota energijskega toka (j) opisuje, koliko energije pride na časovno enoto skozi določeno pravokotno površino. Če ni izgub energije zaradi absorpcije, si lahko gostoto energijskega toka nazorno predstavljamo z gostoto žarkov na sliki. (B) Če so žarki konvergentni (npr. ko jih zberemo z lečo), se gostota energijskega toka povečuje. (C) Če so žarki divergentni (npr. pri izvoru, ki valovanje oddaja na vse strani okoli sebe), gostota energijskega toka z razdaljo od izvora pada.

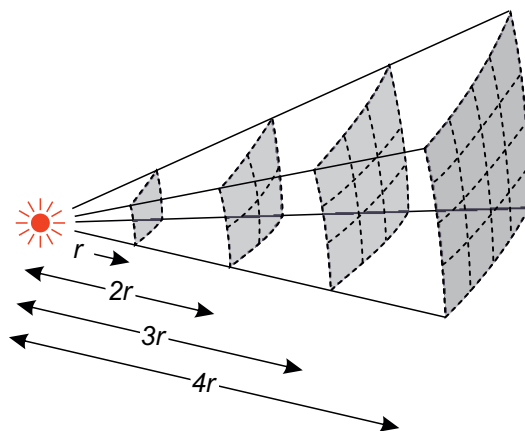
Med potovanjem valovanja skozi prostor se lahko gostota energijskega toka spreminja zaradi konvergence oz. divergence žarkov. Kvalitativno si spreminjanje gostote energijskega toka najbolje predstavljamo s pomočjo gostote žarkov na sliki. Če so žarki vzporedni (npr. pri ravnem valu oz. pri laserju), je njihova gostota vseskozi enaka, zato se tudi gostota energijskega toka z razdaljo ne spreminja. Če so žarki konvergentni (npr. če jih zberemo z lečo, sl. 23.3B), se gostota energijskega toka z razdaljo povečuje, če pa so žarki

divergentni (npr. če izvor oddaja valovanje na vse strani oz. pri krogelnem valovanju, sl. 23.3C), gostota energijskega toka z razdaljo pada.

Kvantitativno lahko gostoto energijskega toka izračunamo, če znamo določiti površino, skozi katero potuje valovanje z določenim energijskim tokom. Na primer: če se valovanje iz točkastega izvora širi v prostor, so žarki z oddaljevanjem od izvora vse bolj redki, saj prebadajo vse večje površine (sl. 23.4). Če se valovanje širi na vse strani od izvora, žarki prebadajo kar površine krogel s središčem v izvoru, ki imajo površino $S = 4\pi r^2$. Če ni absorpcije, je celotni energijski tok vseskozi enak, zato lahko gostoto energijskega toka izračunamo kot

$$j = \frac{P}{4\pi r^2}, \quad (23.5)$$

kjer je P moč izvora oziroma celoten energijski tok, ki ga oddaja izvor. Podoben razmislek nam pove, da gostota energijskega toka pada s kvadratom razdalje, $j \propto 1/r^2$, tudi v primeru, ko se krogelno valovanje ne širi na vse strani in torej osvetljuje le del površine krogle okoli sebe.



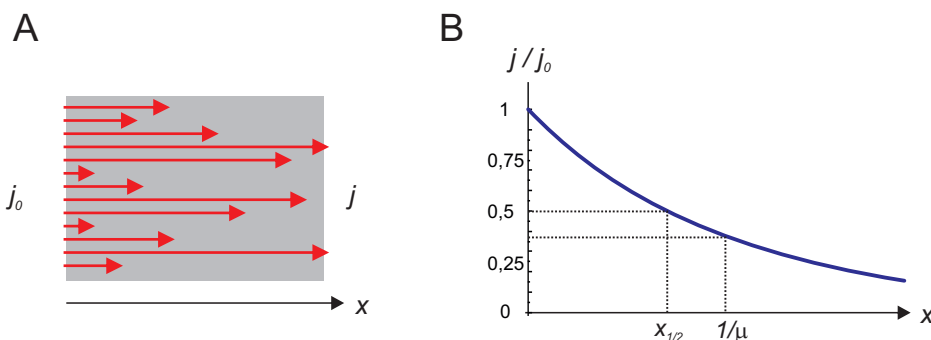
Slika 23.4: Ko točkasti izvor valovanje oddaja na vse strani, se površina, skozi katero potujejo žarki, veča s kvadratom oddaljenosti od izvora. Gostota energijskega toka valovanja zato pada s kvadratom oddaljenosti od izvora.

Na zmanjševanje gostote energijskega toka lahko vpliva tudi *absorpcija*, saj se lahko pri potovanju valovanja skozi snov del energije valovanja absorbira v snovi. Pogosto velja, da se na določeni razdalji vedno absorbira enak *delež* energijskega toka, ne glede na njegovo začetno velikost. Če na primer skozi 1 cm snovi pride ena četrtnina energijskega toka, bo skozi naslednji 1 cm spet

prišla ena četrtnina preostalega. Skozi 2 cm snovi tako pride ena šestnajstina vstopnega energijskega toka. S formulo lahko tako obnašanje lepo opišemo s pomočjo eksponentne funkcije, pri čemer lahko uporabimo različne osnove (primer 1.6):

$$j = j_0 e^{-\mu x} = j_0 2^{-x/x_{1/2}}. \quad (23.6)$$

Konstanta μ v zapisu z naravno osnovo se imenuje *absorpcijski koeficient*, konstanta $x_{1/2}$ pa *razpolovna debelina*, saj je to debelina, v kateri se absorbira ravno polovica vpadnega energijskega toka. Zvezo med obema konstantama smo izračunali že v primeru 1.6 – spomnimo se, da velja $x_{1/2} = \ln 2 / \mu$. Večja kot je absorpcija v neki snovi, večji je absorpcijski koeficient in krajša je razpolovna debelina. Spomnimo se tudi, da sta oba zgornja zapisa absorpcije ekvivalentna, včasih nam bolj prav pride prvi, včasih pa drugi. Račun absorpcije rentgenskih žarkov je predstavljen v primeru 23.1.

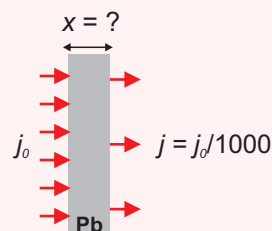


Slika 23.5: A) Shematični prikaz absorpcije valovanja v snovi. Če si gostoto energijskega toka predstavljamo z gostoto žarkov, lahko absorpcijo ponazorimo z naključnim izgubljanjem žarkov v snovi – ko žarek izgine, preda svojo energijo molekulam v snovi. B) Zaradi absorpcije se na določeni razdalji vedno absorbira enak delež gostote energijskega toka, zaradi česar se gostota energijskega toka eksponentno zmanjšuje s prepotovano potjo v snovi x . Po prepotovani dolžini, ki je enaka razpolovni debelini $x_{1/2}$, se gostota energijskega toka prepolovi, pri dolžini, ki je enaka obratni vrednosti absorpcijskega koeficienta μ , pa se zmanjša za faktor $1/e \approx 0,37$ (en. 23.6).

Primer 23.1: razpolovna debelina za rentgenske žarke v svincu

Rentgenski žarki so ionizirajoče sevanje in so škodljivi za zdravje. Pri uporabi rentgenskih žarkov se moramo zato ustrezno zaščititi, pri čemer lahko kot najbolj enostavno zaščito uporabimo kar zaslon iz svinca, ki rentgenske žarke dobro absorbira. Absorpcija rentgenskih žarkov v svincu je sicer odvisna od valovne dolžine: za žarke, ki se uporabljajo v mamografiji, je razpolovna debelina v svincu npr. približno $10\ \mu\text{m}$, za žarke, ki se uporabljajo pri CT slikanju, pa je razpolovna debelina v svincu nekaj večja kot $100\ \mu\text{m}$ (več o absorpciji rentgenskih žarkov bomo spoznali kasneje v poglavju o rentgenskem slikanju).

Za vajo izračunajmo, kako debela mora biti zaščita iz svinca, da se bo v njej absorbiralo 99,9 % vpadnih rentgenskih žarkov. Račun naredimo za žarke, ki se uporabljajo pri mamografiji ($x_{1/2} = 10\ \mu\text{m}$).



Preden sežemo po kalkulatorju, se problema lotimo na pamet. Iz podatka o razpolovni debelini lahko brez razmisleka razberemo, da se v $10\ \mu\text{m}$ debeli zaščiti absorbira 50 % žarkov, 50 % pa jih pride skozi. Če je zaščita debela dve razpolovni debelini, tj. $20\ \mu\text{m}$, se v prvih $10\ \mu\text{m}$ absorbira polovico vpadnih žarkov, v drugih $10\ \mu\text{m}$ pa še polovica preostalih. Taka zaščita torej prepušča $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$ oz. 25 % žarkov, absorbira pa 75 % žarkov. Z enakim razmislekom pridemo do zaključka, da tri razpolovne debeline debela zaščita ($x = 30\ \mu\text{m}$) prepušča le še 12,5 %, absorbira pa 87,5 % žarkov. S tem smo si pridobili osnovni občutek za absorpcijo in znamo že kar na pamet zaključiti, da snov, ki je debela n razpolovnih debelin, prepušča $(\frac{1}{2})^n$ vpadnih žarkov.

Naša naloga je, da izračunamo debelino, v kateri se absorbira 99,9 %, kar pomeni, da prepušča $0,1\ \% = 1/1000$ žarkov. Iz našega znanja računalništva se spomnimo, da je $2^{10} = 1024$, iz česar lahko hitro zaključimo, da tisočino žarkov prepušča zaščita z debelino približno 10 razpolovnih debelin, oz. v našem primeru približno $100\ \mu\text{m}$ svinca.

S pomočjo kalkulatorja lahko to debelino izračunamo še bolj natančno. Ko absorpcijski zakon (en. 23.6) logaritmujemo, dobimo

$$\ln \frac{j}{j_0} = \ln 2^{-x/x_{1/2}} = -\frac{x}{x_{1/2}} \ln 2,$$

iz česar lahko brez težav izrazimo debelino x , ki prepušča $1/1000$ žarkov:

$$x = -x_{1/2} \ln \frac{j}{j_0} / \ln 2 = -10\ \mu\text{m} \ln(1/1000) / \ln 2 = 99,7\ \mu\text{m}.$$

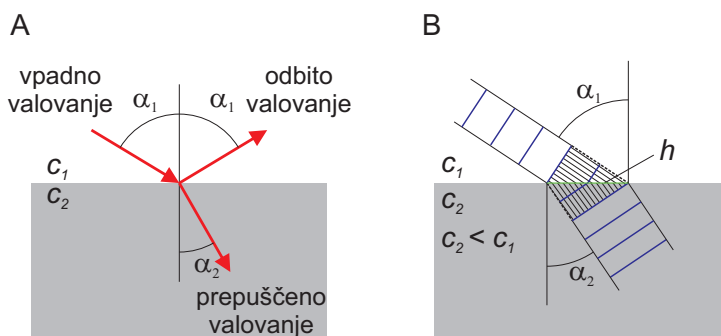
Za absorpcijo 99,9 % rentgenskih žarkov je torej potrebna plast svinca, debela le desetinko milimetra. Za primerjavo: absorpcijski koeficient rentgenskih žarkov v betonu je približno 30 krat manjši, v mehkem tkivu pa približno 300 krat manjši kot v svincu, torej je za absorpcijo 99,9 % žarkov, ki se uporabljajo za mamografijo, potrebnih približno 3 mm betona oz. 30 mm mehkega tkiva.

23.3 Odboj in lom

Ko valovanje pride na mejo med dvema snovema, se ga v splošnem en del odbije, en del pa se na meji med snovema lomi ter nadaljuje svojo pot v spremenjeni smeri. Smeri odbitega in prepuščenega valovanja določata *odbojni zakon*, ki pravi, da je odbiti kot enak vpadnemu, ter *lomni zakon* (*Snellov zakon*), ki opisuje lomni kot (sl. 23.6):

$$\frac{c_1}{\sin \alpha_1} = \frac{c_2}{\sin \alpha_2} . \quad (23.7)$$

Pri razumevanju lomnega zakona si lahko pomagamo s sliko 23.6B. Izvor valovanja v drugi snovi je valovanje, ki trči na mejo med snovema. Frekvenca valovanja je torej v obeh snoveh enaka, hitrost pa je različna. Razdalji, ki sta na sliki označeni črtkano, valovanje tako prepotuje v istem času t , dolžina ustreznih poti v prvi in drugi snovi pa je $c_1 t$ in $c_2 t$. Do lomnega zakona pridemo, ko upoštevamo, da sta črtkani črti kateti trikotnikov z isto hipotenuzo in zato velja zveza $h = c_1 t / \sin \alpha_1 = c_2 t / \sin \alpha_2$ (dolžino hipotenuze smo označili s h).



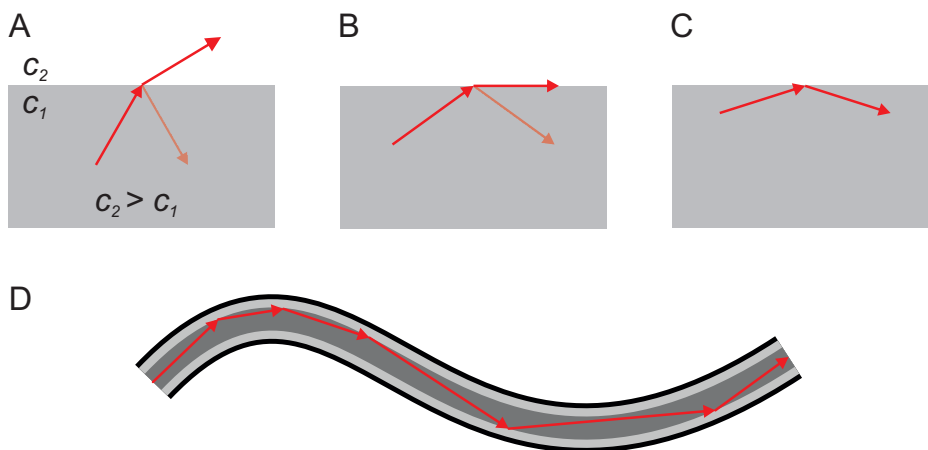
Slika 23.6: (A) Na prehodu iz ene snovi v drugo se del valovanja odbije, del pa se ga lomi. (B) Shematični prikaz valovnih front valovanja na prehodu med snovema. Valovanje ima v obeh snoveh enako frekvenco, zato valovanje v obeh snoveh razdaljo med dvema valovnimi frontama prepotuje v enakem času. Osenčena trikotnika z črtkastima katetama imata zato isto hipotenuzo (njena dolžina je h).

Vidimo, da se pri prehodu v snov, kjer je hitrost širjenja manjša, valovanje lomi proti pravokotnici ter obratno. Pri velikem vpadnem kotu pri prehodu v snov, v kateri je hitrost večja, lahko zato pride do *totalnega odboja*, saj lomni kot ne more biti večji od 90° , oz. sinus lomnega kota ne more biti večji kot 1 (sl.

23.7). Totalni odboj opazimo na primer pri potapljanju v vodi, ko pogledamo poševno navzgor proti gladini — gladina vode v tem primeru deluje kot zrcalo. Ko v enačbo 23.7 vstavimo pogoj za največji možni lomni kot ($\sin \alpha_{2m} = 1$), dobimo mejni vpadni kot, pri katerem se pojavi totalni odboj:

$$\sin \alpha_{1m} = \frac{c_1}{c_2} . \quad (23.8)$$

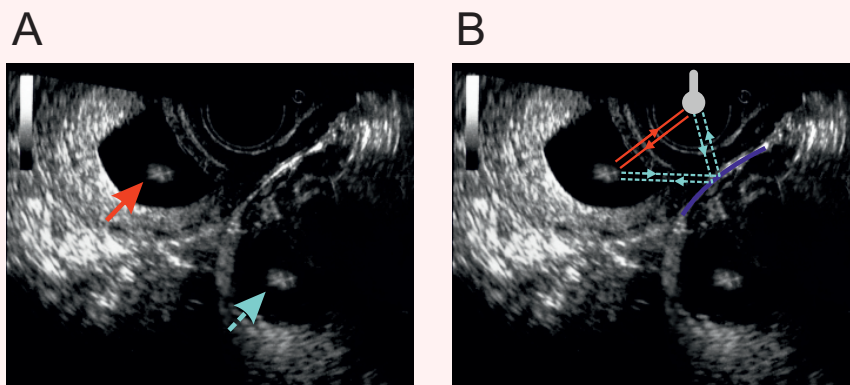
V praksi pojav totalnega odboja izkoriščamo pri *valovnem vodniku*, po katerem lahko valovanje potuje po zavitih poteh. Valovne vodnike za svetlobo imenujemo *optična vlakna*. Sestavljena so iz prozorne sredice in plašča, pri čemer pa je hitrost svetlobe večja v plašču kot v sredici. Svetloba, ki potuje vzdolžno po sredici, se na meji s plaščem odbije nazaj in sredice ne more zapustiti. Ker so optična vlakna upogljiva, lahko z njihovo pomočjo svetlobo usmerjamo po poljubno zavitih poteh. Optična vlakna so osnovni sestavni del endoskopskih metod, ki nam omogočajo gledanje v notranjost telesa.



Slika 23.7: Shematični prikaz totalnega odboja. (A) Pri prehodu v snov, kjer je hitrost večja, se valovanje lomi stran od pravokotnice (del valovanja pa se na prehodu odbije). (B) Če vpadni kot povečujemo, bo lomni kot slej kot prej dosegel 90° . (C) Do totalnega odboja pride, če je vpadni kot prevelik in bi moral biti izstopni kot po lomnem zakonu večji kot 90° . (D) Optično vlakno je sestavljeno iz prozorne sredice in plašča, ki sta narejena tako, da je hitrost svetlobe v plašču večja kot v sredici (sredica je na sliki označena s temno sivo, plašč pa s svetlo sivo barvo). Na meji med sredico in plaščem zato pride do totalnega odboja in žarki, ki v sredico vstopajo pod ustreznim kotom, iz nje ne morejo več pobegniti.

Primer 23.2: zrcala v naših telesih in ultrazvočni artefakti

Ultrazvok je valovanje kot vsako drugo, zato tudi zanj veljajo vsi valovni zakoni. Iz mnogih primerov optičnih iluzij vemo, da se valovni pojavi z nami včasih tudi poigrajo. Na spodnji sliki je prikazan primer ultrazvočne iluzije, ki jo je povzročil odbojni zakon [14].



Na sliki A je prikazana transvaginalna ultrazvočna slika, ki prikazuje zdrav plod v maternici (rdeča puščica), na sliki pa se vidi tudi podoben plod izven maternice (modra črtkana puščica). Natančnejša analiza primera je pokazala, da je šlo pri tej sliki za t. i. *zrcalni ultrazvočni artefakt*, do katerega lahko pride zaradi odbojev ultrazvočnih žarkov na velikih zelo odbojnih površinah v telesu. Nastanek artefakta pojasni slika B. Ultrazvočna sonda (prikazana je s sivo barvo) zarodek zazna na osnovi ultrazvočnega žarka, ki se odbije od zarodka (oddani in odbiti žarek sta označena z rdečo barvo). Vendar pa sonda odboj od zarodka zazna tudi iz druge smeri, saj žarek v tisti smeri naleti na zelo odbojno površino (v tem primeru gre za steno mehurja, ki je prikazana z modro barvo), ki deluje kot zrcalo in žarkom spremeni smer (pot tega žarka je prikazana z svetlo modro barvo). Drugi zarodek na sliki je torej le zrcalna slika pravega zarodka. Nepazljivost bi v tem primeru lahko vodila do napačne diagnoze, saj lahko v redkih primerih zares pride do t. i. heterotopne nosečnosti, pri kateri je en zarodek v maternici, drugi pa izven nje. Izkušeni radiologi poleg zrcalnih poznajo še veliko drugih ultrazvočnih artefaktov, vsi pa so povezani s katerim od valovnih pojavov.

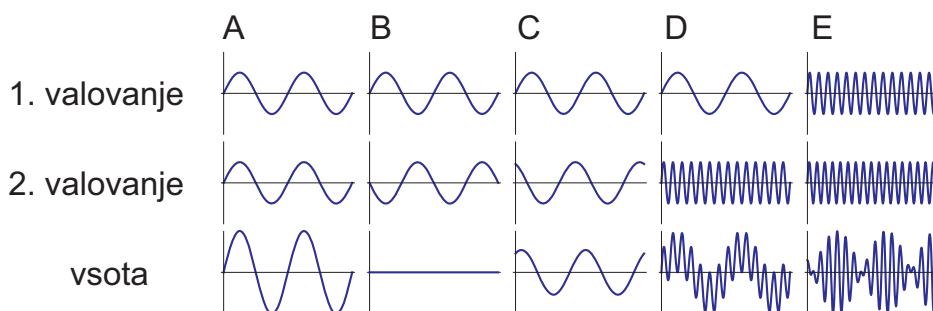
23.4 Seštevanje valovanj – interferenca

Če se v eni točki prostora srečata dve valovanj, je nihanje v tisti točki vsota nihanj obeh valovanj. Valovanja se lahko torej seštevajo, kar strokovno imenujemo *interferenca*. V splošnem je lahko rezultat interference valovanj zelo raznolik, saj se nihanja v prostoru lahko npr. ojačajo ali oslabijo, rezultat pa je odvisen od njihove amplitude, frekvence in faznega zamika. Vsi, ki so spretni

v računanju s kotnimi funkcijami, lahko rezultat interference dveh valovanj izračunajo kar kot vsoto $s(t, x) = s_1 \sin(\omega_1 t - k_1 x - \delta_1) + s_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x - \delta_2)$ (če gre za valovanji v eni dimenziji).

Slika 23.8 prikazuje nekaj primerov interference dveh valovanj v eni dimenziji. Če se seštejeta valovanji z enako frekvenco in amplitudo, je rezultat interference valovanje z nespremenjeno frekvenco, amplituda pa je odvisna od fazne razlike $\delta_1 - \delta_2$ (sl. 23.8 A, B in C). Če je faza valovanj enaka (tj. če se bodo vrhovi enega valovanja ujeli z vrhovi drugega, $\delta_1 - \delta_2 = 0$), bo rezultat interference valovanje s dvojno amplitudo (sl. 23.8A). Če se po drugi strani seštevata valovanji z nasprotno fazo ($\delta_1 - \delta_2 = \pi$), se bosta valovanji med seboj ravno odšteli (sl. 23.8B). V primeru neke vmesne fazne razlike je rezultat interference valovanje z neko vmesno amplitudo (sl. 23.8C). V splošnem torej zaradi interference dveh valovanj z enako frekvenco pride do *ojačitev* in *oslabitev* valovanja.

Zanimiva sta tudi primera, ko se seštejeta valovanji z zelo različnima frekvencama (sl. 23.8D) ter ko se seštejeta valovanji s podobnima frekvencama (sl. 23.8E). V drugem primeru (sl. 23.8E) dobimo značilno *utripanje*, saj je frekvenca končnega valovanja povprečje začetnih, hkrati pa njegova amplituda utripa s frekvenco, ki je enaka polovični razliki začetnih frekvenc (spomnimo se adicijskega izreka za seštevanje dveh sinusnih funkcij: $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$).

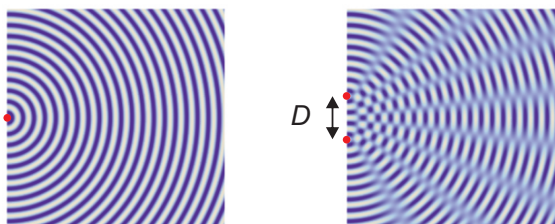


Slika 23.8: Shematični prikaz interference (seštevanja) dveh valovanj v eni dimenziji. V zgornjih dveh vrsticah sta valovanji, ki se seštevata, v spodnji pa je njuna vsota. (A) Seštevanje valovanj z enako frekvenco in enako fazo. (B) Seštevanje valovanj z enako frekvenco in nasprotno fazo. (C) Seštevanje valovanj z enako frekvenco in neko vmesno fazo. (D) Seštevanje valovanj z zelo različnima frekvencama. (E) Seštevanje valovanj s podobnima, a ne enakima frekvencama.

Zgornji primeri kažejo, da je lahko interferenca zelo raznolika že v eni dimenziji. V dveh in treh dimenzijah pa je interferenčna slika lahko še mnogo

bolj zapletena. Slika 23.9 na primer prikazuje interferenco dveh krožnih valovanj, katerih izvora sta blizu skupaj in nihata z isto frekvenco. Na sliki vidimo, da pride na veliki oddaljenosti od izvorov v nekaterih smereh do ojačitev, v drugih pa do oslabitev.

Slika 23.9: Shematični prikaz krogelnega (ali krožnega) valovanja in interference dveh takih valovanj z isto frekvenco, ki sta med seboj oddaljeni za razdaljo D . Izvora valovanj sta označena s pikama. V interferenčni sliki so značilne različne smeri ojačitev in oslabitev valovanja.



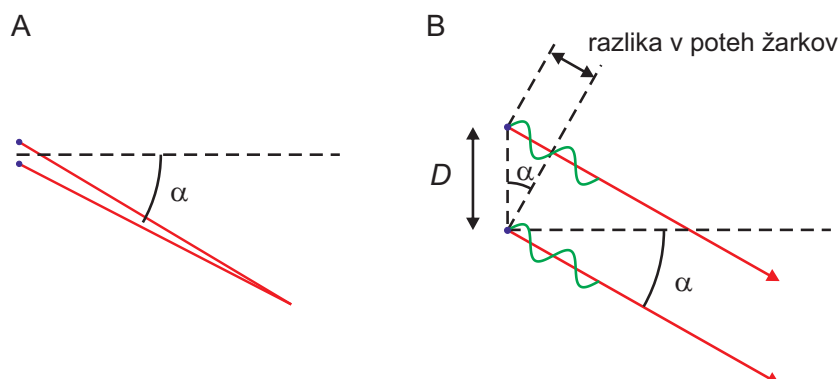
Čeprav zgornja interferenčna slika ni enostavna, pa z našim znanjem lahko določimo, v katerih smereh se bosta valovanji ojačali in v katerih izničili. Interferenca, ki jo bosta žarka iz izvorov povzročila na veliki oddaljenosti od izvorov, bo odvisna od njune fazne razlike, ta pa je odvisna od razlike dolžin poti, ki sta jih žarka prepotovala. Iz slike 23.10 razberemo, da je razlika poti žarkov v smeri α enaka $D \sin \alpha$, kjer je D razdalja med izvoroma. Če je razlika poti ravno cel večkratnik valovne dolžine, se bosta žarka v tej smeri ujela v fazi in se zato seštela, če pa je razlika poti lih večkratnik polovice valovne dolžine, se bosta žarka v tej smeri izničila. Če izvora nihata v fazi, sta pogoja za ojačitev oz. oslabitev v smeri kota α torej:

$$\text{Ojačitev: } D \sin \alpha = N\lambda \quad (23.9)$$

$$\text{Oslabitev: } D \sin \alpha = \left(N + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (23.10)$$

kjer je N celo število. Ker je lahko $\sin \alpha$ največ 1, je vseh ojačitev največ toliko, kolikokrat gre valovna dolžina v razdaljo med izvoroma, $N \leq D/\lambda$.

Valovanja, ki imajo natanko enako frekvenco in stalno fazno razliko, so med seboj *koherentna*. Časovno nespremenljivo interferenčno sliko dajo le koherentna valovanja. V praksi pa vsa valovanja iz enakih izvorov niso nujno koherentna. Ko se seštejeta dve nekoherentni valovanji, se rezultat njune interference na nekem mestu stalno spreminja in interferenčne slike pogosto ne moremo zaznati. Pri žarnici, na primer, nihanje v različnih delih žarilne nitke ni vedno v isti fazi in zato tudi krogelni valovi, ki izhajajo iz različnih točk v



Slika 23.10: (A) Žarka, ki izhajata iz dveh bližnjih izvorov, na veliki oddaljenosti potujeta praktično v isti smeri (na sliki je smer označena s kotom α), vseeno pa zgornji žarek opravi malenkost daljšo pot. Čeprav izvora nihata v fazi, ni nujno, da bosta v točki srečanja tudi valovanji nihali v fazi. Fazna razlika je odvisna od razlike prepotovanih poti. (B) Shematični prikaz razlike dolžin poti dveh žarkov iz sosednjih izvorov, ki potujeta v smeri pod kotom α . Izvora sta označena z modro piko, valovanji pa z zeleno sinusno krivuljo, izvora pa nihata v fazi. Razdalja med izvoroma je D , razlika poti žarkov pa je $D \sin \alpha$ in je torej odvisna od kota α . Če je razlika poti enaka celemu večkratniku valovne dolžine, bosta valovanji iz obeh izvorov nihali v fazi in se zato ojačili. Če pa bosta imeli valovanji nasprotno fazo, se bosta izničili. Na sliki je razlika poti žarkov ravno ena valovna dolžina.

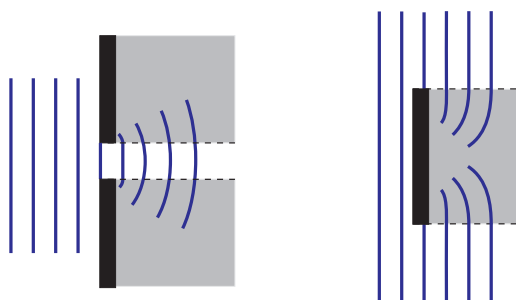
žarnici, nimajo stalne fazne razlike. Svetloba iz žarnic torej ni koherentna in ne more povzročiti interferenčne slike. Po drugi strani je laserska svetloba koherentna in jo lahko zato uporabimo pri različnih pojavih, ki so vezani na interferenco, npr. pri holografiji. Tudi zvoka iz sosednjih zvočnikov sta lahko koherentna, če le oba zvočnika oddajata isti zvok, npr. isto glasbo, ki ni stereo. V takem primeru lahko interferenčno sliko v prostoru tudi zaznamo — v nekaterih delih prostora je glasba glasnejša kot v drugih.

23.5 Uklon

Iz vsakdanjega življenja vemo, da se zvok brez težav širi tudi za vogale. Ta valovni pojav imenujemo *uklon*. Uklon bomo lažje razumeli, če se spomnimo osnovne značilnosti valovanja: valovanje se širi tako, da se nihanje v vsaki točki prostora prenaša na bližnjo okolico. Ko na primer val pride skozi odprtino v steni, se nihanje točk na robu vala širi na vse strani v prostoru in torej tudi

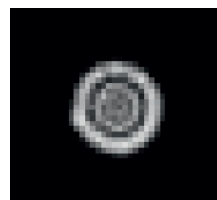
za vogal, tj. v območje geometrijske sence (sl. 23.11). Situacija je podobna tudi, ko valovanje zadane ob oviro in se nato za oviro razširi v območje njene geometrijske sence.

Slika 23.11: Shematični prikaz uklona valovanja. Ko ravni val pride do odprtine ali ovire, se na drugi strani uklanja tudi v območje geometrijske sence (na sliki je označena s sivo). Uklon si lahko nazorno predstavljamo na osnovi Huygensovega načela, po katerem je vsaka točka valovne fronte izvor krogelnega valovanja. Vsako naslednjo valovno fronto dobimo, ko seštejemo vsa ta krogelna valovanja. Na sliki smo Huygensovo načelo uporabili za konstrukcijo valovne fronte, ki je tik za odprtino.



Kvalitativno je pojav uklona torej lahko razumeti, bolj zapleteno pa je razumevanje natančnega obnašanja vala za odprtino. Ko val pride na odprtino in se nihanje pojavi v točkah odprtine, je vsaka točka v odprtini izvor krogelnega valovanja in končna oblika vala za odprtino bo rezultat interference vseh teh krogelnih valovanj. V splošnem je tako uklon tesno povezan z interferenco in je uklonska slika za odprtino ali oviro lahko zelo zapletena (sl. 23.12).

Slika 23.12: Uklonska slika, ki nastane za majhno okroglo odprtino. Na njej so vidni temni in svetli koncentrični krogi, ki so posledica interference krogelnih valovanj, ki izhajajo iz vsake točke odprtine.



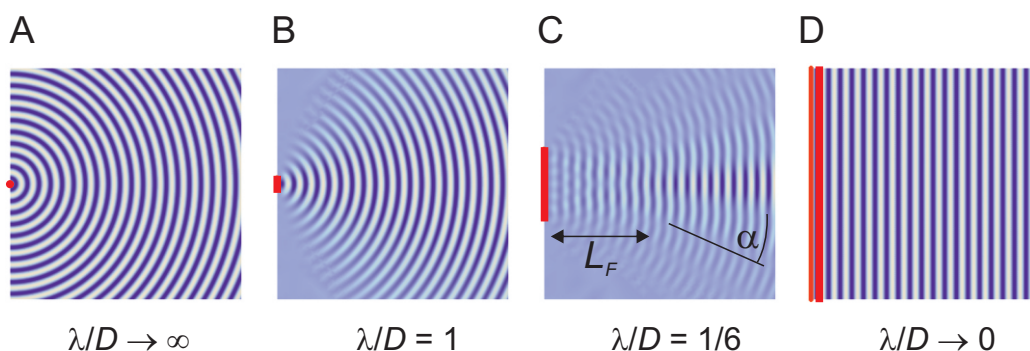
Izkaže se, da je za izrazitost uklonskih pojavov ključno razmerje med valovno dolžino in velikostjo odprtine (oz. ovire). Intuitivno si lahko predstavljamo dva skrajna primera: če je odprtina zelo majhna v primerjavi z valovno dolžino, deluje kot izvor krogelnega valovanja, če pa je odprtina zelo velika, gre valovanje skozi praktično brez uklona (sl. 23.13 A in D). V vmesnem območju, ko je velikost odprtine primerljiva z valovno dolžino, se na drugi strani

odprtine pojavi interferenčna slika, ki je lahko tudi zelo zapletena (sl. 23.13 B in C). V splošnem velja, da bo takoj za odprtino območje, kjer bo val približno raven, na veliki oddaljenosti pa se bo valovanje širilo v prostor z divergenčnim kotom α . Z analizo, ki presega obseg tega učbenika, je mogoče pokazati, da je globina bližnjega območja (imenuje se tudi *Fresnelovo območje*) za odprtino s premerom D podana z izrazom

$$L_F \approx \frac{D^2}{4\lambda}, \quad (23.11)$$

divergenčni kot v oddaljenem območju (to območje se imenuje tudi *Fraunhoferjevo območje*) pa je podan z izrazom

$$\sin \alpha \approx \frac{\lambda}{D}. \quad (23.12)$$



Slika 23.13: Shematični prikaz uklona ravnega vala na različno velikih odprtinah. Odprtine so na levi, val pa potuje proti desni. Če je odprtina zelo majhna, deluje kot točkast izvor (A) če pa je zelo velika, gre valovanje skozi brez uklona (D). V splošnem je slika za odprtino odvisna od razmerja med valovno dolžino valovanja λ in velikostjo odprtine D . Če je λ nekaj manjša od D , nastane takoj za odprtino območje, kjer je val približno raven (globina tega območja je L_F), na veliki razdalji za odprtino pa valovanje divergira z divergenčnim kotom α .

Zaradi uklona je pomembno tudi razmerje med velikostjo izvora in valovno dolžino valovanja. Če je izvor valovanja majhen v primerjavi z valovno dolžino, se bo valovanje že na izvoru močno uklanjalo in bo izvor deloval kot točkast izvor, ki valovanje oddaja na vse strani. Če si želimo valovanje usmeriti v ozek snop žarkov, potrebujemo izvor, ki je veliko večji od valovne dolžine valovanja. Uklon je torej razlog, da se zvoki iz naših ust »razlijejo« po celem

prostoru: valovna dolžina tipičnih frekvenc zvoka v zraku je namreč nekaj deset cm, kar je več od velikosti ust (primer [23.3](#)).

Za vse uklonske pojave je torej značilno, da je njihova izrazitost sorazmerna razmerju med valovno dolžino in velikostjo ovir oz. odprtin. Uklon bo velik, če je valovna dolžina velika v primerjavi z dimenzijo objekta. Na predmetih iz vsakdanjega življenja ($D \approx 10$ cm) je tako uklon zvoka ($\lambda \approx 30$ cm) velik, uklona svetlobe ($\lambda \approx 500$ nm) pa sploh ne opazimo. Zaradi uklona z valovanjem tudi ne moremo opazovati predmetov, ki so veliko manjši od valovne dolžine, saj valovanje v takem primeru predmet oblije in skoraj nemoteno potuje mimo. Uklon je torej razlog, da z vidno svetlobo ne moremo slikati npr. posameznih molekul ($\lambda \approx 500$ nm, $D \approx$ od 0.2 nm do nekaj nm), z ultrazvokom pa ne posameznih celic v telesu ($\lambda \approx 200$ μ m, $D \approx 10$ μ m).

Primer 23.3: uklon zvoka na ustih in ušesih

Za vajo izračunajmo, kolikšen je uklon zvoka, ki prihaja iz naših ust, če ima frekvenco 200 Hz (ta frekvenca približno ustreza najnižji tipični frekvenci, ki jo oddajamo med govorjenjem). Hitrost zvoka v zraku pri sobni temperaturi je $c = 343 \text{ m/s}$, zato lahko hitro izračunamo valovno dolžino

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{343 \text{ m} \cdot \text{s}}{\text{s} \cdot 200} = 1,7 \text{ m}.$$

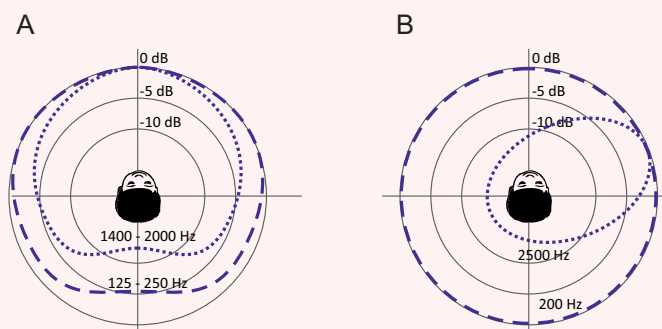
Ta valovna dolžina je večja od velikosti ust ($D \approx 5 \text{ cm}$), zato pričakujemo, da bo uklon zvoka na ustih zelo velik. Izračunajmo dolžino bližnjega območja (en. 23.11) in divergenčni kot (en. 23.12):

$$L_F \approx \frac{D^2}{4\lambda} = \frac{0,25 \text{ m}^2}{4 \cdot 1,7 \text{ m}} \approx 4 \text{ cm in}$$

$$\sin \alpha \approx \frac{\lambda}{D} = \frac{1,7 \text{ m}}{0,05 \text{ m}} = 34 \Rightarrow \alpha > 90^\circ.$$

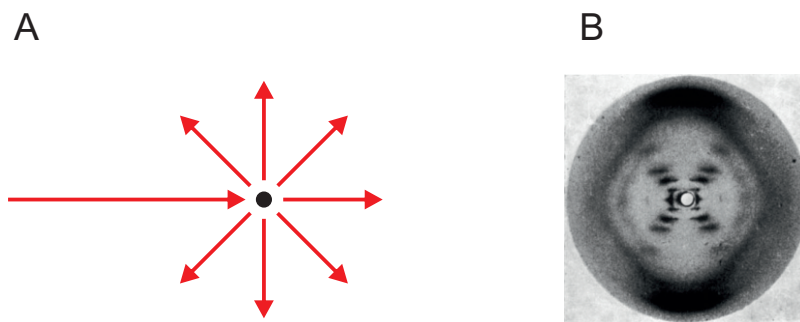
Vidimo, da se zvok s frekvenco 200 Hz iz ust zares takoj »razlije« po vsem prostoru. Če dvignemo glas, tako da se frekvenca zviša na 2000 Hz (ta frekvenca približno ustreza najvišji frekvenci, ki jo oddajamo med govorjenjem), bo uklon sicer malo manjši, a ne bistveno. Zaradi desetkrat višje frekvence bo valovna dolžina sicer desetkrat krajša ($\lambda = 0,17 \text{ m}$), a bo bližnje območje še vedno dolgo le 40 cm, divergenčni kot pa bo tudi v tem primeru več kot 90° .

Spodnja slika prikazuje dejansko izmerjeno smerno karakteristiko zvoka iz ust (A) ter smerno občutljivost desnega ušesa (B). Zvoki iz ust, ki imajo nizko frekvenco, se za nami slišijo le 5 dB šibkeje kot spredaj (enoto dB bomo podrobneje spoznali v naslednjem poglavju). Višje frekvence se uklanjajo malo manj, zato je ta razlika pri njih malenkost večja, približno 12 dB. Pri sluhu je vloga uklona še bolj izrazita, saj nizke frekvence, ki se najbolj uklanjajo, slišimo enako dobro, ne glede na to iz katere smeri prihajajo.



23.6 Sipanje

Pojav, ko valovanje interagira z delci snovi in se zaradi tega razprši na vse strani, imenujemo *sipanje* (sl. 23.14A). Sipanje je torej eden od pojavov, zaradi katerega se zmanjšuje gostota energijskega toka žarkov na poti skozi snov (podobno kot pri absorpciji, le da se pri slednji energija absorbira v snovi, pri sipanju pa se žarki le razpršijo).



Slika 23.14: (A) Shematičen prikaz sipanja na delcu snovi. (B) Interferenčna slika, nastala po sipanju rentgenskih žarkov na molekulah DNK, ki jo je posnela Rosalind Franklin. Na osnovi te slike sta Watson in Crick določila strukturo DNK.

V vsakdanjem življenju sipanje največkrat srečamo pri prehodu svetlobe skozi snov. Če je neka raztopina na pogled motna, je to najverjetneje zaradi sipanja svetlobe na delcih v raztopini. Mleko je npr. motno in belo ravno zaradi sipanja svetlobe na raztopljenih delcih (proteinskih in lipidnih skupkih oz. kapljicah). Drugi vsakdanji primer sipanja svetlobe srečamo, ko podnevi pogledamo v nebo in ne vidimo črnega vesolja in zvezd ampak modro nebo. V tem primeru namreč vidimo svetlobo s sonca, ki se siplje na molekulah v atmosferi. Ker se na majhnih delcih modra svetloba siplje bolj kot ostale, je ta sipana svetloba modrikasta (na večjih delcih, npr. na kapljicah v mleku ali oblakih, je sipanje drugačno, zato je v teh primerih sipana svetloba bele barve).

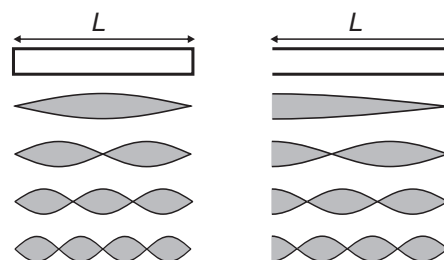
Sipanje srečamo tudi povsod v znanosti in v medicini, kjer uporabljamo valovanje. Sipanja ultrazvoka in rentgenskih žarkov v tkivu lahko povzroči manj jasne slike. Pri rentgenskem slikanju sipanje povzroča še dodatne težave, saj razpršeni žarki iz preiskovanca sevajo na vse strani in se je potrebno pred njimi dodatno zaščititi. Po drugi strani lahko sipanje izkoristimo tudi v svoj prid. Z analizo sipanja rentgenskih žarkov na atomih v snovi lahko namreč določimo njeno strukturo. Pojav je še posebej izrazit če so atomi v snovi

razporejeni periodično (npr. v kristalih), saj sipani žarki med seboj interferirajo, nastala interferenčna slika pa je odvisna od medsebojnih atomskih razdalj. Tudi znamenita Watson in Crick sta strukturo molekule DNK določila na osnovi interferenčnih slik rentgenskega sipanja na kristalu DNK, ki jih je posnela Rosalind Franklin (sl. 23.14B). Veda, ki s pomočjo rentgenskega sipanja preučuje strukturo snovi, se imenuje *kristalografija*. Brez nje si ne moremo predstavljati sodobne biologije in medicine, saj je to osnovna metoda za določanje strukture kompleksnih bioloških makromolekul, npr. proteinov.

23.7 Stoječe valovanje

V omejenih prostorih, kjer se valovanje odbija na stenah, lahko nastane *stoječe valovanje*. V takem primeru pride do interference med vpadnim in odbitim valovanjem in v prostoru nastanejo področja, kjer je amplituda nihanje velika (t. i. hrbti stoječega valovanja) in območja brez nihanja (t. i. vozli stoječega valovanja). Do stoječega valovanja pride npr. v struni na kitari, ko jo zanihamo. Stoječe valovanje si lahko nazorno predstavljamo tudi v piščali (sl. 23.15). Ko valovanje pride do konca piščali, se odbije v nasprotno smer, pri čemer vpadno in odbito valovanje interferirata. Na zaprtih koncih piščali zrak ne more nihati, zato so tam vozli stoječega valovanja. Na sliki vidimo, da nastanek stoječega valovanja ni možen za valovanja s poljubno valovno dolžino temveč le za tiste, ki imajo na zaprtem koncu piščali vozle. Če je piščal na eni strani odprta, pa je tam hrbet stoječega valovanja.

Slika 23.15: Shematični prikaz stoječega valovanja v zaprti piščali (levo) in v piščali, ki je odprta na eni strani (desno). Na mestu, kjer je piščal zaprta, je vozle stoječega valovanja, saj zrak tam ne more nihati. Na odprti strani piščali je hrbet stoječega valovanja. Piščal je torej resonator, v katerem se ojačijo osnovna frekvenca in njeni ustrezni višji harmoniki.



S pomočjo slike 23.15 izračunamo, da so v zaprti piščali možna le stoječa valovanja, pri katerih je večkratnik polovice valovne dolžine enak dolžini piščali: $N \frac{\lambda}{2} = L$, v odprtih piščalih pa mora biti izpolnjen pogoj $\frac{\lambda}{4} + N \frac{\lambda}{2} = L$.

Z uporabo zveze med valovno dolžino, frekvenco in hitrostjo valovanja lahko izračunamo tudi ustrezne frekvence:

$$\text{Zaprta piščal: } \nu = \frac{c}{2L}N, \quad (23.13)$$

$$\text{Odprta piščal: } \nu = \frac{c}{2L}\left(N + \frac{1}{2}\right). \quad (23.14)$$

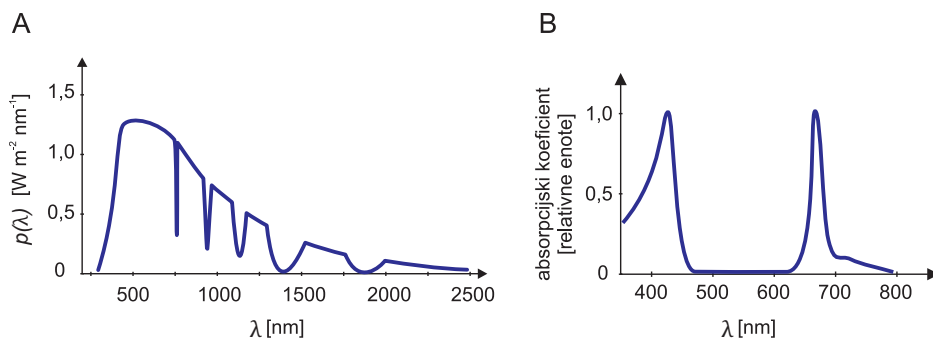
Do stoječega valovanja lahko torej pride le pri določenih frekvencah, pri t. i. *lastnih oz. resonančnih* frekvencah.

Podobno kot piščal ima vsak omejen prostor svoje lastne frekvence, ki so odvisne od njegove velikosti in oblike. Valovanja z ustreznimi frekvencami se lahko v takem prostoru ojačijo, tista s drugačnimi pa ne, zato tak prostor imenujemo tudi *resonator*. Akustična resonatorja sta npr. tudi govorni trakt (sapnik, usta z jezikom ...) in uho (več o tem v nadaljevanju). Pri glasbenem inštrumentu kot resonator deluje trup inštrumenta (npr. pri violini ali klavirju), stoječe valovanje pa nastane tudi v struna inštrumenta in v stenah trupa. Poleg akustičnih resonatorjev poznamo tudi elektromagnetne, v katerih se lahko ojači elektromagnetno valovanje.

23.8 Spekter

Valovanja pogosto nimajo le ene same frekvence temveč so vsota valovanj z različnimi frekvencami. Ko na primer zaigramo določen ton na glasbenem inštrumentu, so v zvoku inštrumenta poleg osnovne frekvence tona tudi višje frekvence, ki dajo zvoku inštrumenta njihovo značilno barvo oz. *zven* (zvoki različnih inštrumentov se med seboj ločijo ravno po teh višjih frekvencah, saj je osnovna frekvenca določenega tona pri vseh inštrumentih vedno enaka). Tudi sončna svetloba je sestavljena iz mnogih frekvenc oz. valovnih dolžin (barv), ki jih razločimo, ko jo razklonimo v mavrico. Informacijo o frekvencah, ki so prisotne v določenem valovanju, lahko razberemo iz *spektra valovanja*, tj. porazdelitve gostote energijskega toka valovanja po različnih frekvencah in ga označimo z $p(\nu)$. Ker je frekvenca tesno povezana z valovno dolžino, lahko spekter seveda prikažemo tudi kot $p(\lambda)$. Kot primer je na sliki 23.16A prikazan spekter sončne svetlobe, ki pade na površino zemlje.

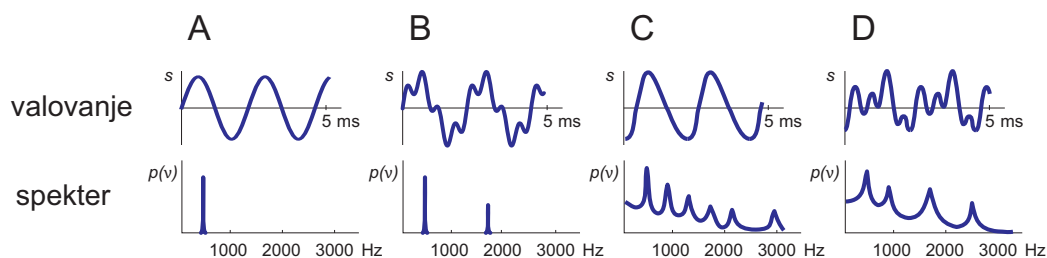
Slika 23.17 prikazuje nekaj primerov spektrov zvoka. Levo na sliki je prikazan zvok čistega tona A_4 , v katerem je le frekvenca 440 Hz, kakršnega lahko na primer ustvarimo z glasbenimi vilicami (te so pripomoček za uglaševanje inštrumentov). Vsa energija takega zvoka je zbrana le v zelo ozkem intervalu frekvenc pri frekvenci 440 Hz. Če čistemu tonu dodamo še enega z višjo



Slika 23.16: Primera spektrov, tj. porazdelitve gostote energijskega toka valovanja po valovnih dolžinah oz. frekvencah (A) Spekter sončne svetlobe, ki pade na površino zemlje. Valovne dolžine vidne svetlobe (400 nm - 750 nm) so v njem približno enakomerno zastopane. Škrbine v infrardečem delu spektra so posledica absorpcije svetlobe v vodni pari v atmosferi. (B) Shematični prikaz absorpcijskega spektra klorofila A. Spekter je prikazan kot odvisnost relativnega absorpcijskega koeficienta od valovne dolžine. Iz spektra razberemo, da se v klorofilu modra (450 nm) in rdeča (650 nm) absorbirata veliko močnejše kot ostale barve. Ostale barve presevajo skozi liste, zaradi česar so listi zeleni.

frekvenco, bosta v spektru dve črti (sl. 23.17B). V teh dveh primerih je valovanje sestavljeno iz diskretnega števila frekvenc, zato je njun spekter *črtast*. Na slikah 23.17 C in D sta prikazani valovanji, ki ju dobimo, če ton A_4 zaigramo na klavir in orgle. Vidimo, da je valovanje zvoka pri inštrumentih sicer periodično, a je daleč od lepe sinusne oblike. V zvoku inštrumentov je namreč združeno zelo veliko število različnih frekvenc, kar se pozna kot *zvezni spekter*. Ker imajo orgle in klavir drugačno barvo zvoka, se njuna spektra seveda razlikujeta, čeprav v obeh primerih igramo isti ton A_4 in je najvišji vrh (osnovna frekvenca) obeh spektrov pri 440 Hz. Spektri valovanj v naravi so pogosto kombinacija črtastega in zveznega spektra. Na primer: spekter sončne svetlobe, ki pade na površino zemlje na sliki 23.16 je sicer zvezen, a v njem manjkajo določene frekvence («črte»), ki se absorbirajo v atmosferi.

Spekter valovanja lahko določimo na več načinov. Spekter svetlobe dobimo na primer, ko svetlobo razklonimo v mavrico s pomočjo steklene prizme ali uklonske mrežice (več o tem kasneje v poglavju o elektromagnetnem valovanju). Če pa so frekvence valovanja dovolj majhne, lahko izmerimo časovni potek nihanja valovanja (tj. zgornje vrstice s slike 23.17) in iz njega izračunamo spekter s pomočjo matematične operacije, ki se imenuje *Fourierova transformacija*. Vsaki obliki valovanja namreč pripada natanko določen spekter. Furierovo transformacijo tako npr. uporabljamo pri določanju spektrov zvo-



Slika 23.17: Shematični prikaz valovanj nekaterih zvokov (zgoraj) in njihovih spektrov (spodaj). (A) Čisti ton s frekvenco 440 Hz oz. nihajnim časom 2,3 ms (t. i. *komorni ton* a1), ki pogosto služi pri uglaševanju inštrumentov. (B) Komornemu tonu a1 se pridruži še ton a3, ki je dve oktavi višje in ima frekvenco 1760 Hz. (C) in (D) valovanji, ki ju dobimo, ko komorni ton a1 zaigramo na električni klavir oziroma orgle. Spekter zvoka inštrumentov je zvezen.

ka, ultrazvoka in radijskih valov, ki jih uporabljamo pri slikanju z magnetno resonanco.

Veliko pojavov, ki so povezani z valovanjem, je odvisnih od frekvence oz. valovne dolžine valovanja. Tudi take frekvenčne odvisnosti pogosto prikazujemo na različnih spektrih. Absorpcija v snovi je npr. pogosto odvisna od frekvence valovanja — valovanja z različnimi frekvencami se v snovi absorbirajo različno, kar prikažemo z *absorpcijskim spektrom* snovi (sl. 23.16B, primer absorpcijskega spektra hemoglobina pa bomo srečali pri sl. 26.8).

Poglavje 24

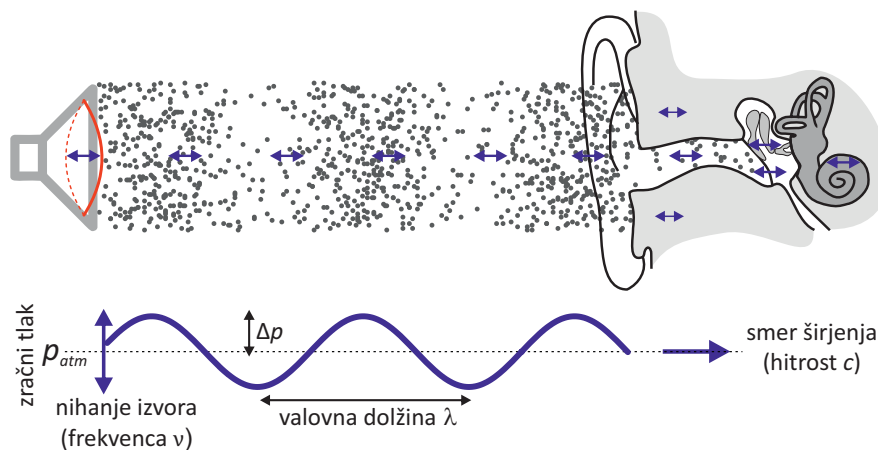
Zvok in ultrazvok

24.1 Osnovne lastnosti

Zvok in ultrazvok sta nihanje snovi, ki se v obliki valovanja širi po prostoru. Nihanje snovi je pri tem tako majhno, da ga z očmi ne vidimo, zaznamo pa ga lahko npr. z ušesi ali mikrofoni. Ker za širjenje potrebujeta snov (po praznem prostoru – vakuumu – se ne moreta širiti, saj v njem ni snovi, ki bi lahko nihale), ju imenujemo tudi mehansko valovanje. Osnovna razlika med zvokom in ultrazvokom je njuna frekvenca: zvočno valovanje lahko ljudje slišimo, frekvenca ultrazvoka pa je tako visoka, da je s svojimi ušesi ne zaznamo. Frekvence slišnega zvoka so od približno 20 Hz do 20 kHz, frekvence ultrazvoka, ki se uporablja v medicini, pa so od približno 1 MHz do 20 MHz.

Zvočno valovanje je longitudinalno, saj pri njem deli snovi med nihanjem odrivajo eden drugega in torej nihajo v smeri širjenja. V trdnih snoveh je možno tudi transverzalno valovanje, pri katerem se nihanje prenaša preko strižnih sil, a takemu mehanskemu valovanju ne rečemo zvok. Jasno sliko o naravi zvoka dobimo, če si predstavljamo, kako potuje od izvora do sprejemnika (sl. 24.1). Izvor zvoka so lahko vse površine, ki nihajo z ustrezno frekvenco in katerih nihanje se prenaša na okolico, na primer glasilke ali pa membrana v zvočnikih. Ko površina odriva molekule zraka v svoji okolici, se nihanje prenese tudi na njih, njihovo nihanje se prenese na njihovo okolico in zvok se tako razširi po prostoru. Ko delci snovi nihajo okoli svoje ravnovesne lege, v snovi izmenično nastajajo razredčine in zgoščine, tj. območja z znižanim in povišanim tlakom. Ko zvok končno pripotuje do ušesa, v njem zaniha bobnič, ta pa svoje nihanje preko kladiivca, nakovalca in stremenca prenese v nihanje tekočine v polžu. V polžu so čutne celice, ki informacijo o nihanju preko slušnega

živca prenesejo v možgane.



Slika 24.1: Shematični prikaz zvočnega valovanja na njegovi poti od izvora do ušesa. Izvor (npr. membrana v zvočniku) niha levo-desno in pri tem odriva molekule zraka v sosesčini. Te zato zanihajo z enako frekvenco kot izvor ter pri tem odrivajo svoje sosede in nihanje tako potuje naprej po prostoru. Ko nihanje zraka pride do bobniča, zaniha tudi ta in preko srednjega ušesa nihanje prenese v polža v notranjem ušesu, kjer nihanje zaznajo čutnice in o tem po slušnem živcu obvestijo možgane. Zaradi nihanja molekul v snovi izmenično nastajajo razredčine in zgoščine. V razredčinah je tlak manjši v zgoščinah pa večji od normalnega tlaka.

Hitrost zvoka v snovi je odvisna od tega, kako težko je snov stiskati in od mase molekul (spomnimo se 2. Newtonovega zakona: večja, kot je masa, večjo silo potrebujemo, da jo spravimo v gibanje). Iz mehanike se spomnimo, da sta s temi lastnostmi v sorodu stisljivost in gostota snovi. Zahtevnejši račun, ki presega okvire tega učbenika, pokaže, da je hitrost zvočnega valovanja v snovi enaka

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho\chi}}, \quad (24.1)$$

kjer je ρ gostota, χ pa stisljivost snovi. Stisljivost trdnih snovi in tekočin je zelo majhna, zato je hitrost zvoka v njih ponavadi velika.

V plinih se enačba za hitrost zvoka še poenostavi, saj sta gostota in stisljivost idealnih plinov med seboj povezani. Pri izračunu moramo upoštevati adiabatno stisljivost plina, $\chi = 1/\kappa p$, kjer p tlak plina, κ pa je razmerje specifičnih toplot pri konstantnem tlaku in konstantni prostornini ($\kappa = c_p/c_v$),

spomnimo se primera 13.2 pri Termodinamiki), saj se zgoščine in razredčine izmenjujejo tako hitro, da med njimi toplota ne more prehajati. Za zrak, ki je sestavljen v glavnem iz dvoatomnih plinov, velja $\kappa = 1,4$. Ob upoštevanju splošne plinske enačbe $pV = (m/M)RT$ in zveze za gostoto $\rho = m/V$ dobimo

$$c_{\text{plin}} = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}, \quad (24.2)$$

kjer je R plinska konstanta, M molekulska masa plina, T pa temperatura. Vidimo, da je hitrost zvoka v plinu z dano molsko maso M odvisna le od temperature T , pri čemer je hitrost večja v plinih s manjšo molsko maso (primer 24.1).

Ker so frekvenca, hitrost in valovna dolžina povezane (en. 23.1), je pri dani frekvenci zvoka tudi njegova valovna dolžina odvisna od snovi. Tipične hitrosti in valovne dolžine zvoka in ultrazvoka so prikazane v tabeli 24.1.

Tabela 24.1: Hitrost zvoka v različnih snoveh ter valovne dolžine v zraku in tipičnem mehkem tkivu, v katerem je hitrost zvoka $c = 1540 \text{ m/s}$ (vrednosti so povzete po [16], druga literatura lahko navaja tudi malo drugačne vrednosti).

snov	hitrost zvoka [m/s]	valovna dolžina [mm]	
zrak [20 °C]	343	frekvenca	
voda	1498		zrak mehko tkivo
maščoba	1475	1000 Hz	343 1540
možgani	1560	100 kHz	3,4 15
kri	1570	1 MHz	0,34 1,5
ledvice	1560	3 MHz	0,11 0,5
mišica	1580	10 MHz	0,03 0,15
kost	3360		

Primer 24.1: smešni glas s helijem in žveplovim heksafluoridom

Vsi poznamo srednješolsko potegavščino, ko se nam po vdihu helija smešno zviša glas, po vdihu žveplovega heksafluorida pa naš glas postane bolj globok. Preden se posvetimo opisu tega pojava, naj opozorimo, da je oboje nevarno početje — če imamo v pljučih helij ali žveplov heksafluorid, v njih ni prostora za kisik in če tako stanje traja predolgo, lahko potegavščina postane zelo nevarna. To še posebej velja za žveplov heksafluorid, ki je težji od zraka in se nam lahko zaradi svoje teže dolgo časa zadržuje v pljučih.

Zakaj se nam ob vdihovanju teh plinov v hipu spremeni glas? Oba plina sta inertna, tako da za spremembo glasu ne more biti odgovorna njuna kemijska reaktivnost. Odgovor moramo torej poiskati v fiziki. Spomnimo se, da je hitrost zvoka v plinu odvisna od njegove molske mase. Povprečna molska masa zraka je 29 g/mol, molska masa helija pa je približno 7-krat manjša ($M_{\text{He}} = 4 \text{ g/mol}$), žveplovega heksafluorida pa 5-krat večja ($M_{\text{SF}_6} = 146 \text{ g/mol}$). Po enačbi 24.2 je torej hitrost zvoka v heliju približno $\sqrt{7}$ -krat večja, v žveplovem heksafluoridu pa $\sqrt{5}$ -krat manjša.

V poglavju o resonatorjih smo povedali, da frekvenca glasu po eni strani določa nihanje glasilk, po drugi pa oblika našega govornega trakta, ki deluje kot resonator in ojači le nekatere frekvence. Resonančna frekvenca resonatorja je odvisna od njegove oblike in velikosti, pa tudi od hitrosti zvoka v njem (en. 23.14). Razlog za popačen glas so torej spremenjene resonančne frekvence našega govornega trakta: po vdihu helija so približno $\sqrt{7}$ -krat višje, po vdihu žveplovega heksafluorida pa $\sqrt{5}$ -krat nižje.

24.2 Jakost zvoka in decibeli

Gostoto energijskega toka zvoka imenujemo tudi *jakost zvoka*. Enota za jakosti zvoka je torej W/m^2 . V primerih, ko ima jakost zvoka zelo velik razpon, jo lahko opišemo tudi z *nivojem jakosti zvoka*, ki temelji na logaritemski lestvici:

$$J = 10 \log \frac{j}{j_0}, \quad (24.3)$$

kjer je j_0 neka referenčna jakost zvoka. Enota pri uporabi logaritemске lestvice je decibel (dB). Če se jakost zvoka desetkrat poveča, se nivo poveča za 10 dB, če se jakost stokrat poveča, se nivo poveča za 20 dB itn. Omenimo naj še, da v literaturi ni enotnega imena za nivo jakosti zvoka, ponekod J imenujejo glasnost, druge kar jakost, v angleški literaturi pa največkrat SPL (sound pressure level).

Logaritemska lestvica pride na primer zelo prav pri opisovanju jakosti slišnega zvoka, saj je uho zelo občutljivo čutilo in lahko zaznava zvoke z jakostjo

od približno 10^{-12} W/m^2 do 1 W/m^2 (še večje jakosti povzročijo okvaro ušesa). Pri definiciji nivoja jakosti slišnega zvoka za j_0 vzamemo najmanjšo slišno jakost pri frekvenci 1 kHz ($j_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$), tako da je v logaritemski lestvici meja slišnosti pri 0 dB, prag bolečine pa pri 120 dB (več o tem še kasneje pri poglavju o sluhu).

Nivo jakosti ultrazvoka se ponavadi meri glede na jakost ob izvoru, tako da je vrednost j_0 pri logaritemski lestvici v tem primeru kar enaka vrednosti jakosti pri izvoru. Izvori ultrazvoka, ki jih srečamo v medicini, imajo j_0 od $0,1 \text{ W/m}^2$ do 700 W/m^2 . Vredno si je zapomniti, da se zaradi absorpcije v tkivu nivo jakosti ultrazvoka pri vsaki prepotovani razpolovni debelini zmanjša za 3 dB ($10 \log \frac{1}{2} \approx -3$).

Primer 24.2: hrup na cesti in računanje z decibeli

Vsak ve, da je hrup tem manjši, čim dalj stran smo od njegovega izvora. Našo intuicijo si sedaj nadgradimo še s kvantitativnim izračunom s pomočjo enačb, ki smo jih spoznali do sedaj. Predstavljajmo si delo na cesti in se vprašajmo kolikšen hrup slišimo na oddaljenosti 1 m od pnevmatičnih kladiv, ki vsaka oddajata hrup z močjo 1 W.

Najprej se vprašajmo, kako se v našem primeru z razdaljo spreminja jakosti hrupa oz. gostota energijskega toka. Predpostavimo, da delavca skupaj oddajata energijski tok P , hrup pa se širi enakomerno na vse strani nad tlemi. V našem primeru se torej hrup širi v obliki pol-sfer stran od izvora. Ker ima pol-sfera površino $2\pi r^2$, lahko torej odvisnost gostote energijskega toka od razdalje zapišemo kot:

$$j(r) = \frac{P}{S} = \frac{P}{2\pi r^2} . \quad (24.4)$$

Na razdalji $r_1 = 1 \text{ m}$ bo torej jakost hrupa enaka

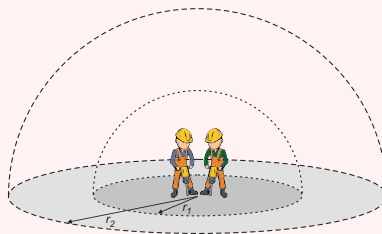
$$j_1 = \frac{P}{2\pi r_1^2} = \frac{2 \text{ W}}{2\pi (1 \text{ m})^2} = 0,3 \text{ W/m}^2 , \quad (24.5)$$

pri čemer smo upoštevali, da je skupna moč, ki jo oddajata dve pnevmatični kladivi, enaka 2 W. Z lestvico jakosti nimamo izkušenj, zato izračunajmo še nivo jakosti hrupa v decibelih (en. 24.3):

$$J_1 = 10 \log \frac{j_1}{j_0} = 10 \log \frac{0,3 \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} = 115 \text{ dB} . \quad (24.6)$$

Tak nivo jakosti je torej ravno na meji bolečine, zato se brez glušnikov ni zdravo dalj časa zadrževati v bližini. Kako se bo nivo jakosti spremenil, če se odmaknemo na razdaljo $r_2 = 10 \text{ m}$? Z enakim izračunom kot zgoraj lahko takoj izračunamo:

$$j_2 = \frac{P}{2\pi r_2^2} = \frac{2 \text{ W}}{2\pi (10 \text{ m})^2} = 0,003 \text{ W/m}^2 , \quad (24.7)$$



Jakost se je torej zmanjšala kar za 100-krat (to bi lahko izračunali tudi na pamet, saj je jakost odvisna od razdalje na kvadrat, kar pomeni, da če se razdalja poveča za 10-krat, se bo jakost zmanjšala za $10^2 = 100$ -krat). In koliko je to v dB? Spet uporabimo definicijo nivoja jakosti (en. 24.3)

$$J_2 = 10 \log \frac{j_2}{j_0} = 10 \log \frac{0,003 \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} = 95 \text{ dB} . \quad (24.8)$$

Tudi ta rezultat bi lahko izračunali na pamet, saj se spomnimo, da vsaka sprememba energije za 10-krat spremeni nivo jakosti za 10 dB. Ko se jakost zmanjša za 100-krat, se nivo jakosti torej zmanjša za 20 dB.

Za konec se vprašajmo še, kako bi se spremenil nivo jakosti hrupa, ko gre eden od delavcev na malico? Poskusimo to izračunati na pamet! Eno pnevmatično kladivo oddaja pol manj energije kot dve. Jakost hrupa se bo zato v tem primeru prepolovila, nivo jakosti pa se bo zmanjšal le za 3 dB (spomnimo se, da je $10 \log \frac{1}{2} = -3$)!

24.3 Prehajanje med snovmi

Ko zvočno valovanje trči na mejo med dvema snovema, ga del prehaja v drugo snov, del pa se ga odbije nazaj (spomnimo se poglavja 23.3). Zaradi zakona o ohranitvi energije velja, da je jakost vpadnega valovanja enaka vsoti jakosti odbitega in prepuščenega valovanja, $j_{vpad} = j_{odb} + j_{prep}$. Natančna analiza, ki presega okvire tega učbenika, pokaže, da je razmerje med jakostjo odbitega in vpadnega zvočnega valovanja odvisno od razlike t. i. *akustičnih impedanc* snovi:

$$\frac{j_{odb}}{j_{vpad}} = \frac{(z_1 - z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2} , \quad (24.9)$$

kjer smo akustično impedanco snovi označili z z . Akustična impedanca snovi je odvisna od njene gostote in hitrosti zvoka v njej:

$$z = \rho c . \quad (24.10)$$

Tipične akustične impedance in tipične deleži odbitega valovanja so prikazani v tabeli 24.2. Vidimo, da sta akustični impedanci zraka in vode zelo različni, zato se na prehodu med zrakom in vodo večino zvoka in ultrazvoka odbije. To zakonitost dobro poznamo iz vsakdanjega življenja: ko glavo potopimo pod vodo, se nam zvoki iz okolice v trenutku zelo stišajo. V tabeli vidimo, da se pri tem prehodu odbije kar 99,9 % vpadnega zvoka, v vodo pa ga torej vstopi

le 0,1 % (slika 24.2). Če se spomnimo še definicije decibelov (en. 24.3), lahko izračunamo, da se zvok in ultrazvok pri prehodu v vodo utišata za 30 dB ($10 \log 0,001 = -30$).

Slika 24.2: Shematični prikaz odboja zvoka in ultrazvoka pri prehodu iz zraka v vodo. Ker se akustična impedanca zraka zelo razlikuje od akustične impedance vode, se večino zvoka odbije. V vodo vstopi le 0,1 % vpadne zvočne energije.

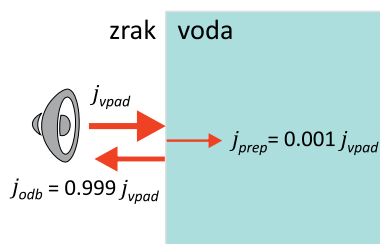


Tabela 24.2: Akustična impedanca različnih snov in deleži odbitega zvočnega valovanja pri nekaterih tipičnih prehodih. Deleži odbitega valovanja so izračunani s pomočjo en. 24.9.

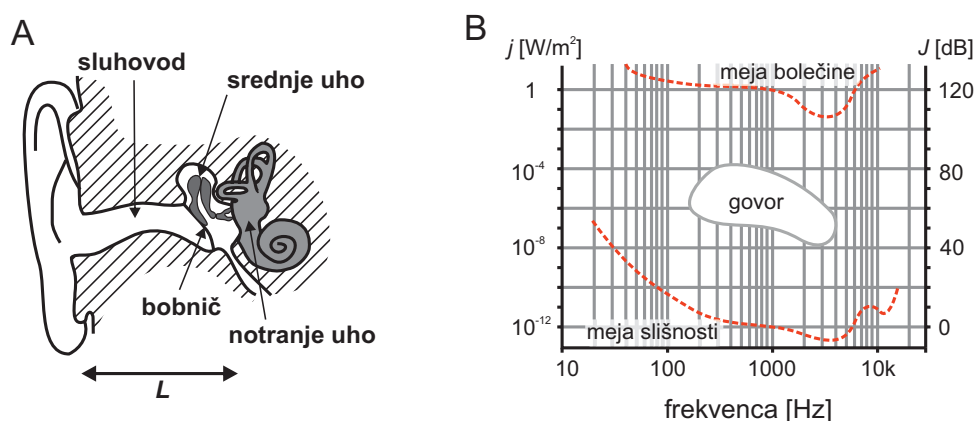
snov	z [$10^{-6} \text{ kg / m}^2 \text{ s}$]
zrak [20 °C]	0,0004
voda	1,5
maščoba	1,38
možgani	1,55
kri	1,61
ledvice	1,62
mišica	1,7
kost	6,1

meja	j_{odb}/j_{vpad}
zrak — voda	99,9 %
zrak — mišica	99,9 %
zrak — kost	99,97 %
maščoba — ledvice	0,6 %
možgani — kost	35 %

24.4 Sluh in govor

Človeško uho je zelo občutljivo in hkrati prilagodljivo čutilo, saj je zmožno razločevati tako izredno tihe kot tudi zelo glasne zvoke (spomnimo se, da smo zato za nivo jakosti zvoka uvedli logaritemsko lestvico z decibeli). Občutljivost ušesa pa je zelo odvisna od frekvence zvoka (sl. 24.3). Frekvenčni meji

slišnosti sta približno 20 Hz in 20 kHz (s starostjo pa se lahko zgornja frekvenca slišnosti zniža celo na 5 kHz), najbolje pa zaznavamo zvok s frekvencama med 3000 Hz in 4000 Hz. Frekvenca vpliva tudi na naš občutek za *glasnost* zvoka, saj se nam dva zvoka z enako jakostjo in različnima frekvencama ne zdita nujno tudi enako glasna. Glasnost zvoka je zato fiziološka količina, ki je definirana tako, da dva zvoka iste glasnosti vzbudita enak občutek v ušesu ne glede na svojo frekvenco. Enota za glasnost je *fon* in je določena tako, da pri frekvenci 1 kHz lestvica fonov ustreza lestvici nivoja jakosti slišnega zvoka v dB (za definicijo dB se spomnimo en. 24.3), pri ostalih frekvencah pa se razmerje ustrezno prilagodi. Ne glede na frekvenco ima zvok na meji slišnosti glasnost 0 fonov, zvok na meji bolečine pa 120 fonov. Na primer, meja slišnosti (glasnost 0 fonov) je za zvok s frekvenco 1 kHz pri nivoju jakosti 0 dB, za zvok s frekvenco 100 Hz pa pri nivoju jakosti 20 dB (sl. 24.3).



Slika 24.3: (A) Shematični prikaz anatomije ušesa. (B) Približni prikaz frekvenčne občutljivosti ušesa. Črtkani črti predstavljata približno frekvenčno odvisnost najmanjše (meje slišnosti) in največje (meje bolečine) jakosti zvoka, ki jo lahko razloči zdrava oseba (na desni osi so označen ustrezen nivo jakosti v decibelih). Občutljivost ušesa je največja med 3000 Hz in 4000 Hz, kak ustreza resonančni frekvenci sluhovoda. Prikazano je še približno območje frekvenc in jakosti pri govoru.

Poglejmo si še osnove delovanja ušesa. Anatomijo ušesa razdelimo na tri dele: v zunanjem in srednjem ušesu je zrak (razmejena sta z bobničem), v notranjem ušesu pa so kanali z vodno raztopino in tkivom, ki vsebuje čutnice za sluh in ravnotežje (sl. 24.3). Zunanje in srednje uho opravljata pomembno «fizikalno» nalogo: zvočno valovanje morata iz zraka prenesti v notranje uho s čim manj izgubami. Spomnimo se namreč, da se akustični impedanci zraka in vode zelo razlikujeta, zato bi se zvok brez pomoči zunanjega in srednjega

ušesa pri prehodu v notranje uho skoraj v celoti odbil (tabela 24.2).

Ko zvok prispe v zunanje uho, zrak v sluhovodu zaniha. Sluhovod je namreč resonator v obliki odprte piščali (sl. 23.15), saj je na eni strani odprt, na drugi pa se zvok odbija od trdih sten notranjega ušesa. Dolžina resonatorja (L) je približno 26 mm, kar ustreza osnovni lastni frekvenci približno 3500 Hz ($L = \lambda/4$, en. 23.14). V sluhovodu se torej relativno najbolj ojača zvok s frekvencami med 3000 Hz in 4000 Hz, in tudi zato je v tem frekvenčnem območju naš sluh najbolj občutljiv (sl. 24.3). Nihanje zraka v sluhovodu povzroči nihanje bobniča, saj je slednji malo odmaknjen od sten notranjega ušesa in se ne nahaja v vozlu stoječega valovanja. Bobnič je preko treh koščic (kladivca, nakovalca in stremenca) mehansko povezan z notranjim ušesom, kar omogoča prenos nihanja bobniča v nihanje raztopine v notranjem ušesu. Kako pomembna je funkcija srednjega ušesa pove podatek, da se ob njegovi okvari občutljivost ušesa poslabša za približno 20 dB.

Slušni del notranjega ušesa predstavlja v polža navit kanal z vodno raztopino, v katerem je tudi membrana iz tkiva s slušnimi čutnicami. Oblika in zgradba kanala se z oddaljenostjo od začetka spreminjata, tako da ima vsak del kanala svojo resonančno frekvenco (resonančna frekvenca pada z oddaljenostjo od stremenca). Ko zvočno valovanje potuje po kanalu, različne frekvence valovanja vzbudijo nihanje membrane v različnih delih kanala. Notranje uho torej deluje kot frekvenčni analizator zvoka. V membrani so čutnice z laski, ki se zaradi nihanja tkiva premikajo in mehansko gibanje pretvarjajo v spremembo prekomembranskega potenciala, ki po živcu potuje do možganov. Čutnice pa niso le pasivni detektorji nihanja, saj se lahko tudi same aktivno premikajo in tako preko zapletenega mehanizma povratnih zank izboljšujejo zaznavanje zvoka. Po drugi strani z aktivnim premikanjem dlačic uho tudi samo oddaja šibek zvok, kar imenujemo otoakuskična emisija (OAE). OAE izkoriščamo pri diagnozi motenj v delovanju notranjega ušesa — sluha novorojenčkov tako ne preizkušajo več s cingljanjem z zvončkom temveč z mikrofonom, s katerim v ušesu izmerijo OAE.

Podobno kot zaznavanje zvoka je tudi produkcija zvoka pri človeku zapleten proces in že majhne motnje v njegovem delovanju lahko vodijo do govornih napak. Z raziskovanjem govora se ukvarja fonetika, mi pa se bomo tega širkega področja le bežno dotaknili. Izvora nihanja pri produkciji zvoka sta nihanje glasilk in pa vrtinčenje zraka ob različnih stenah govornega trakta (žrelo, ustna in nosna votlina, jezik, zobje ...). Pri tem energija za nihanja prihaja največkrat iz stiskanja zraka iz pljuč, le pri redkih glasovih tudi od druge — npr. pri tlesku z jezikom. Glede na svojo velikost je govorni organ zelo močan izvor zvoka, saj se lahko npr. operni pevec dobro kosa s celotnim orkestrom.

Glasovi so sestavljeni iz več frekvenc in imajo večinoma zapleteno spektralno sestavo. Nihanje zvoka je namreč lahko zares periodično le pri samoglasnikih, saj le samoglasniki nastanejo z nihanjem glasilk ob povsem odprtem govornem traktu. Osnovno frekvenco samoglasnikov (višino njihovega tona) tako uravnavamo z napetostjo glasilk, ostale značilne frekvence, po katerih se samoglasniki pravzaprav ločijo med seboj, pa z oblikovanjem votlin govornega trakta. Žrelo, ustna in nosna votlina namreč delujejo kot resonatorji, v katerih se glede na njihovo obliko in velikost nekatere frekvence ojačijo bolj kot druge. Pri soglasnikih se oblika govornega trakta med govorom zelo spreminja (v določenem hipu je trakt lahko tudi povsem zaprt, kot npr. pri zapornikih «p», «b» ...) ali pa ni nihanja glasilk (npr. pri «s»), zato je o periodičnosti teh zvokov in o njihovi višini težko govoriti.

Poglavje 25

Ultrazvočno slikanje

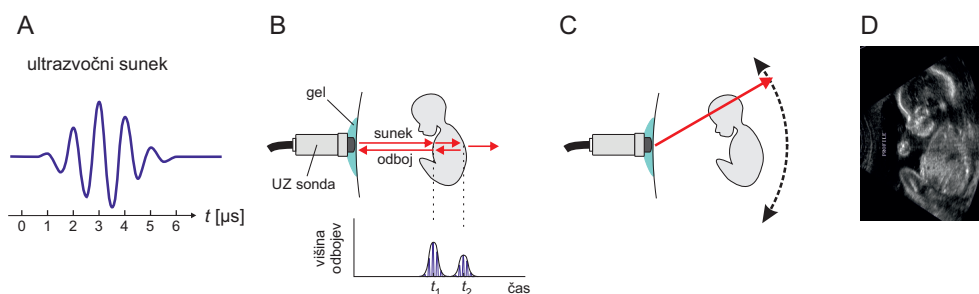
25.1 Osnovne značilnosti

Ultrazvočno slikanje (imenujemo jo tudi *ehografija* oz. *sonografija*) je najpogostejša slikovna diagnostična metoda. Osnovni mehanizem nastanka ultrazvočne slike je enostaven: v telo usmerimo kratke ultrazvočne sunke, nato pa na osnovi njihovih odmevov, ki se odbijajo od različnih tkiv, rekonstruiramo sliko telesa (slika 25.1). V tem poglavju bomo spoznali glavne značilnosti te metode ter nekaj njenih prednosti in slabosti.

Za slikanje se največkrat uporablja ultrazvok s frekvencami od 1 MHz do približno 15 MHz. Za produkcijo in detekcijo tako visokih frekvenc ne moremo uporabljati klasičnih zvočnikov in mikrofонов, saj le ti ne morejo nihati dovolj hitro. Kot izvori in detektorji ultrazvoka se zato uporabljajo *piezoelektrični kristali*. To so kristali, ki se pod vplivom električne napetosti skrčijo in raztezajo. Če na piezoelektrični kristal priključimo visokofrekvenčno izmenično napetost, bo kristal zanihal z isto frekvenco in pri tem oddajal ultrazvok. Mehanizem prenosa deluje tudi v obratno smer: ko mirujoč kristal pod vplivom ultrazvočnih valov zaniha, se na njemu ustvari izmenična električna napetost, ki ima enako obliko kot vpadni ultrazvočni val. Pri sodobnih ultrazvočnih napravah je zato lahko ista sonda hkrati izvor in tudi detektor ultrazvoka.

Ultrazvočna naprava informacijo o položaju struktur v telesu dobi na osnovi časovne zakasnitve zaznanih odbojev (sl. 25.1B), saj velja, da v času med oddanim in zaznanim sunkom le ta prepotuje dvojno razdaljo do strukture (tja in nazaj). Globino, na kateri je struktura (d), lahko izračunamo iz enostavne enačbe

$$d = \frac{ct}{2} . \quad (25.1)$$



Slika 25.1: Shematični prikaz nastanka slike pri ultrazvočnem slikanju. V telo usmerimo kratke ultrazvočne sunke, nato pa na osnovi njihovih odbojev na strukturah v telesu rekonstruiramo sliko notranjosti. (A) Shematični prikaz kratkega ultrazvočnega sunka, ki ga odda sonda. Frekvenca prikazanega ultrazvoka je 1 MHz, nihajni čas je $1 \mu\text{s}$, sunek pa traja približno tri nihaje. (B) Ultrazvočna sonda, ki je prislonjena na kožo, oddaja ultrazvočne sunke ter zaznava odboje, do katerih pride na prehodih med tkivi v telesu. Merilo za globino tkiv je kar časovni zamik odbojev. Da se zmanjša odboj ultrazvoka pri vstopu v telo, se med sondo in kožo nanese poseben gel. (C) Sonda oddaja sunke zaporedoma v različnih smereh. (D) Računalnik na osnovi odbojev iz različnih smeri sestavi ultrazvočno sliko, pri čemer je intenziteta na sliki sorazmerna višini odbitih sunkov.

kjer je t zakasnitev med oddanim sunkom in prejetim odmevom, c pa hitrost zvoka v telesu.

Pri najbolj pogostem načinu slikanja sonda oddaja sunke zaporedoma v različnih smereh (sl. 25.1C), računalnik pa nato na osnovi odbojev sestavi celotno sliko, pri čemer je intenziteta na sliki kar sorazmerna višini zaznanih odbojev (sl. 25.1D). Ta način prikaza slike se imenuje *B-način* (angl. brightness mode, B-mode). Včasih se za prikaz slike uporablja tudi starejši *amplitudni* ali *A-način* (angl. amplitude mode oz. A-mode), pri katerem naprava na grafu prikaže le zaznane odboje in njihove višine iz ene smeri (sl. 25.1B).

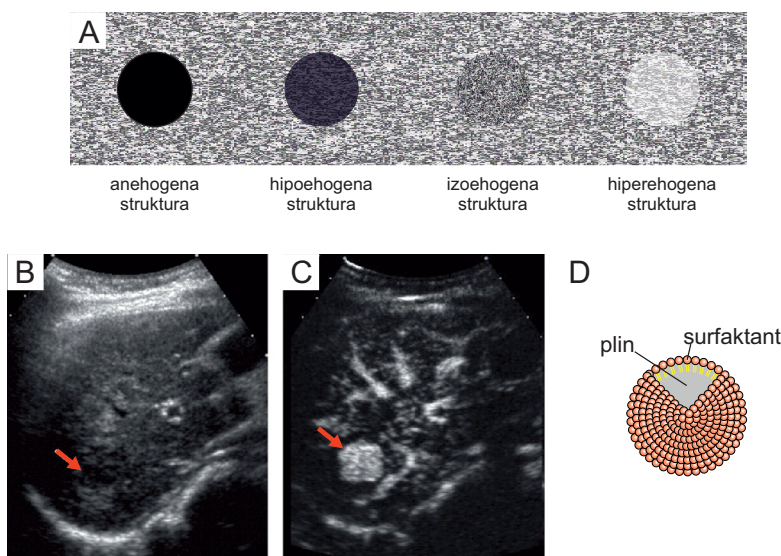
Čeprav hitrost ultrazvoka ni enaka v vseh tkivih (spomnimo se podatkov iz tabele 24.1), pa ultrazvočna naprava ne more vedeti, po katerih tkivih je potoval sunek, zato za izračun globine v enačbi 25.1 uporabi podatek o povprečni hitrosti zvoka v mehkih tkivih, $c = 1540 \text{ m/s}$. Hitrosti v dejanskih tkivih se od te hitrosti sicer ne razlikujejo veliko, a zaradi te predpostavke včasih vseeno pride do popačenja slike.

25.2 Nastanek slike

Ključen pojav za nastanek ultrazvočne slike je odboj ultrazvoka na tkivih. V prejšnjih poglavjih smo spoznali, da je jakost odbitega zvoka na meji med dvema snovema odvisna od razlike njunih akustičnih impedanc (en. 24.9 in en. 24.10). Da si pridobimo občutek za odboj ultrazvoka, se spomnimo vrednosti akustičnih impedanc različnih tkiv, ki so prikazane v tabeli 24.2. Vidimo, da je odboj med mehkim tkivom in kostjo veliko večji, kot med dvema mehkim tkivoma. Po eni strani je tako lobanjska kost na ultrazvočnih slikah zelo dobro vidna (sl. 25.1D), po drugi pa je z ultrazvokom težko slikati skozi kosti (npr. v možgane ali za rebra). Odboj je zelo velik tudi med zrakom in mehkim tkivom, zato se votline napolnjene s plini s stališča ultrazvoka obnašajo podobno kot kosti. Zrak bi nam delal težave tudi že pri vstopu ultrazvoka v telo, zato moramo ultrazvočno sondo prisloniti tik na kožo, vmes pa za vsak slučaj še nanesti poseben gel, katerega akustična impedanca je podobna akustični impedanci kože (sl. 25.1B).

Ultrazvok se ne odbija le na meji med tkivi, ampak tudi na vseh majhnih nehomogenih strukturah v njih, zaradi česar se zdijo ultrazvočne slike polne šumenja (»sneženja«). Radiologi stopnjo jakost odbojev v tkivu opisujejo s pojmom *ehogenost* (slika 25.2A). Strukture, ki odbijajo več ultrazvoka od okolice, so hiperehogene, če pa odbijajo manj, so hipoehogene. Popolnoma anehogene so le povsem homogene strukture; takšne so npr. poln mehur ali druge votline napolnjene s homogeno tekočino. Ehogenost nekaterih struktur lahko izboljšamo z uporabo kontrastnih sredstev, ki jih vbrizgamo preiskovancu v žilo (sliki 25.2B in C). S pomočjo našega znanja akustike, lahko uganemo, da so dobra kontrastna sredstva za ultrazvok raztopine z majhnimi mehurčki plina, saj se na prehodu med raztopino in plinom ultrazvok zelo dobro odbija (slika 25.2D).

Razlog, da se za slikanje uporablja ultrazvok in ne zvok, je njegova visoka frekvenca ter posledično majhna valovna dolžina in s tem tudi manjši uklon (tabela 25.1). V mehkem tkivu ima zvok s frekvenco 1 kHz valovno dolžino 1,5 m, ultrazvok s frekvenco 1 MHz pa tisočkrat manj, tj. 1,5 mm. Manjša kot je valovna dolžina, manjši so uklonski pojavi in bolje je mogoče ultrazvok usmeriti. Pri dani velikosti ultrazvočne sonde ima torej ultrazvok visoke frekvence večjo globino bližnjega območja L_F in manjši divergenčni kot α (sl. 23.13C in tabela 25.1). Poleg tega do uklona uklona pride tudi na strukturah v telesu (spomnimo se, da zaradi uklona z nobenim valovanjem ne moremo zaznati struktur, ki so manjše od valovne dolžine). Višja, kot je frekvenca ultrazvoka, tem bolj natančna je torej ultrazvočna slika (primer 25.1).



Slika 25.2: Kontrast na ultrazvočni sliki je odvisen od jakosti odbojev na in v strukturah v telesu, tj. od njihove ehogenosti. (A) Shematični prikaz struktur z različno ehogenostjo. Anehogene so le votline, napolnjene s homogeno tekočino ali plinom. (B) Primer ultrazvočne slike, na kateri se vidi sum tumorja ob jetrih (označeno s puščico), a zanesljive diagnoze zaradi slabega kontrasta ni mogoče postaviti [15]. (C) Slika istega predela po vbrizganju kontrastnega sredstva v žilo preiskovanca. Ker je tumor bolj prekrvavljen od okolice, se mu ehogenost po dodatku kontrastnega sredstva zelo poveča. (D) Kot kontrastno sredstvo za ultrazvok se največkrat uporabljajo raztopine nekaj mikrometrov velikih mehurčkov plina, saj se na njih ultrazvok močno odbija. Obstojnost mehurčkov se poveča s surfaktanti.

Čeprav je za večjo jasnost slike dobro uporabiti čim višje frekvence, pa kljub vsemu ne moremo uporabljati ultrazvoka poljubno visokih frekvenc. Glavni razlog za to je, da z večanjem frekvence narašča tudi absorpcija v tkivu (glej tudi tabelo 25.1). Tako je razpolovna debelina za ultrazvok v tkivu kar obratno sorazmerna frekvenci (absorpcijski koeficient je sorazmeren frekvenci):

$$x_{1/2} \propto \frac{1}{\nu} \quad \text{oz.} \quad \mu \propto \nu. \quad (25.2)$$

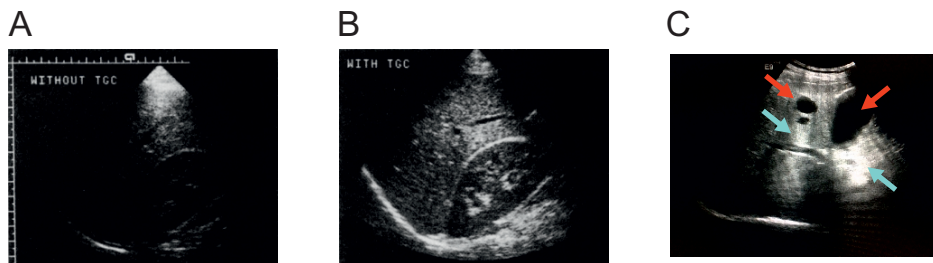
Pri izbiri frekvence ultrazvoka v klinični praksi je tako potreben kompromis: visoke frekvence omogočijo lepšo sliko, a z njimi ne moremo slikati tako globoko v telo kot z nizkimi. Zato se ponavadi pri slikanju podkožnih struktur

Tabela 25.1: Vpliv frekvence ultrazvoka na valovno dolžino λ v mehkem tkivu, globino bližnjega območja L_F , divergenčni kot α ter razpolovno debelino pri absorpciji $x_{1/2}$. Globina bližnjega območja in divergenčni kot sta podana za primer uporabe ultrazvočne sonde s premerom 1 cm (za opis L_F in α glejte poglavje o uklonskih pojavih, en. 23.11 in en. 23.12). Višja kot je frekvenca, manjša je valovna dolžina in manj izraziti so uklonski pojavi. Po drugi strani se z večanjem frekvence večja absorpcija v tkivu.

ν	λ [mm]	L_F [cm]	α [°]	$x_{1/2}$ [cm]
1000 Hz	1540	0,002	90	
1 MHz	1,5	1,6	11	6
5 MHz	0,3	8	2	1,2
10 MHz	0,15	16	1,1	0,6

uporablja čim višje frekvence (> 10 MHz), pri abdominalnem slikanju pa nižje (2 – 5 MHz).

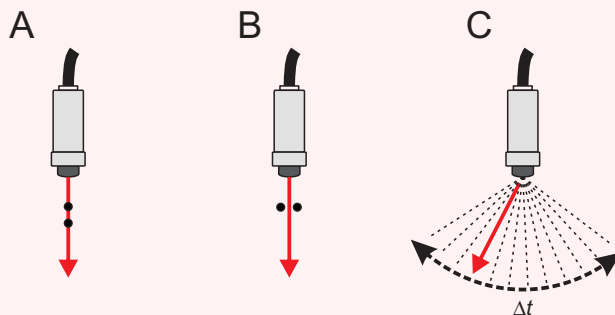
Pozoren bralec se je vprašal, zakaj je v B-načinu intenziteta struktur približno enaka ne glede na globino, na kateri se nahajajo. Pričakovali bi namreč, da so odboji od globljih struktur šibkejši (na sliki temnejši), saj prepotujejo daljšo razdaljo in so se zaradi absorpcije bolj ošibijo. Odgovor na to vprašanje je enostaven - odmevi iz večje globine so v resnici šibkejši, a to razliko ultrazvočna naprava *kompensira* in jih na zaslonu prikaže svetlejši, kot so v resnici (sl. 25.3). Pri kompenzaciji slike upošteva povprečno absorpcijo v mehkem tkivu, zato lahko prisotnost struktur z bistveno spremenjenim absorpcijskim koeficientom na sliki povzroči artefakte (sl. 25.3C).



Slika 25.3: Kompenzacija ultrazvočne slike. (A) Primer nekompenzirane slike. Globlje strukture so na sliki temnejše, saj odboji od njih prepotujejo daljšo pot in se zaradi absorpcije bolj ošibijo [16]. (B) Ista slika z vključeno kompenzacijo, ki ustrezno ojači odboji od globljih struktur, tako da so vse strukture na sliki enako svetle. (C) Kompenzacija slike lahko privede do artefaktov [17]. Na sliki sta cisti (označeni z rdečo puščico), v katerih je absorpcija ultrazvoka manjša kot v normalnem tkivu. Ultrazvok, ki potuje skozi njiju, se zato absorbira manj kot v njuni okolici. Odboji iz tiste smeri so zato močnejši in ko jih naprava s kompenzacijo slike še dodatno ojači, postanejo območja za cistama na sliki svetlejša od okolice (označeno z modrimi puščicami).

Primer 25.1: ločljivost ultrazvočne slike

Z našim znanjem fizike lahko ocenimo ločljivost, ki jo je mogoče doseči pri ultrazvočnem slikanju. Opisali bomo le tri glavne vrste ločljivosti, ki so shematično prikazane na spodnji sliki: vzdolžno (A), prečno (B) in časovno ločljivost (C).



Vzdolžna ločljivost opisuje ločljivost v smeri žarka, tj. najmanjšo razdaljo med dvema strukturama, pri kateri strukturi še lahko razločimo. Z malo razmisleka ugotovimo, da je pogojena z dolžino ultrazvočnega sunka, saj dveh struktur v vzdolžni smeri ne bomo razločili, če se bosta odmeva od njiju prekrivala. Tipični sunki so dolgi nekaj valovnih dolžin (sl. 25.1A), le te pa so pri 10 MHz dolge približno 0,15 mm (tabela 25.1). Tudi pri visokih frekvencah vzdolžna ločljivost torej ne more biti bistveno boljša od 1 mm, pri nižjih frekvencah pa je še slabša.

Prečna ločljivost opisuje ločljivost pravokotno na smer žarka in je odvisna od širine ultrazvočnega snopa oz. sunka v lateralni smeri. Zaradi uklona je ta širina lahko najmanj približno valovna dolžina in še to le v bližnjem območju, na večjih oddaljenostih od sonde pa ultrazvočni žarek slej ko prej začne divergirati. Prečna ločljivost bo tako na večjih globinah slabša kot tik pod kožo. V praksi je zato prečna ločljivost pogosto celo malo slabša od vzdolžne.

Časovna ločljivost opisuje čas, ki je potreben za eno sliko (Δt), oz. frekvenco osveževanja slike. V grobem je Δt enak produktu časa, ki je potreben za detekcijo odmevov enega sunka (t_1), in števila sunkov, ki jih potrebujemo, da prečeseemo želeno preiskovano območje (N). Koliko časa pa potrebujemo za detekcijo odmevov sunka v eni smeri? To je ravno čas, ki ga sunek potrebuje za svojo pot od sonde do konca preiskovanega območja in nazaj. Če je preiskovano območje globoko $L = 20$ cm in za eno sliko potrebujemo $N = 200$ sunkov, je torej časovna ločljivost slikanja enaka

$$\Delta t = N t_1 = N \frac{2L}{c} = 200 \frac{0,4 \text{ m}}{1540 \text{ m/s}} = 200 \cdot 0,26 \text{ ms} = 50 \text{ ms}.$$

Z drugimi besedami, frekvenca osveževanja slike je enaka $1/\Delta t = 20$ Hz. Ultrazvočno slikanje ima torej dobro časovno ločljivost in lahko z njim npr. brez težav opazujemo bitje srca.

Kot marsikje v življenju, je torej tudi pri ultrazvočnem slikanju potrebno sklepati kompromise med različnimi omejitvami. Za slikanje struktur, ki so globoko v telesu, moramo uporabiti nižje frekvence ultrazvoka, ki se v tkivu manj absorbirajo, a zaradi tega

izgubimo na ločljivosti slike. Plitkejše, kot je preiskovano področje, višje so lahko ultrazvočne frekvence in boljši sta vzdolžna in prečna ločljivost. Pri časovni ločljivosti je podobno — večje kot je preiskovano področje, več časa potrebujemo za nastanek ene slike in slabša je časovna ločljivost.

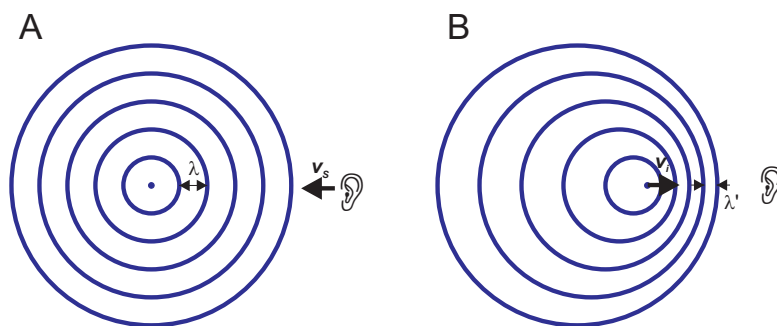
25.3 Dopplersko ultrazvočno slikanje

Z ultrazvokom lahko poleg slike struktur v telesu ocenimo tudi njihovo gibanje, pri čemer nam na pomoč priskoči *Dopplerjev pojav*. Do tega pojava pride, če se izvor in sprejemnik valovanja gibljeta eden glede na drugega, zaradi česar sprejemnik zazna drugačno frekvenco valovanja, kot jo oddaja izvor.

Dopplerjev pojav bomo najbolje razumeli s pomočjo vizualizacije valovnih front. Slika 25.4A prikazuje primer, ko izvor valovanja miruje, sprejemnik pa se mu približuje s hitrostjo v_s . Izvor oddaja valovanje s frekvenco ν , valovi se širijo enakomerno stran od izvora s hitrostjo c in valovno dolžino λ . Ker se sprejemnik giblje proti smeri valovanja, zaznava navidezno večjo hitrost valovanja $c' = c + v_s$, zaznana valovna dolžina valovanja pa se ne spremeni. Frekvenca, ki jo zaznava sprejemnik, je tako

$$\nu' = \frac{c'}{\lambda} = \frac{c + v_s}{\lambda} = \nu \left(1 + \frac{v_s}{c} \right), \quad (25.3)$$

in je višja od oddane frekvence. V primeru, ko se sprejemnik oddaljuje od izvora, je hitrost v_s negativna in je frekvenca, ki jo zazna sprejemnik, nižja od oddane.



Slika 25.4: Shematičen prikaz Dopplerjevega pojava. (A) izvor valovanja miruje, sprejemnik se premika s hitrostjo v_s . (B) Sprejemnik miruje, izvor valovanja pa se premika s hitrostjo v_i .

Slika 25.4B prikazuje primer, ko sprejemnik miruje, izvor valovanja pa se približuje s hitrostjo v_s . V tem primeru sprejemnik zaznava nespremenjeno hitrost valovanja in zmanjšano valovno dolžino λ' , zato bo zaznana frekvenca višja od frekvence izvora. Zmanjšanje valovne dolžine je enako razdalji, ki jo prepotuje izvor v eni periodi valovanja. Premik izvora valovanja v eni periodi je $L = v_i t_0 = \frac{v_i}{\nu} = \frac{v_i}{c} \lambda$, zato je frekvenca, ki jo zazna sprejemnik, enaka:

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda - L} = \frac{c}{\lambda - \frac{v_i}{c} \lambda} = \nu \frac{1}{1 - \frac{v_i}{c}}, \quad (25.4)$$

Vrednost faktorja $1/(1 - v_i/c)$ je večja od 1, zato je zaznana frekvenca ν' večja od oddane frekvence ν . V primeru, ko pa se izvor oddaljuje od sprejemnika, ima v_i negativno vrednost in je zaznana frekvenca manjša od frekvence izvora.

Hitrosti gibanja so pogosto majhne v primerjavi s hitrostjo valovanja, $\frac{v}{c} \ll 1$. V takih primerih lahko uporabimo binomski razvoj, za katerega pri majhnih vrednostih x velja: $(1 \pm x)^m \approx 1 \pm mx$. Enačba 25.4 se tako poenostavi $\nu' = \nu(1 + v_i/c)$, kar je enako kot v primeru, ko se oddaljuje sprejemnik in izvor miruje. Pri majhnih hitrostih torej ni razlike med gibanjem izvora in sprejemnika, zato lahko v splošnem spremembo frekvence zaradi Dopplerjevega pojava zapišemo preprosto kot:

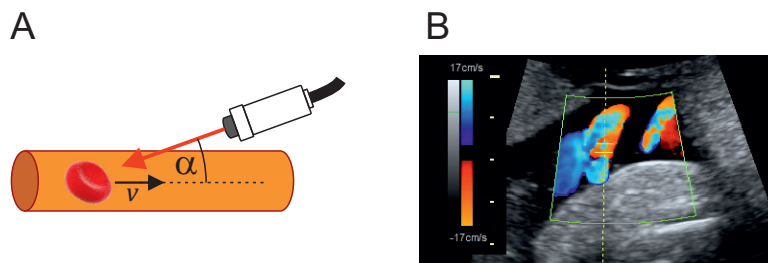
$$\nu' = \nu \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \quad \text{oz.} \quad \frac{\Delta\nu}{\nu} = \pm \frac{v}{c} \quad (25.5)$$

kjer je v relativna hitrost med izvorom in sprejemnikom in pozitivni predznak velja za približevanje, $\Delta\nu$ pa je razlika med zaznano in oddano frekvenco. Zaznana frekvenca se torej poveča, če se izvor in sprejemnik približujeta in zmanjša, če se izvor in sprejemnik oddaljujeta. Če je medsebojna hitrost izvora in sprejemnika enaka 1% hitrosti zvoka, se bo tudi zaznana frekvenca spremenila za 1%.

Pri ultrazvočnem slikanju pride do Dopplerjevega pojava vsakič, ko se ultrazvočni sunki odbijejo na strukturah, ki se gibljejo glede na sondo, npr. na premikajočih se površinah organov ali na krvi, ki se pretaka po žilah. Pri tem do pojava pride kar dvakrat, saj ima gibajoča struktura najprej vlogo »sprejemnika«, ko pa sunek odbije nazaj pa še vlogo »oddajnika«. Poleg tega moramo upoštevati, da k spremembi frekvence prispeva le komponenta hitrosti gibanja v smeri žarka (sl. 25.5). Sprememba frekvence, ki jo zazna ultrazvočna sonda je torej

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 2 \frac{v}{c} \cos \alpha, \quad (25.6)$$

kjer je α kot med smerjo gibanja površine organa ali krvi in ultrazvočnim žarkom.



Slika 25.5: Shematični prikaz Dopplerskega ultrazvočnega slikanja. (A) Do Dopplerjevega pojava pride vsakič, ko se ultrazvočni sunek odbije na premikajočih se strukturah, npr. na eritrocitih v krvnem obtoku. K dopplerski spremembi frekvence prispeva le komponenta hitrosti v smeri proti sondi (njena vrednost je $v \cos \alpha$). (B) Primer dopplerske ultrazvočne slike popkovnične arterije [18]. Hitrost struktur je na sliki prikazana z barvami, zato se dopplerskemu ultrazvoku reče tudi barvni ultrazvok.

25.4 Biološki učinki ultrazvoka

Kot vsako valovanje tudi ultrazvok nosi energijo in lahko zato učinkuje na snov, po kateri potuje. Med fizikalni vplivi ultrazvoka na tkiva sta najbolj izrazita dva. Prvi so t. i. termični učinki, pri katerih se tkivo zaradi absorpcije ultrazvoka segreva, drugi pa je mehansko nihanje tkiva, ki lahko povzroči nastajanje zračnih mehurčkov (ta pojav imenujemo *kavitacija*). Če je kavitacija zelo močna, lahko pokanje mehurčkov mehansko raztrga in uniči bližnje celice.

Pri ultrazvočnem slikanju ponavadi uporabljamo tako majhne jakosti ultrazvoka, da naj njegovi fizikalni vplivi ne bi imeli trajnih stranskih posledic na tkiva. Ker pa biološki vplivi ultrazvoka v celoti še niso povsem raziskani, se včasih kljub vsemu odsvetuje uporabo ultrazvočnega slikanja po nepotrebnem. Po drugi strani fizikalne vplive ultrazvoka s pridom uporabljajo pri fizioterapiji, kjer naj bi pomagali pri lažšanju bolečin in celjenju ran. Poleg tega se v zadnjem času intenzivno raziskuje uporaba t. i. ultrazvočne kirurgije, pri kateri skalpel ni potreben, saj se npr. maligno tkivo uniči z močno fokusiranim ultrazvočnim valovanjem zelo velike jakosti.

Poglavje 26

Elektromagnetno valovanje

26.1 Osnovne lastnosti

Poznamo različne vrste elektromagnetnega valovanja, od radijskih valov preko vidne svetlobe do rentgenskih žarkov in žarkov gama (tabela 26.1). Frekvenčna območja različnih vrst elektromagnetnega valovanja so zelo različna (razmerje med frekvenco pri žarkih gama in radijskih valovih je več kot 10^{18}), zato so zelo različne tudi njihove lastnosti, uporaba in nenazadnje tudi njihov vpliv na biološko tkivo. Območje radijskih valov si ponavadi zapomnimo po njihovi frekvenci (do približno nekaj 100 MHz), območja ostalih vrst pa po valovnih dolžinah. Rentgenske žarke in žarke gama si pogosto zapomnimo tudi po visoki energiji fotonov (od nekaj 100 eV do nekaj 100 keV in več).

Pri elektromagnetnem valovanju nihata jakost električnega $\vec{E}$ in gostota magnetnega polja $\vec{B}$ pravokotno ena na drugo (sl. 26.1). V splošnem so izvori elektromagnetnega valovanja električni naboji, ki se pospešeno gibljejo oz. nihajo. Na primer, v radijskih antenah niha električni tok, zato se spreminja električno polje v okolici. Ker je s spreminjanjem električnega polja na enem mestu vedno povezano tudi spreminjanje magnetnega polja v okolici in obratno (spomnimo se npr. zakona o magnetni indukciji, poglavje 22.4), se elektromagnetno valovanje širi stran od antene. Smeri jakosti električnega polja in gostote magnetnega polja sta pravokotni na smer širjenja, zato je elektromagnetno valovanje transverzalno. Če sta smeri električnega in magnetnega polja stalni, je elektromagnetno valovanje polarizirano.

Za razliko od zvoka, se elektromagnetno valovanje lahko širi po praznem prostoru (vakuumu). Hitrost širjenja elektromagnetnega valovanja v praznem

Tabela 26.1: Pregled spektra elektromagnetnega valovanja. Prikazane so frekvenca ν , valovna dolžina v zraku λ , energija enega fotona W_γ (več o fotonih v poglavju 26.2) ter tipični izvori. Meje med različnimi tipi elektromagnetnega valovanja niso ostre.

	ν	λ	W_γ	tipični izvor
nizke frekvence	50 Hz	1000 km	2×10^{-13} eV	elekt. omrežje
FM radio	~ 100 MHz	~ 3 m	$\sim 0,1$ μ eV	antena
GSM mobilni	~ 1 GHz	~ 30 cm	~ 1 μ eV	antena
mikro valovi	~ 10 GHz	~ 3 cm	~ 10 μ eV	antena
IR	~ 30 THz	750 nm – 100 μ m	$< 1,5$ eV	telesa s sobno T
vidna svetloba	~ 600 THz	400 nm – 750 nm	1,5 eV – 3 eV	molekule, atomi
UV	$\sim 10^{15}$ Hz	10 nm – 400 nm	3 eV – 120 eV	molekule, atomi
rentgen	$\sim 10^{18}$ Hz	10 pm – 10 nm	120 eV – 120 keV	rentgenska cev
žarki γ	$> 10^{19}$ Hz	< 10 pm	> 100 keV	jedrski razpad

prostoru je nam dobro znana konstanta:

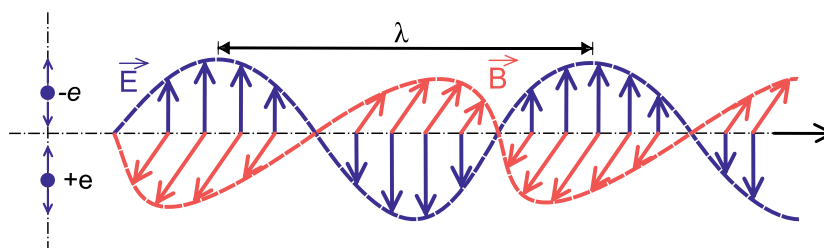
$$c_0 = 299792458 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

V snovi je hitrost elektromagnetnega valovanja c vedno manjša od hitrosti v praznem prostoru, $c < c_0$

$$c = \frac{c_0}{n}, \quad (26.1)$$

pri čemer smo vpeljali *lomni količnik* snovi n , ki je razmerje hitrosti v vakuumu in hitrosti v snovi, $n = c_0/c$. Lomni količnik je vedno večji od 1. Za vidno svetlobo je lomni količnik v zraku približno 1,0003, v vodi 1,33, v steklu pa približno 1,5¹.

¹Izkaže se, da je hitrost elektromagnetnega valovanja v praznem prostoru povezana z influenčno konstanto ϵ_0 in indukcijsko konstanto μ_0 , ki smo ju spoznali že pri električnih in magnetnih pojavih, $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, v snovi pa velja $n = \sqrt{\epsilon\mu}$



Slika 26.1: Shematični prikaz elektromagnetnega valovanja. Izvor valovanja je električni naboj, ki niha in s tem neprestano spreminja električno polje v okolici. Spreminjajoče električno polje povzroči nastanek spreminjajočega magnetnega polja, to pa spet spreminjajoče električno polje in nihanje polja se tako širi po prostoru. Ker lahko električno in magnetno polje nastaneta tudi v praznem prostoru, se lahko po praznem prostoru širi tudi elektromagnetno valovanje. Jakost električnega polja $\vec{E}$ in gostota magnetnega polja $\vec{B}$ nihata pravokotno ena na drugo ter pravokotno glede na smer širjenja valovanja, zato je elektromagnetno valovanje transverzalno valovanje in je lahko polarizirano.

Primer 26.1: Robotske operacije in odzivni čas

Hitrost svetlobe je najvišja hitrost v naravi, zato informacije po svetu ne morejo potovati hitreje. Za komunikacijo na velike razdalje zato pogosto uporabljamo optične kable, po katerih lahko s svetlobnimi signali hitro in zanesljivo pretakamo velike količine podatkov. Čeprav je hitrost svetlobe zelo velika, pa ni neskončna in nam lahko v določenih situacijah vseeno predstavlja omejitev. Tak primer so robotske operacije na daljavo. Pri njih naj časovni zamik med operaterjevim pritiskom na gumb in premikom oddaljenega robota ne bi bil daljši od 10 ms. Izračunajmo največjo razdaljo med kirurško dvorano in oddaljenim operaterjem, ki bi še omogočala zahtevani odzivni čas.

Najprej izračunajmo hitrost potovanja signalov po optičnem kablu. Lomni količnik v kabljih je približno 1,5, zato je hitrost svetlobe po optiki približno

$$c = \frac{c_0}{1,5} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,5} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s} .$$

V času 10 ms signal po optiki torej prepotuje

$$s = c \cdot t = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 10^{-3} \text{ s} = 2 \cdot 10^6 \text{ m} = 2000 \text{ km} .$$

Če bi signal potoval po zraku (npr. po omrežju 5G), bi bil sicer za 50 % hitrejši, a še vedno ne dovolj hiter, da bi lahko zanesljivo opravljali oddaljene operacije iz enega kontinenta na drugega. Še toliko težja bo izvedba oddaljenih operacij z Zemlje na kolonijo na Marsu ...

Lomni količnik v določeni snovi ponavadi ni enak za vse valovne dolžine

elektromagnetnega valovanja. Ta pojav imenujemo *disperzija*. V steklu je na primer lomni količnik za vidno svetlobo največji za modro in najmanjši za rdečo. V steklu se tako različne barve lomijo pod različnimi koti in zato se bela svetloba na stekleni prizmi razlomi v mavrico (pri tem se najbolj lomi modra svetloba). Disperzija je prisotna tudi v lečah (tako v očesnih kot tudi pri mikroskopu) zato lomnost leč ni nujno enaka za vse barve (pri lečah ta pojav imenujemo *kromatična aberacija*).

26.2 Kvantna slika

Čeprav lahko elektromagnetno valovanje razumemo kot zvezen proces, pa lahko izmenjava energije med elektromagnetnim valovanjem in snovjo poteka le v obliki končno velikih »paketov energije« (kvantov) — *fotonov*. Fotoni elektromagnetnega valovanja s frekvenco ν imajo energijo

$$W_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad (26.2)$$

kjer je Planckova konstanta $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Js (ker fotone pogosto označujemo s simbolom γ , smo energijo fotona zapisali z W_γ). Elektromagnetno valovanje je torej po eni strani zvezen proces (valovanje), po drugi pa si lahko predstavljamo, da ga sestavljajo delci fotoni, ki so energijski delci brez mase in se gibljejo s svetlobno hitrostjo.

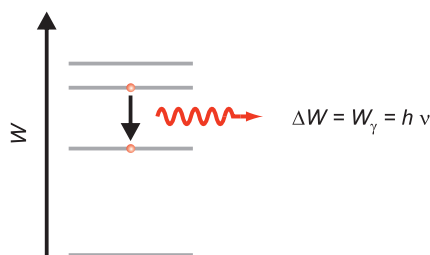
Iz zgornje enačbe vidimo, da imajo fotoni tem večjo energijo, čim večja je frekvenca oz. manjša je valovna dolžina elektromagnetnega valovanja. Pri določanju energije fotonov nam pogosto pride prav drugi zapis v zgornji enačbi, iz katerega lahko izračunamo energijo fotona valovanja z valovno dolžino λ . Če si zapomnimo vrednost produkta $hc = 1240$ eV nm, lahko npr. hitro izračunamo energijo fotona valovanja z $\lambda = 10$ nm: $W = \frac{1240 \text{ eV nm}}{10 \text{ nm}} = 124$ eV. Tipične energije fotonov so predstavljene v tabeli 26.1.

Prehodi med različnimi energijskimi stanji v atomih in molekulah so kvantizirani, se pravi da so energijske razlike med različnimi stanji natanko določene. Ob prehodu iz višjega v nižje energijsko stanje tako molekula odda foton z energijo, ki je natanko enaka energijski razliki med stanjema (sl. 26.2). Velja tudi obratno – prehod v višje energijsko stanje in absorpcija fotona sta mogoča le, če ima foton natanko ustrezno energijo. V splošnem je energija molekule lahko spravljen v njeni rotaciji, njenem nihanju in pa v različnih stanjih elektronov v orbitalah, pri čemer je za prehode med rotacijskimi stanji potrebno

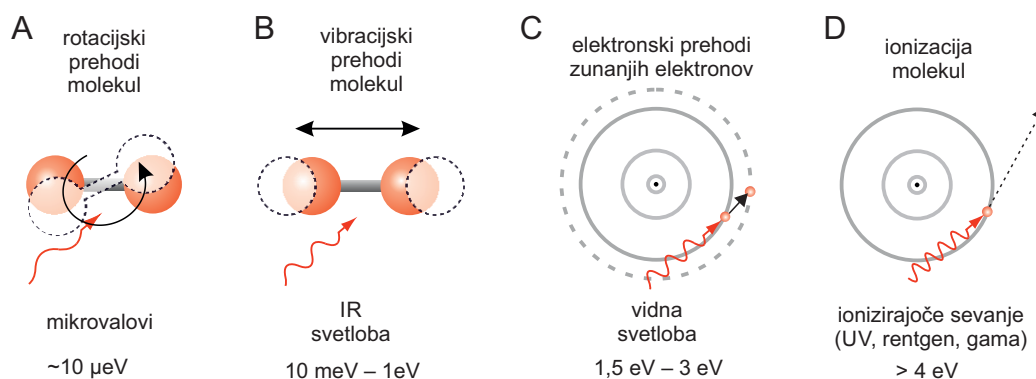
najmanj energije, za prehode med elektronskimi pa največ (sl. 26.3A-C). Prehodi med rotacijskimi stanji so tako povezani z absorpcijo oz. oddajanjem mikrovalov, prehodi med vibracijskim stanji z infrardečo svetlobo, elektronski prehodi v zunanjih atomskih lupinah pa z vidno svetlobo.

Za žive sisteme je zelo pomemben še en tip interakcije elektromagnetnega valovanja s snovjo – če v molekulo prileti foton z dovolj veliko energijo, jo lahko ionizira, tj. molekuli odtrga elektron in jo spremeni v pozitiven ion (sl. 26.3D). Ionizirane molekule (pravimo jim tudi molekule s prostimi radikali) so kemijsko zelo reaktivne in lahko v celici povzročijo veliko škode, kar je lahko še posebej usodno, če se poškoduje molekula DNK in pride do mutacije, ki povzroči rakavo obolenje. Tipične ionizacijske energije atomov in molekul so reda velikosti nekaj eV, zato imajo za njihovo ionizacijo dovolj energije le del ultravijolične svetlobe, rentgenski žarki in žarki gama (tabela 26.1). Tem valovanjem tako pravimo tudi *ionizirajoča sevanja*. Po drugi strani so radijski valovi in mikrovalovi (torej tudi sevanje mobilnih telefonov) neionizirajoče sevanje, saj je energija fotonov pri teh valovanjih veliko premajhna za ionizacijo.

Slika 26.2: Shematični prikaz prehoda atoma iz višjega v nižje vzbujeno stanje. Atom pri prehodu v nižje energijsko stanje izseva foton z energijo, ki je enaka razliki energij obeh stanj. Podobno velja tudi obratno: atom se lahko v višje vzbujeno stanje vzbudi z absorpcijo fotona ustrezne energije.



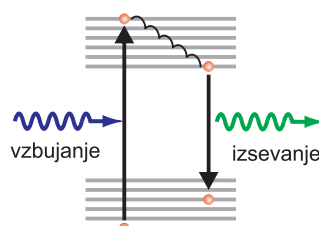
Vračanje (relaksacija) molekul iz vzbujenih stanj v stanja z nižjo energijo lahko poteka tudi brez oddajanja fotonov. Razlika energije med stanji se v tem primeru pretvori na primer v vibracijsko energijo molekule. Pogosto srečamo situacijo, ko se molekula v višje elektronsko stanje vzbudi z absorpcijo fotona, se nato delno relaksira preko različnih vmesnih stanj ter na koncu z oddajo fotona spet konča v osnovnem stanju (sl. 26.4). Oddan foton bo imel v takem primeru še vedno natanko določeno energijo, ki pa bo nekaj nižja od energije absorbiranega fotona (emisijška valovna dolžina bo torej malo večja od absorpcijske). Če proces relaksacije poteče hitro (v času nekaj 10 ns), ga imenujemo *fluorescenca*, če pa relaksacija poteka počasi (v času od nekaj



Slika 26.3: Shematični prikaz štirih posledic absorpcije fotona v snovi. (A) Najmanj energije je potrebno za povečanje hitrosti vrtenja molekul – to lahko povzročijo že mikrovalovi z energijo fotonov nekaj $10 \mu\text{eV}$. (B) Nekaj več energije je potrebno za vzbujanje nihanja molekul - to lahko povzročajo fotoni infrardeče svetlobe, ki imajo energijo od nekaj 10 meV do 1 eV . (C) Fotoni vidne svetlobe povzročajo elektronske prehode zunanjih elektronov v molekulah. (D) Če v molekulo prileti foton z energijo večjo od nekaj eV , ji lahko izbije elektron iz zunanje lupine in jo s tem ionizira, tj. spremeni v ion.

ms do nekaj ur) govorimo o *fosforescenci*. Proces fluorescence nam pride prav pri vizualizaciji celičnih gradnikov - če na primer na določen protein kemijsko vežemo fluorescenčno molekulo («označevalec»), ter nato celico osvetlimo z ustrezno eksitacijsko svetlobo, bodo označeni proteini nazaj svetili z ustrezno emisijsko svetlobo, kar nam bo omogočilo, da jih zaznamo.

Slika 26.4: Shematični prikaz pojava fluorescence. Z absorpcijo fotona se molekula vzbudi v višje stanje, nato del energije izgubi s prehodi preko različnih vmesnih stanj, na koncu pa se v osnovno stanje vrne spet z izsevanjem fotona. Izsevan foton ima manjšo energijo kot absorbiran.



26.3 Termično sevanje

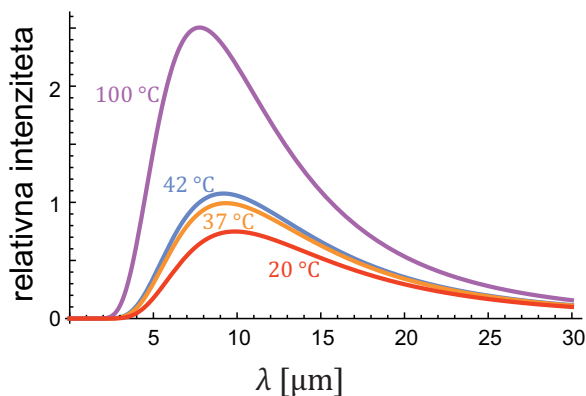
Ko se atomi v snovi zaradi svojega termičnega gibanja zadevajo med seboj, se vzbujajo v vzbujena energijska stanja in nato med vračanjem v nižja energijska stanja del energije oddajo tudi v obliki elektromagnetnega sevanja. Površine toplih teles tako oddajajo elektromagnetno sevanje, ki ga imenujemo *termično sevanje*. Občutimo ga na primer kot »toploto«, ki jo z roko čutimo tik nad vročo kuhinjsko ploščo ali ko se grejemo ob tabornem ognju.

Spekter termičnega sevanja je zvezen in ima obliko hriba, položaj vrha spektra pa je odvisen od temperature telesa (sl. 26.5). Višja kot je temperatura telesa, pri krajših valovnih dolžinah je vrh. Pri normalnih temperaturah okolja je večina energije termičnega sevanja zbrana v infrardečem spektru. Celotno gostoto energijskega toka termičnega sevanja, ki jo oddaja površina s temperaturo T , pove *Stefanov zakon*:

$$j = \sigma T^4, \quad (26.3)$$

kjer je σ Stefanova konstanta, $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. Človeško telo je ponavadi toplejše od okolice, zato oddaja več sevanja kot ga od okolice sprejema — če je temperatura okolice 20°C , človeško telo zaradi termičnega sevanja izgublja približno 100 J energije na sekundo. Ponesrečence zato pred podhladitvijo zaščitijo tudi z aluminijasto folijo, ki je sicer tanka, a ne prepušča infrardečega sevanja.

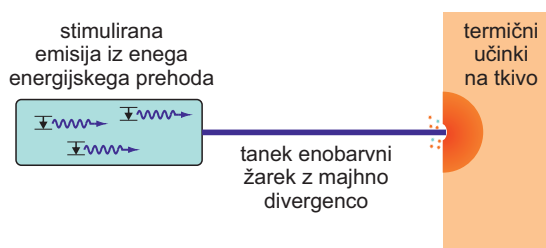
Slika 26.5: Spekter termičnega sevanja, ki ga seva površina telesa pri treh različnih temperaturah. Ta spekter imenujemo tudi *spekter črnega telesa*, saj strogo vzeto natančno velja le za telesa, ki ne odbijajo nobenega vpadnega sevanja (tj. za »črna telesa«). Ostala telesa sevajo le približno tak spekter.



26.4 Laser

Laser je izvor svetlobe z zelo uporabnimi lastnostmi. Izvor svetlobe pri laserju je snov v optičnem resonatorju, ki jo vzbuja v točno določeno vzbujeno stanje in ki pri prehodu v osnovno stanje tako oddaja fotone svetlobe točno določene energije, tj. svetlobo s točno določeno valovno dolžino. Pri tem prihaja do stimulirane emisije – že oddani fotoni v snovi spodbujajo nove emisije. Laserska svetloba ima zato lahko veliko jakost in je koherentna. Poleg tega laser svetlobo oddaja v ozkem snopu vzporednih žarkov. Laser se po tem bistveno razlikuje od žarnic, ki svetlobo vedno oddajajo na vse strani, v njihovi svetlobi pa so vse valovne dolžine (klasične žarnice več kot 90 % energije oddajajo v infrardečem spektru, kar zaznamo kot toploto). Gostota svetlobnega toka v laserskem žarku je lahko tako bistveno večja kot pri klasičnih svetilih.

Slika 26.6: Laser je izvor enobarvne svetlobe, ki oddaja tanek žarek z majhno divergenco. V medicini se največ uporablja termične učinke laserske svetlobe – lasersko svetlobo z izbrano valovno dolžino usmerimo natančno v želeno tkivo, kjer se svetloba absorbira, tkivo segreje in ga tako izpari oz. preoblikuje.



Valovna dolžina laserske svetlobe je odvisna od izbire snovi, ki je v laserju. V medicini je tako v zadnjem času na tržišču velika izbira različnih laserjev z različnimi valovnimi dolžinami. Med tipične primere sodijo laserji na osnovi argona ($\lambda = 488 \text{ nm}$), Nd:YAG (neodimij:itrij-aluminijev kristal, $\lambda = 1064 \text{ nm}$), ogljikovega dioksida ($\lambda = 10,6 \mu\text{m}$), UV svetlobo pa oddajajo različni t. i. excimer laserji (excimer = excited dimer, vzbujen dimer žlahtnega in reaktivnega plina, npr. ksenonov fluorid).

Energija fotonov vidne svetlobe je premajhna, da bi svetloba lahko povzročila ionizacijo snovi. Laserska svetloba tako na tkivo deluje preko svojih termičnih učinkov — absorpcija svetlobe v tkivu povzroči segrevanje tkiva. Če je to segrevanje dovolj veliko, lahko tkivo celo izpari, kar lahko uporabljamo za preoblikovanje tkiva. Tako na primer laser uporabljamo za odstranjevanje različnih kožnih struktur ali pa za preoblikovanje roženice na očesni leči, s čí-

mer lahko zmanjšamo kratkovidnost. Valovno dolžino laserja izberemo glede na tkivo, ki ga želimo preoblikovati – za preoblikovanje roženice npr. uporabimo UV laser, ki se v roženici dobro absorbira.

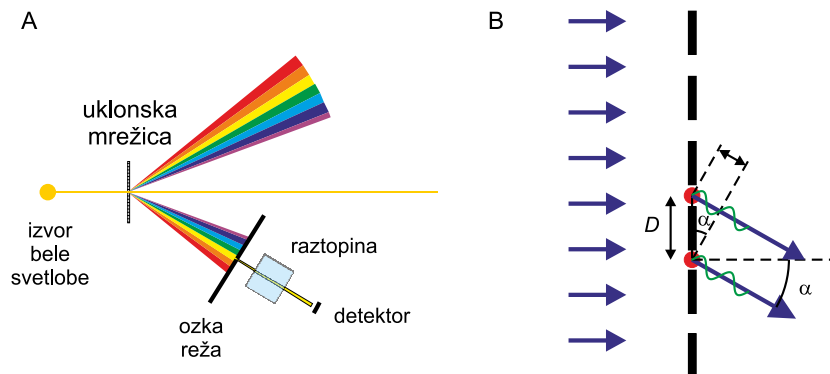
26.5 Svetlobna spektroskopija

Vidna svetloba je elektromagnetno valovanje z valovnimi dolžinami od približno 400 nm do približno 750 nm. V mavrici vidne svetlobe si barve sledijo približno tako: vijoličasta, modra, zelena, rumena, oranžna in rdeča, s tem da meje med barvami niso ostre. Modra barva ima najkrajšo valovno dolžino, rdeča pa najdaljšo. V mavrici ni bele barve, saj bela svetloba nima »svoje« valovne dolžine, ampak je mešanica vseh mavričnih barv.

Absorpcijski koeficient (μ , en. 23.6) snovi v splošnem ni enak pri vseh valovnih dolžinah. V raztopinah je poleg tega absorpcijski koeficient odvisen od koncentracije snovi v raztopini, pri majhnih koncentracijah je ta odvisnost kar sorazmerna. To s pridom izkoriščajo različne *spektroskopske metode*, pri katerih na osnovi absorpcijskih lastnosti raztopin določajo vsebnost različnih snovi v njih. Pri tem poleg absorpcijskega koeficienta pogosto vpeljejo molarne absorpcijske koeficiente, ki podaja absorpcijski koeficient eno molarne raztopine snovi.

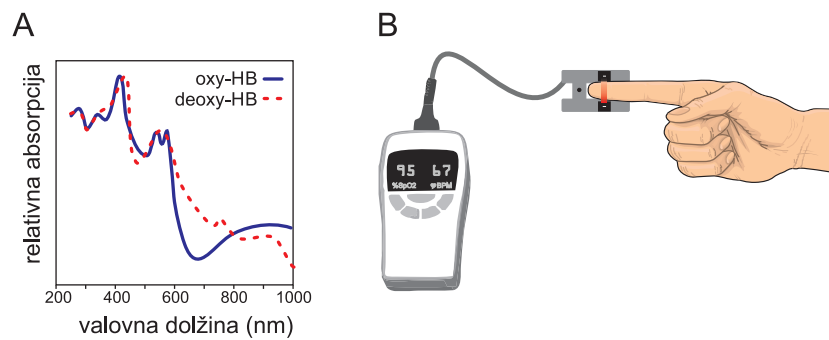
Osnovni spektroskopski inštrument je spektrofotometer (sl. 26.7A), pri katerem belo svetlobo najprej razklonimo v mavrico, nato pa s pomočjo detektorja izmerimo gostoto energijskega toka, ki prihaja skozi raztopino pri različnih valovnih dolžinah. Ko te meritve primerjamo s spektrom svetlobe, ki ga izmerimo brez raztopine, dobimo absorpcijski spekter raztopine, ki nam pove absorpcijski koeficient raztopine v odvisnosti valovne dolžine svetlobe. Pri spektrofotometrih ponavadi za razklon svetlobe uporabimo *uklonsko mrežico* (in ne npr. steklene prizme). Uklonska mrežica je mrežica z vzporednimi režami, ki so med seboj oddaljene približno za valovno dolžino vidne svetlobe (sl. 26.7B). Če na uklonsko mrežico padajo vzporedni žarki, vsaka od rež deluje kot točkast izvor z enako fazo. Valovanja iz sosednjih rež med seboj interferirajo in se ojačijo le v določenih smereh, ki so odvisne od valovne dolžine (glejte poglavje o interferenci, en. 23.9). Če na uklonsko mrežico pade bela svetloba, se tako na drugi strani razkloni v mavrico.

Pri bioloških makromolekulah je spektralna odvisnost absorpcijskega koeficienta povezana s stanjem molekule (s konformacijo molekule, z vezavo ligandov ...). Na primer: v hemoglobinu, na katerega je vezan kisik, se absorbira manj rdeče barve kot v hemoglobinu brez kisika (sl. 26.8 levo). S kisikom na-



Slika 26.7: (A) Shematični prikaz spektrofotometra. (B) Povečan prikaz uklonske mrežice. Razdalja med režami uklonske mrežice D je tipično 1000 nm. Če na uklonsko mrežico padajo vzporedni žarki, vsaka od rež deluje kot točkast izvor z enako fazo. Valovanja iz sosednjih rež med seboj interferirajo in se ojačijo le v določenih smereh, ki so odvisne od valovne dolžine. Bela svetloba se na uklonski mrežici zato razkloni v mavrico.

sičena kri ima zato živo rdečo barvo. To lastnost uporabimo pri kliničnem inštrumentu imenovanem *pulzni oksimeter* (sl. 26.8 desno), pri katerem na osnovi primerjave absorpcije svetlobe z valovnima dolžinama 660 nm in 910 nm izmerijo oksigenacijo krvi (tj. delež hemoglobina z vezanim kisikom).



Slika 26.8: A) Absorpcijski spekter oksihemoglobina (črtkana črta) in deoksihemoglobina (pikčasto). V hemoglobinu s kisikom se absorbira manj rdeče barve, zato je s kisikom nasičena kri živo rdeče barve. B) Shematični prikaz delovanja pulznega oksimetra. S pulznim oksimetrom na osnovi meritve absorpcije svetlobe v tkivu določimo nasičenost krvi s kisikom. Pogosto ga kot nekakšno ščipalko pripnemo na pacientov prst. Najpreprostejši pulzni oksimetri merijo absorpcijo le pri dveh valovnih dolžinah, pri 660 nm in 910 nm, kjer se absorpciji oksihemoglobina in deoksihemoglobina najbolj razlikujeta.

Poglavje 27

Optika

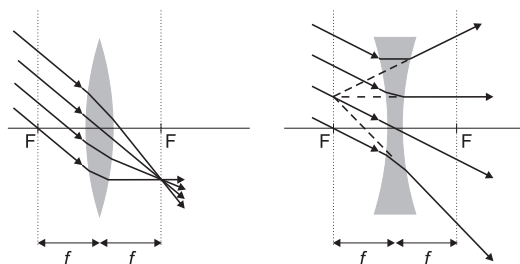
Optični inštrumenti nam pomagajo videti stvari, ki jih s prostim očesom ne razločimo, zato ni presenetljivo, da je optika z znanostjo tesno povezana že vse od časov, ko je Galileo Galilei skozi teleskop pogledal na Luno, ali ko je Antony van Leeuwenhoek skozi svoj preprost mikroskop prvič opazil bakterije in krvne celice. Čeprav je zgodovinsko optika najbolj povezana s svetlobo, pa danes vemo, da optične zakonitosti veljajo tudi pri drugih valovanjih, zato nas izrazi kot so «ultrazvočna leča» ali «magnetna leča v elektronskem mikroskopu» ne bodo presenetili. V tem poglavju si bomo ogledali le najbolj osnovne elemente svetlobne optike, ki nam bodo pomagali razmeti delovanje leč, mikroskopa in očesa.

27.1 Leče

Leče so osnovni optični element večine optičnih naprav. Izdelane so iz prozornih materialov, ki imajo drugačen lomni količnik od okolice, npr. iz stekla ali iz prozorne plastike, zato se svetlobni žarki na njih lomijo. Njihova osnovna lastnost je, da imajo ukrivljeno površino, zato snop vzporednih žarkov svetlobe zberejo ali razpršijo. Zbiralne leče so ponavadi konveksne oblike, razpršilne leče pa so konkavne¹ (sl. 27.1). Površine leč imajo ponavadi krogelno obliko, njihovo simetrijsko os pa imenujemo *optična os*. V nadaljevanju se bomo omejili na opis *tankih leč*, katerih debelina je veliko manjša od krogelnih radijev površin. Poleg tega bo opis strogo vzeto veljal le za žarke, ki so blizu optične osi in na lečo ne padajo pod prevelikim kotom (t. i. paraksialni približek).

¹Da bi si lažje zapomnili razliko, smo se na srednji šoli učili, da v *konkavno* lečo lahko nalijemo kavo, v *konveksno* pa ne.

Zbiralna leča snop vzporednih žarkov zbere v eni točki, ki leži v goriščni ravnini leče (sl. 27.1). Presečišče optične osi in goriščne ravnine se imenuje *gorišče*, v njem se zberejo žarki, ki so vzporedni optični osi. Gorišče označimo z F , razdaljo od gorišča do leče pa z f . Razpršilna leča snop vzporednih žarkov lomi tako, kot da bi izhajali iz točke v goriščni ravnini pred lečo. Po dogovoru ima zbiralna leča pozitivno, razpršilna pa negativno goriščno razdaljo. Če je na obeh straneh leče snov z enakim lomnim količnikom, sta tudi goriščni razdalji na obeh straneh enaki in leča deluje enako v obeh smereh. Obratno vrednost goriščne razdalje leče ($1/f$) imenujemo *lomnost* leče. Lomnost je torej osnovna lastnost leče, ki pove kako »močno« leča zbira žarke, zbiralne leče imajo pozitivno lomnost, razpršilne pa negativno. Lomnost leče je sorazmerna razliki lomnih količnikov v leči in okolici ter ukrivljenosti obeh površin leče. Enota za lomnost je *dioptrija*, označimo pa jo z D ; velja $1\text{ D} = 1\text{ m}^{-1}$.

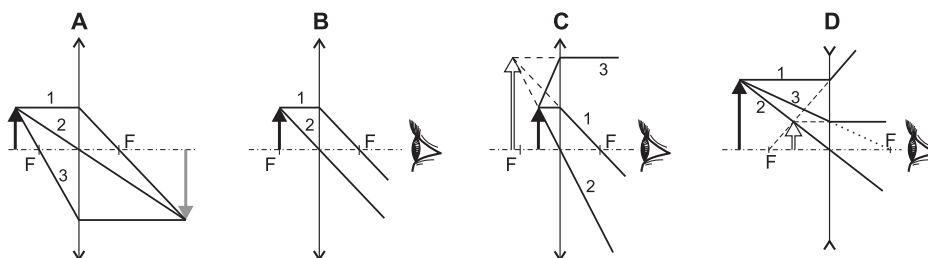


Slika 27.1: Zbiralna leča (levo) snop vzporednih žarkov zbere v goriščni ravnini, razpršilna (desno) pa žarke razprši, kot da bi prihajali iz ene točke goriščne ravnine pred njo. Žarek, ki gre skozi središče leče, se na leči sploh ne lomi. Goriščna ravnina je pravokotna na optično os, njena oddaljenost od leče pa je enaka goriščni razdalji leče. Goriščna razdalja leče je označena z f , gorišči leče pa z F .

Leča predmet preslika v njegovo sliko. Lego nastanka slike in njeno velikost lahko določimo geometrijsko s pomočjo treh t. i. značilnih žarkov, ki izhajajo iz ene točke predmeta (sl.27.2). Pri zbiralni leči velja:

1. žarek, ki je pred lečo vzporeden optični osi, gre na drugi strani skozi gorišče leče
2. žarku, ki gre skozi središče leče, se na leči smer ne spremeni
3. žarek, ki gre pred lečo skozi gorišče, je po prehodu skozi lečo vzporeden optični osi.

Če je predmet pred goriščem zbiralne leče, se žarki iz ene točke predmeta na drugi strani leče spet sekajo in zato tam nastane *realna* slika predmeta, ki pa je obrnjena (sl. 27.2A). Realno sliko lahko opazujemo na zaslonu, ki ga postavimo na mesto nastanka slike, lahko pa jo s pomočjo drugih leč preslikamo še naprej, podobno kot bi preslikali realen predmet.



Slika 27.2: Prikaz treh značilnih žarkov, ki izhajajo iz ene točke predmeta, v različnih primerih. Realna slika predmeta je označena sivo, navidezna pa belo. Realno sliko lahko npr. vidimo na zaslonu, ki ga postavimo na mesto slike, navidezno pa vidimo, če z očesom pogledamo skozi lečo. A) Zbiralna leča, ko je predmet pred goriščem. Slika predmeta je realna. B) Zbiralna leča, predmet je v gorišču. Na drugi strani leče so žarki vzporedni in pravimo, da slika nastane v neskončnosti. C) Zbiralna leča, predmet je med goriščem in lečo. Slika predmeta je navidezna, vidimo jo, če pogledamo skozi lečo. D) Razpršilna leča. Pri njej je slika vedno navidezna.

Če je predmet v gorišču zbiralne leče, so žarki iz ene točke predmeta na drugi strani vzporedni in pravimo, da leča predmet preslika v neskončnost (sl. 27.2B). Žarki z zelo oddaljenih predmetov se nam namreč zdijo praktično vzporedni. V takem primeru predmeta ne moremo projicirati na zaslon, lahko pa ga vidimo z očesom, saj očesna leča vzporedne žarke spet zbere v sliko na mrežnici.

Če pa je predmet med goriščem in zbiralno lečo (sl. 27.2C), so žarki iz ene točke predmeta na drugi strani leče razpršeni, kot da bi prihajali iz ene točke pred lečo. V tem primeru realna slika predmeta ne nastane, a pri pogledu skozi lečo proti predmetu vidimo *navidezno* sliko predmeta – če v tem primeru gledamo skozi zbiralno lečo na predmet, nam leča predmet navidezno prestavi na večjo oddaljenost.

Pri razpršilni leči vedno nastane navidezna slika, ne glede na postavitev predmeta glede na lečo (sl.27.2D). Tudi pri konstrukciji slike razpršilne leče si pomagamo s tremi značilnimi žarki, le da sta tu vlogi gorišč zamenjani. Če pogledamo skozi razpršilno lečo, nam oddaljene predmete navidezno približa.

Lego in velikost slike predmeta lahko tudi izračunamo. Na skici poti žarkov skozi lečo lahko opazimo dva para med seboj podobnih trikotnikov (sl. 27.2A). Prvi par sta trikotnika med žarkom 2 in optično osjo, ki imata vrh v središču leče, drugi pa trikotnika med desnim delom žarka 1 in optično osjo z vrhom v desnem gorišču. Če oddaljenost predmeta od leče označimo z a , oddaljenost slike od leče z b , velikost predmeta z A ter velikost slike z B , iz prvega para trikotnikov sledita razmerji: $A : a = B : b$ iz drugega pa $A : f = B : b - f$. Ko te zveze preuredimo, pridemo do *enačbe leče*, ki povezuje oddaljenost predmeta in slike od leče ter goriščno razdaljo:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} . \quad (27.1)$$

Enačba leče velja tako za zbiralne kot tudi za razpršilne leče, upoštevati moramo le, da je goriščna razdalja razpršilnih leč negativna. Po dogovoru ima a vedno pozitiven predznak, b pa ima pozitiven predznak, če je slika realna (in je torej na drugi strani leče kot predmet) ter negativnega, če je slika navidezna (in je torej na isti strani leče kot predmet).

Velikost slike predmeta je odvisna od oddaljenosti predmeta od leče. Bližje kot je predmet gorišču zbiralne leče, večja in bolj oddaljena je realna slika (ko je predmet v gorišču, nastane slika v neskončnosti). S pomočjo zgoraj opisanih podobnih trikotnikov lahko izpeljemo razmerje med velikostjo slike in velikostjo predmeta:

$$N = \frac{B}{A} = \frac{b}{a} = \frac{e}{f} , \quad (27.2)$$

kjer je e razdalja med goriščem leče in sliko predmeta, $e = b - f$. S pomočjo enačbe leče ugotovimo tudi, da je realna slika, preslikana z zbiralno lečo, povečana le, če je oddaljenost predmeta od leče med f in $2f$.

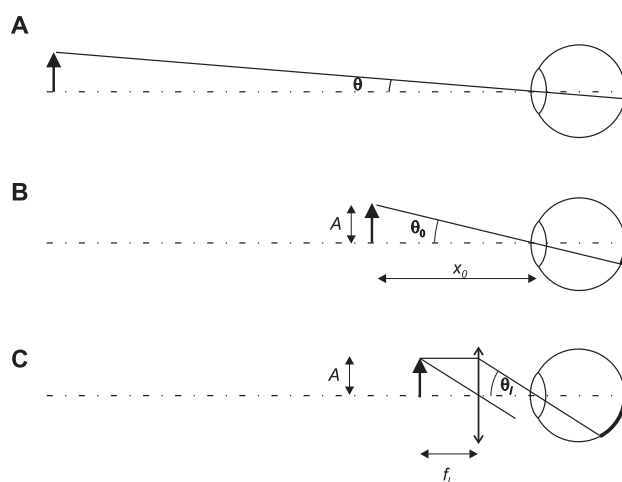
Poleg zgornjih enačb velja za tanke leče tudi preprosta zveza za skupno lomnost sistema dveh leč, ki sta ena tik zraven druge. Rezultat navedimo brez izpeljave:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} . \quad (27.3)$$

Če več leč postavimo skupaj, se njihove lomnosti torej seštevajo.

27.2 Povečevalno steklo

Najpreprostejši optični inštrument, ki nam pomaga pri opazovanju majhnih predmetov, je *povečevalno steklo*. Poglejmo si, kako deluje. Navidezna velikost predmetov, ki jo zaznavamo s prostimi očmi, ni odvisna le od njihove dejanske velikosti ampak tudi od njihove oddaljenosti. Navidezna velikost predmetov je torej odvisna od *zornega kota*, pod katerim vidimo predmet (sl. 27.3). Ponavadi tudi povečavo optičnih inštrumentov definiramo glede na to, kako nam povečajo zorni kot pod katerim gledamo predmet.



Slika 27.3: (A) Velikost predmeta, ki jo vidimo z očesom, je odvisna od zornega kota θ , pod katerim vidimo predmet. Bližje kot je predmet, večji je zorni kot in večja je navidezna velikost predmeta (tj. večja je slika na mrežnici). (B) Predmet si navidezno povečamo s približevanjem očesu, a ga dosti bližje od normalne zorne razdalje (x_0) ne moremo izostriti. Povečave optičnih inštrumentov so zato definirane glede na navidezno velikost predmeta na normalni zorni razdalji. (C) Pri gledanju s povečevalnim steklom vidimo predmet pod zornim kotom θ_l , ker pa so žarki iz ene točke predmeta vzporedni, oko prilagodimo gledanju na daleč in z ostrenjem predmeta nimamo težav. Oko je na vseh treh slikah prikazano shematično.

Ko predmet gledamo s prostim očesom, si ga lahko navidezno povečamo tako, da ga približamo očesu. Vendar pa s prostim očesom ne moremo izostriti predmetov, ki so preblizu očesa (o tem več v nadaljevanju). V takem primeru si lahko pomagamo s povečevalnim steklom, ki ni nič drugega kot zbiralna leča z dovolj veliko lomnostjo. Če postavimo med predmet in oko povečevalno steklo, vidimo navidezno sliko predmeta, ki pa je od našega očesa bolj oddaljena in jo bomo zato lažje izostrili (sl. 27.2B in 27.2C). Ponavadi predmet postavi-

mo kar v gorišče, oko pa tik za povečevalno steklo – na tak način so žarki z ene točke predmeta na drugi strani leče vzporedni in gledamo lahko s sproščenim očesom (sl. 27.2B). Povečevalno steklo nam torej predmeta pravzaprav ne »poveča«, ampak nam ga le pomaga izostriti pri zelo majhni oddaljenosti od očesa.

Povečavo povečevalnega stekla definiramo glede na velikost predmeta, ki jo vidimo pri *normalni zorni razdalji* x_0 , katere vrednost je določena na 25 cm. Ta razdalja namreč približno ustreza najmanjši razdalji, na kateri lahko predmete s prostim očesom še izostrimo. Z enačbo se povečavo definira kot razmerje tangensa zornega kota θ_l , pod katerim vidimo predmet skozi povečevalno steklo, ter tangensa zornega kota θ_0 , pod katerim vidimo predmet, ki je na normalni zorni razdalji: $N = \tan \theta_l / \tan \theta_0$. V primeru, ko predmet postavimo ravno v gorišče leče, je zorni kot, pod katerim skozi lečo vidimo predmet enak $\tan \theta_l = A/f_l$ (sl. 27.3C), pri gledanju s prostim očesom na normalni zorni razdalji pa velja $\tan \theta_0 = A/x_0$ (sl. 27.3B). V tem primeru je torej povečava povečevalnega stekla enaka

$$N = \frac{\tan \theta_l}{\tan \theta_0} = \frac{x_0}{f_l}. \quad (27.4)$$

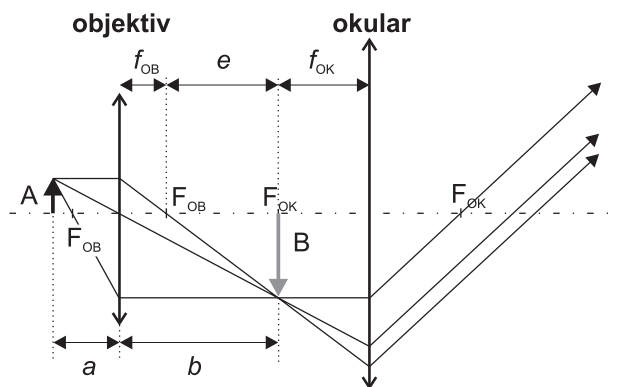
Iz enačbe 27.4 razberemo, da nam povečevalno steklo pomaga le, če je njegova goriščna razdalja manjša od normalne zorne razdalje. Tipične povečave povečevalnih stekel so do približno 10x.

Povečevalno steklo včasih imenujemo tudi *lupa*. Obstajajo pa tudi lupe, ki so izdelane iz več kot ene leče in dosegaajo tudi večje povečave — take so npr. lupe, ki jih kirurgi nosijo na očalih med operacijami.

27.3 Mikroskop

Mikroskop je inštrument za opazovanje mikroskopskih predmetov. Obstaja več različnih vrst mikroskopov, van Leeuwenhoekov »mikroskop« je bil na primer le povečevalno steklo z zelo majhno goriščno razdaljo. Tu si bomo ogledali delovanje najbolj preprostega sestavljenega mikroskopa, ki ima dve zbiralni leči: objektiv in okular. Pri takem mikroskopu predmet postavimo malo pred gorišče objektiva. Objektiv predmet tako preslika v realno in povečano sliko, ki jo nato povečamo še z okularjem, ki ga uporabimo kot povečevalno steklo. Okular je torej postavljen tako, da njegovo gorišče sovpada s sliko predmeta, ki jo preslika objektiv. Žarki, ki izhajajo iz ene točke pred-

meta, so pri izstopu iz okularja vzporedni, zato so naše oči pri gledanju skozi mikroskop lahko sproščene.



Slika 27.4: Prikaz poti treh značilnih žarkov skozi mikroskop.

Iz slike 27.4 razberemo, da je tangens zornega kota, pod katerim vidimo predmet skozi mikroskop, enak $\tan \theta = B/f_{OK}$, tako da je povečava mikroskopa enaka

$$N = \frac{\tan \theta}{\tan \theta_0} = \frac{B/f_{OK}}{A/x_0} = \frac{e}{f_{OB}} \frac{x_0}{f_{OK}}, \quad (27.5)$$

kjer smo upoštevali razmerje $B : A = e : f_{OB}$ (en 27.2). Po pričakovanju je povečava mikroskopa enaka produktu povečave objektiva in povečave okularja.

S povečevanjem lomnosti objektiva bi njegovo povečavo lahko povečevali v nedogled. Vendar pa se izkaže, da nas pri povečevanju majhnih predmetov omejuje uklon svetlobe na robovih leče. Zaradi uklanjanja žarkov se točka skozi lečo ne preslika v točko, temveč v majhno okroglo liso. Če sta dve točki zelo blizu skupaj, se bosta njuni sliki zlili skupaj. Najmanjšo razdaljo med točkama, ki ju objektiv še preslika v dve ločeni lisi, imenujemo *ločljivost* objektiva. Iz poglavja o uklonu se spomnimo, da je uklon odvisen od razmerja med valovno dolžino in velikostjo odprtine. Daljši račun pokaže, da je ločljivost d enaka

$$d = \frac{0,61\lambda}{NA}. \quad (27.6)$$

kjer je NA numerična apertura objektiva, λ pa valovna dolžina svetlobe, s katero opazujemo predmet. Numerična apertura je merilo za količino žarkov, ki jih zbere objektiv, in je definirana kot

$$NA = n \sin \alpha , \quad (27.7)$$

kjer je n lomni količnik snovi med predmetom in objektivom, α pa kot med optično osjo in veznico med goriščem ter robom objektiva. Večja kot je leča pri dani goriščni razdalji, večjo numerično aperturo ima. Numerična apertura je večja pri imerzijskih objektivih, pri katerih med predmetom in objektivom ni zraka ($n \approx 1$), temveč imerzijsko olje ($n \approx 1,4$). Ker je $\sin \alpha$ lahko največ ena, je največja mogoča NA pri najboljših imerzijskih objektivih približno 1,4. Tudi ločljivost najboljših objektivov tako ne more bistveno presegati valovne dolžine svetlobe λ , s katero opazujemo predmet.

27.4 Napake leč

Ves zgornji opis strogo vzeto velja le v limiti zelo tankih leč in žarkov, ki so vseskozi blizu optični osi. V praksi pa leče ne morejo biti neskončno tanke, pa tudi žarki na njih padajo pod večjimi koti. Izkaže se, da leč pravzaprav sploh ne znamo narediti tako, da bi v celoti ustrezale vsem zgornjim kriterijem. Pravimo, da imajo realne leče napake oz. aberacije. Vseh aberacij se je nemogoče znebiti, zato je ena od glavnih umetnosti izdelave optičnih inštrumentov zmanjševanje tistih aberacij, ki so za uporabo določenega inštrumenta najbolj moteče. Za ilustracijo si oglejmo le tri najpreprostejše vrste aberacije leč.

Sferična aberacija. Zaradi te napake se vsi vzporedni žarki ne sekajo v isti točki (bolj kot so žarki oddaljeni od optične osi, bliže leči se sekajo). To napako se da delno popraviti z asferičnim oblikovanjem površine leče.

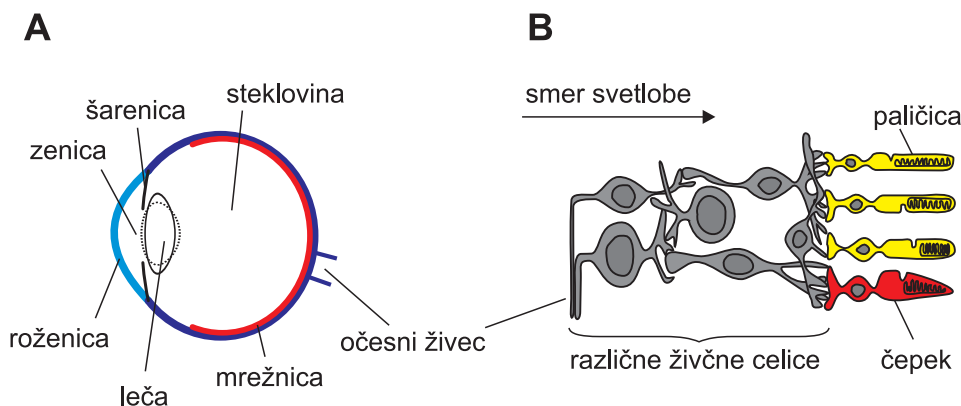
Astigmatizem. Pri astigmatizmu leča ni povsem simetrična okoli svoje geometrijske osi in je zaradi tega npr. lomnost leče v navpični smeri drugačna kot v vodoravni smeri (površina leče npr. ni krogelna ampak elipsoidna). Žarki s predmetov, ki potujejo skozi navpičnico leče, se tako ne sekajo v isti točki kot žarki, ki potujejo skozi vodoravnico leče. Če se ta napaka pojavi v očesni leči, jo odpravimo z očali, katerih stekla so ravno tako zbrušena neosnosimetrično.

Kromatična aberacija. V vsaki prozorni snovi je večja ali manjša disperzija, tj., hitrost svetlobe in s tem lomni količnik sta za različne valovne dolžine različna. Lomnost leče za rdečo barvo je tako ponavadi malo drugačna od lomnosti leče za modro barvo, zato barvna slika predmeta skozi lečo ni povsem

ostra. Pri optičnih napravah je mogoče kromatično aberacijo omiliti s sestavljenimi lečami, ki so sestavljene iz stekel z različnimi lastnostmi (na eni leči se npr. bolj lomi modra barva na drugi leči pa rdeča). Pri dobrih mikroskopih sta tako objektiv in okular vedno sestavljena iz več leč.

27.5 Oko

Skozi dolga leta evolucije se je človeško oko prilagodilo gledanju v zelo različnih razmerah in se tako razvilo v enega najbolj izpopolnjenih optičnih inštrumentov. Tu si bomo ogledali le najosnovnejše lastnosti očesa. Glavni sestavni deli očesa so roženica in očesna leča, ki zbirata svetlobne žarke, ter mrežnica, v kateri so čutnice za svetlobo (sl. 27.5).



Slika 27.5: Shematični prikaz anatomije očesa. (A) Prerez očesa. Sproščena očesna leča je narisana s polno črto, leča med akomodacijo za gledanje na blizu pa pikčasto. (B) Prerez mrežnice. Celotna mrežnica je debela približno 0,2 mm, pri čemer so fotoreceptorji (paličice in čepki) v najgloblji plasti.

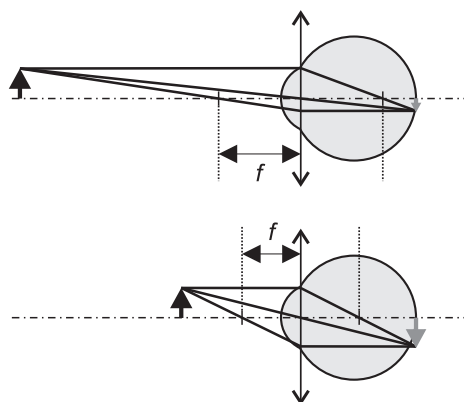
27.5.1 Optične lastnosti

V očesu se svetlobni žarki najprej lomijo na roženici in nato še na očesni leči. Roženica in očesna leča tako delujeta kot sistem dveh zbiralnih leč. Skupna lomnost očesa v sproščenem stanju je približno 60 D, od česar pa pravzaprav večji del odpade na roženico (40 D), na očesno lečo pa le približno 20 D. Očesa ne moremo povsem natančno opisati z enostavnim sistemom tankih leč, ki smo jih srečevali do sedaj (pri očesu npr. lomni količnik ni enak na obeh straneh leče, zato tudi goriščna razdalja na obeh straneh ni enaka), kljub vsemu

pa si pri razumevanju delovanja očesa pogosto pomagamo s preprostejšimi modeli, imenovanimi *reducirano oko*.

Predmete vidimo ostro, če na mrežnici nastane njihova ostra realna slika. Razdalja med očesno lečo in mrežnico je fiksna, zato oko različno oddaljene predmete izostri s prilagajanjem lomnosti očesne leče — pri gledanju zelo oddaljenih predmetov je potrebna manjša lomnost kot pri gledanju bližnjih predmetov (sl. 27.6). Iz enačbe leče (en. 27.1) namreč sledi, da se mora pri fiksni razdalji b z manjšanjem razdalje a manjšati tudi goriščna razdalja leče f . Lomnost očesne leče prilagajamo s pomočjo posebnih mišic: če so mišice sproščene, je lomnost očesne leče najmanjša in oko lahko izostri oddaljene predmete, če pa se mišice napnejo, povečajo ukrivljenost površin očesne leče ter s tem njeno lomnost in izostrimo lahko bližnje predmete. Ta proces se imenuje *akomodacija* očesa.

Slika 27.6: Shematični prikaz povečevanja lomnosti očesne leče pri ostrenju bližnjih predmetov (akomodaciji). Ko ostrimo zelo oddaljene predmete (zgoraj), je lomnost očesa najmanjša (goriščna razdalja očesa f je največja). Pri ostrenju bližnjih predmetov (spodaj) se lomnost očesne leče poveča (zmanjša se goriščna razdalja očesa f). Očesne mišice so pri gledanju na daleč sproščene, med akomodacijo pa napete.



27.5.2 Mrežnica

V mrežnici so fotoreceptorske celice dveh vrst: čepki so prilagojeni za gledanje pri dnevni svetlobi (t. i. fotopično gledanje), paličice pa za gledanje v mraku in temi (skotopično gledanje). Ko se foton svetlobe absorbira v molekuli fotopigmenta, ki je v fotoreceptorjih, povzroči njeno konformacijsko spremembo, kar sproži zapleten biokemijski proces, ki vodi do nastanka živčnega signala. Živčni signali nato potujejo po očesnem živcu v možgane, pri čemer pa se lahko živčni signali več sosednjih fotoreceptorskih celic tudi združijo in delno obdelajo že v mrežnici.

V paličicah je fotopigment ene vrste (rodopsin), zato s paličicami ne moremo zaznavati barv (v mraku barve slabo razlikujemo), čepki pa so treh vrst in z njimi lahko zaznavamo različne barve.

Postavitev fotoreceptorskih celic v mrežnici je na prvi pogled neučinkovita, saj so oživčene na strani, s katere nanje pada svetloba, in se zato del svetlobe absorbira v živčnih vlaknih še preden pride do svetlobnih čutnic (sl. 27.5B). Vendar pa raziskave kažejo, da imajo nekatere celice v mrežnici višji lomni koeficient od okolice in tako delujejo kot svetlobni vodniki, ki svetlobo vodijo skozi mrežnico do fotoreceptorskih celic.

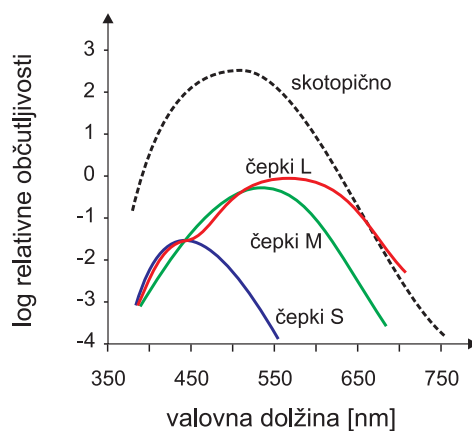
27.5.3 Svetlobna občutljivost

Oko se izredno dobro prilagaja različno močni svetlobi, saj razločuje gostoto svetlobnega toka v razponu približno 10^{10} W/m² (od približno 10^{-6} W/m² pa do 10^4 W/m²). Vendar pa oko le zelo majhen del tega prilagajanja doseže s spreminjanjem premera zenice. Premer zenice se lahko spreminja od približno 3 mm do 9 mm, s čimer lahko količino svetlobe uravnavamo le za približno faktor 10 (če se premer trikrat poveča, se površina poveča devetkrat). Vse ostalo prilagajanje različno močni svetlobi se doseže s prilagajanjem biokemijskih procesov v fotoreceptorjih.

27.5.4 Zaznavanje barv

Čepki so treh vrst in se med seboj ločijo po spektralni občutljivosti fotopigmenta. V čepkih S je fotopigment, ki je relativno najbolj občutljiv za modro barvo (pri 426 nm), fotopigment v čepkih L za rdečo (pri 560 nm), fotopigment v čepkih M pa je najbolj občutljiv pri 530 nm (Oznake S, L in M so povezane z angleškimi izrazi short, long in medium. Včasih so čepki poimenovani tudi po ustreznih barvah, B-blue, G-green, R-red). Različne barve vzbudijo različne vrste čepkov različno močno, kar možganom omogoči, da barve ločijo med seboj (sl. 27.7). Če neka svetloba vse tri vrste čepkov vzbudi enako, jo vidimo kot belo. Celotni vidni spekter, ki ga oko lahko zazna, je od približno 380 nm do 700 nm. Krajše valovne dolžine (ultravijolična svetloba) se absorbirajo že v roženici in do mrežnice sploh ne pridejo, daljše valovne dolžine (infrardeča svetloba) pa se sicer absorbirajo v mrežnici, a nimajo dovolj energije, da bi povzročile konformacijsko spremembo fotopigmentov. Prevelika izpostavljenost UV svetlobi nam tako poškoduje roženico, prevelika izpostavljenost IR svetlobi pa mrežnico.

Slika 27.7: Shematičen prikaz odvisnosti relativne občutljivosti čepkov od valovne dolžine. Čepki S so najbolj občutljivi pri 426 nm, čepki M pri približno 530 nm, čepki L pa pri približno 560 nm. Črtkano je prikazana še spektralna občutljivost pri skotopičnem gledanju, ko svetlobo zaznavamo s paličicami. Svetlobna občutljivost pri skotopičnem gledanju je mnogo večja kot pri fotopičnem.



27.5.5 Kratko in daljnovidnost

Če je lomnost očesa prevelika glede na velikost očesa, nastane slika neskončno oddaljenih predmetov malo pred mrežnico tudi v sproščenem stanju očesa, ko je njegova lomnost najmanjša možna. Z napenjanjem mišic slike seveda ne moremo izostriti, saj akomodacija očesa lomnost očesne leče le še poveča. Zato pa lahko celotno lomnost očesnega sistema zmanjšamo z očali z negativno lomnostjo (negativno dioptrijo) — spomnimo se, da je celotna lomnost vsota lomnosti očesa in očal, en. 27.3 (ta izraz je bolj točen za kontaktne leče, ki se oči zares dotikajo).

Po drugi strani daljnovidno oko lomnosti ne more dovolj povečati, da bi lahko izostrilo bližnje predmete. Do daljnovidnosti pogosto pride s starostjo, ko se zmožnost akomodacije očesa zmanjšuje. Pomagamo si z očali s pozitivno lomnostjo.

27.5.6 Ostrina vida

Poleg zmožnosti ostrenja na naš vid zelo vpliva tudi omejena ločljivost očesa. Kotna ločljivost očesa pri dnevni svetlobi je približno 1 kotno minuto, kar pomeni, da lahko na normalni zorni razdalji med seboj ločimo dve točki, ki sta med seboj oddaljeni približno 0,1 mm (sliki točk sta na mrežnici tako oddaljeni približno 10 μm). Omejena ločljivost je posledica končno velikih fotoreceptorjev na mrežnici (če svetloba iz dveh bližnjih točk pade na isti fotoreceptor, ju z očesom seveda ne bomo mogli razločiti), dodatno pa se lahko poslabša tudi zaradi različnih bolezni, npr. zaradi sive mrežnice. Ločljivost pri gledanju v mraku je še slabša kot pri dnevni svetlobi, saj pri skotopičnem vidu k enemu

živčnemu signalu prispeva veliko sosednjih paličic in je torej efektivna površina, na kateri se zaznava svetloba, veliko večja kot pri zaznavanju s čepki.

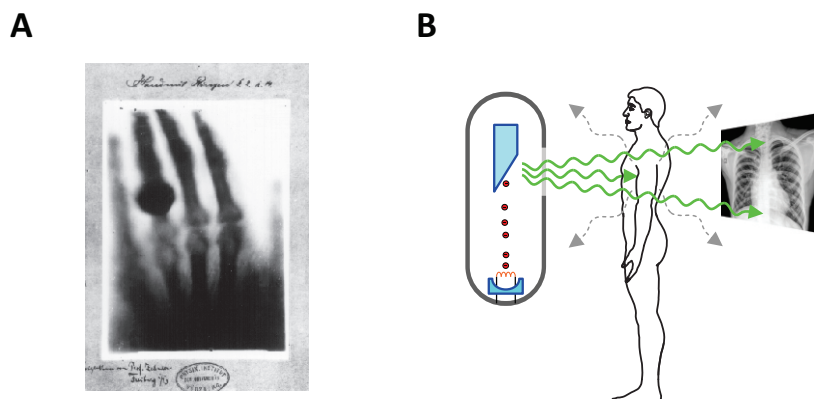
Poglavje 28

Rentgen

Znamenita slika kosti v dlani Anne Berthe Ludwig, ki jo je 22. decembra 1895 posnel njen mož, nemški fizik Wilhelm Conrad Roentgen, je v medicini sprožila revolucijo (sl. 28.1A). Rentgensko slikanje je bila namreč prva metoda, s katero so zdravniki lahko pogledali v telo, ne da bi ga morali pred tem razrezati s skalpelom. Novo odkrite žarke je Roentgen poimenoval žarki-X in tako jih še danes imenujejo v anglosaškem svetu (X-rays), v kontinentalni Evropi pa se je po Roentgenovi smrti uveljavilo ime rentgenski žarki. Čeprav je od njhovega odkritja minilo že 125 let, se osnovne značilnosti rentgenskega slikanja niso spremenile in rentgen ostaja osrednja diagnostična slikovna metoda.

V poglavju o elektromagnetnem valovanju smo spoznali, da so rentgenski žarki elektromagnetno valovanje z zelo kratko valovno dolžino oz. da imajo rentgenski fotoni zelo veliko energijo (tabela 26.1). V diagnostiki se uporabljajo predvsem rentgenski žarki z energijami od 15 keV do 150 keV, kar ustreza valovnim dolžinam od približno 100 pm do 10 pm. Energija rentgenskih fotonov je mnogo večja od tipičnih elektronskih prehodov v zunanjih lupinah atomov in molekul, zato skozi tkivo prodirajo bistveno bolje kot npr. vidna svetloba. Po drugi strani je njihova energija več kot dovolj velik za ionizacijo atomov in molekul (spomnimo se, da so le-te reda velikosti nekaj eV), zato so rentgenski žarki ionizirajoče sevanje in lahko s povzročanjem ionizacij v tkivu zelo poškodujejo celice oz. njihov dedni material. Rentgensko slikanje je tako po eni strani zelo uporabno, po drugi pa tudi škodljivo zato ga ne smemo uporabljati po nepotrebnem.

V tem poglavju bomo opisali glavne značilnosti rentgenskega slikanja, od nastanka rentgenih žarkov, do njihove poti skozi telo in detekcije sence telesa (sl. 28.1B).

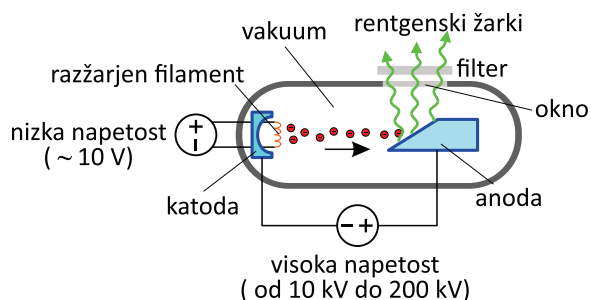


Slika 28.1: A) Ena prvih rentgenskih slik, ki jih je decembra 1895 posnel Wilhelm Conrad Roentgen, prikazuje roko njegove žene Anne Berthe Ludwig (na sliki je viden tudi prstan, ki ga je nosila). Osnovni princip slikanja se od takrat ni spremenil in je shematično prikazan na sliki B). Rentgenski žarki izhajajo iz rentgenske cevi, potujejo skozi telo in na drugi strani preiskovanca na detektorju pustijo senco telesnih organov. Kontrast med organi na sliki je odvisen od absorpcije rentgenskih žarkov v njih - večja kot je absorpcija, manj žarkov pride do detektorja in bolj svetla je slika organa na rentgenski sliki (to velja za klasično rentgensko slikanje na fotografski film, pri nekaterih drugih tehnikah pa lahko sliko prikažemo tudi z obrnjenimi barvami). Nekaterim žarkom se zaradi sipanja v telesu spremenita smer in energija, zaradi česar lahko poslabšajo kontrast na sliki ali obsevajo okolico (sipani žarki so prikazani s sivo črtkano črto).

28.1 Izvor rentgenskih žarkov – rentgenska cev

Energija rentgenskih fotonov je mnogo večja od tipičnih elektronskih prehodov v zunanjih lupinah atomov in molekul, zato rentgenski žarki ne morejo nastajati pri kemijskih procesih na nivoju molekul ali zaradi njihovega termičnega gibanja. Za nastanek rentgenskih žarkov so potrebni procesi, pri katerih se sprosti veliko energije in ki jih v vsakdanjem življenju v naravi ne srečamo pogosto. Za produkcijo rentgenskih žarkov je bila tako ključna iznajdba t. i. katodne cevi, v kateri z močnim električnim poljem ustvarimo hitre elektrone, ki imajo zelo veliko kinetično energijo (katodna cev je preprosta predhodnica pospeševalnikov, kakršen je danes tisti v CERNu, v katerem so odkrili Higgsov bozon). Princip produkcije rentgenskih žarkov je danes še vedno enak kot pred stotimi leti (slika 28.2): v vakuumski cevi sta katoda in anoda, med katerima je zelo visoka električna napetost (od 10 kV do 200 kV). Na

strani s katodo je kovinski filament, ki ga z električnim tokom segrevamo, zaradi česar iz filameta izhajajo elektroni. Ti elektroni se v električnem polju med katodo in anodo zelo pospešijo in nato z veliko hitrostjo trčijo v anodo (ker je cevi vakuum, jih na poti do anode nič ne ovira). Visokoenergijski elektroni med ustavljanjem v anodi svojo kinetično energijo oddajajo v obliki elektromagnetnega sevanja — rentgenskih žarkov. Katodno cev, s katero proizvajamo rentgenske žarke, imenujemo *rentgenska cev*.



Slika 28.2: Shematični prikaz delovanja rentgenske cevi. Rentgenska cev je vakuum-ska cev s katodo in anodo, med katerima je visoka napetost (v medicini se uporabljajo napetosti od 10 kV do 200 kV). Na strani katode je tanek kovinski filament, skozi katerega teče električni tok, zaradi česar se filament segreva in iz njega izhajajo elektroni. Elektroni v električnem polju med katodo in anodo zelo pospešijo in dobijo veliko kinetično energijo. Ko trčijo v anodo, med ustavljanjem svojo energijo oddajo v obliki rentgenskih žarkov. Oblika spektra rentgenskih žarkov je odvisna od vrste snovi v anodi in od pospeševalne napetosti, njihovo število pa lahko uravnavamo s tokom skozi filament v katodi (bolj kot razžarimo filament, več elektronov izhaja iz njega in trči v anodo in več rentgenskih žarkov nastane). Na izsevani spekter lahko vplivamo tudi z izbiro filtra na izhodu iz cevi.

V medicini za različne aplikacije uporabljamo različne valovne dolžine rentgenskih žarkov. Da bomo razumeli, kako pri rentgenski cevi nastaviti ustrezen spekter izsevanih žarkov, si najprej pogledjmo dva osnovna procesa, s katerima žarki nastanejo med ustavljanjem visoko-energijskih elektronov v anodi (slika 28.3). Prvi mehanizem je t. i. *zavorno sevanje* (slika 28.3A). Do njega pride, ko se hitri elektron ustavlja v močnem električnem polju v bližini težkih atomskih jeder. Spekter izsevanih rentgenskih žarkov pri zavornem sevanju je zvezen, pri čemer pa izsevani rentgenski fotoni ne morejo imeti energije, ki je višja od energije posameznih elektronov, ki se ustavljajo v anodi (foton energije ne more dobiti od dveh elektronov hkrati). V poglavju o električnih pojavih smo spoznali, da je energija, ki jo dobi elektron v električnem polju so-

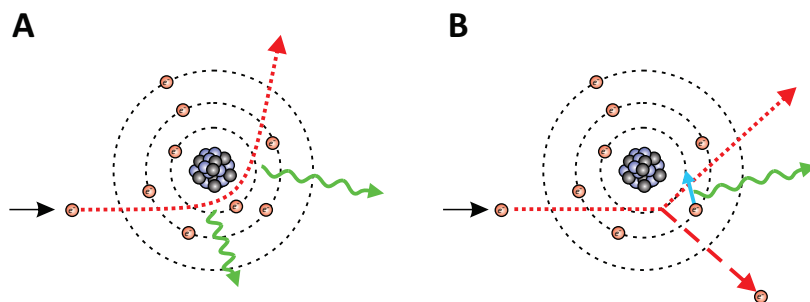
razmerna električni napetosti, ki jo preleti, $\Delta W_e = e_0 U$ (enačba 17.8), zaradi tega je energija elektronov določena s pospeševalno napetostjo med katodo in anodo. Če se elektron pospeši z napetostjo x kV, ima dobi energijo x keV. Z nastavljanjem te napetosti lahko torej vplivamo na največjo energijo fotonov, ki jih seva rentgenska cev. Valovna dolžina je obratno sorazmerna z energijo fotona (spomnimo se enačbe 26.2, ki smo jo spoznali pri elektromagnetnem valovanju), zato s tem hkrati nastavimo tudi najkrajšo valovno dolžino izsevanih rentgenskih žarkov.

Drugi mehanizem nastanka rentgenskih žarkov je povezan z izbijanjem elektronov iz notranjih lupin težkih atomov (slika 28.3B). Če namreč visoko-energijski elektron, ki prileti iz katode, izbije elektron iz notranje lupine atoma v anodi, bo le tega nadomestil elektron iz katere od višjih lupin, pri čemer pa bo oddal foton z značilno energijo, ki je enaka energiji prehoda med tema lupinama. Tako izsevani rentgenski fotoni imajo energijo, ki je enaka energiji prehoda elektronov med notranjimi atomskimi lupinami. Te energije so pri vsaki vrsti atomov drugačne, zato tako izsevane rentgenske žarke imenujemo *značilno sevanje*, njihove energije pa so odvisne od vrste atomov v anodi. Najpogostejše se uporablja anode iz volframa¹, pri katerih ima značilno sevanje energijo približno 59 keV in 69 keV. Če potrebujemo rentgenske žarke nižjih energij, uporabimo anodo iz molibdena, pri katerem je značilno sevanje približno pri 17,5 keV in 19,6 keV.

Spekter žarkov, ki sevajo iz rentgenske cevi, je torej sestavljen tako iz zavornega sevanja kot tudi iz značilnega sevanja. Slika 28.4A prikazuje spekter volframove anode, če je pospeševalna napetost nastavljena na 100 kV. V tem primeru bodo imeli elektroni, ki se zaletijo v anodo, energijo 100 keV in tako bo tudi največja energija v spektru sevanja rentgenske cevi. Na sliki tudi vidimo, da cev pri največji možni energiji seva le malo fotonov in da je vrh zveznega spektra zavornega sevanja pri bistveno nižjih energijah, v našem primeru med 30 keV in 40 keV. V spektru sta vidna tudi dva ostra vrhova, ki ustrezata značilnemu sevanju volframa. Če pospeševalno napetost znižamo, se ustrezno zniža tudi največja energija izsevanih fotonov, hkrati pa tudi celotno število izsevanih fotonov (slika 28.4B). Položaj značilnih vrhov se pri tem ne spremeni, saj je le-ta odvisen le od energijskih prehodov v atomih volframa. Če je pospeševalna napetost prenizka, iz spektra seveda izginejo tudi značilni vrhovi, saj v tem primeru visoko-energijski elektroni nimajo dovolj energije za izbijanje elektronov iz notranjih atomskih lupin.

Na količino izsevanih fotonov lahko vplivamo tudi s spreminjanjem kato-

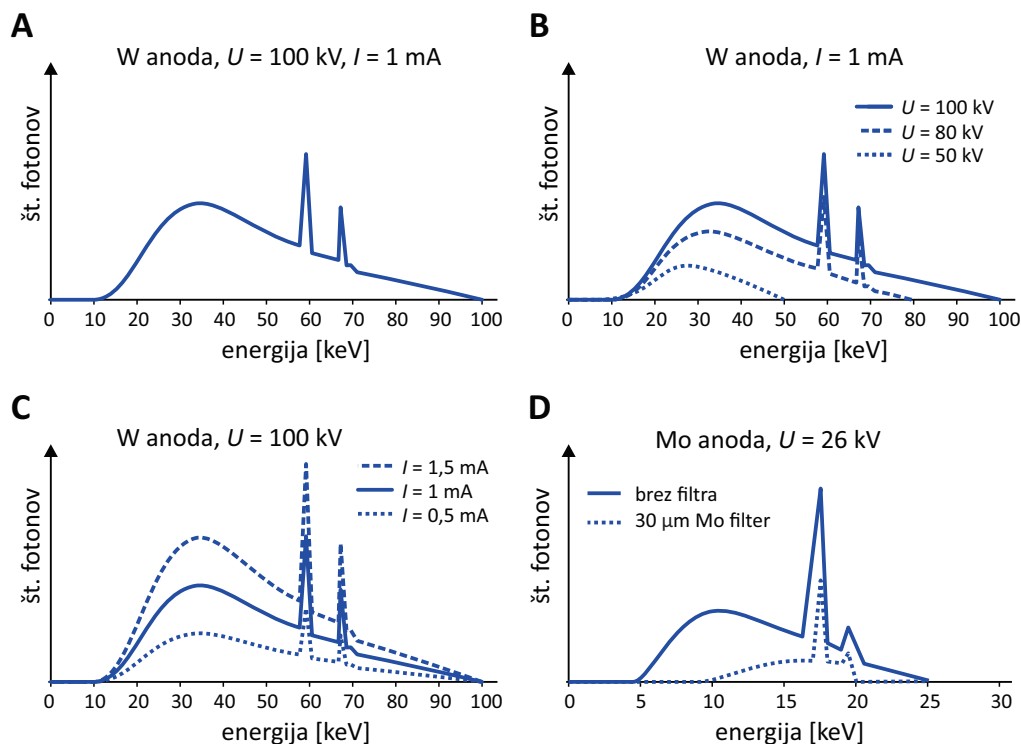
¹Po angleško se volframu reče tungsten, zato v anglosaški literaturi uporabljajo ta izraz.



Slika 28.3: Shematični prikaz dveh mehanizmov nastanka rentgenskih žarkov ob ustavljanju visokoenergijskih elektronov v anodi rentgenske cevi. A) Zavorno sevanje. Med ustavljanjem v električnem polju jeder elektroni svojo energijo izgubljajo s sevanjem rentgenskih žarkov različnih valovnih dolžin. B) Značilno sevanje. Če ima elektron dovolj energije, lahko iz notranje atomske lupine izbiče elektron. Izpraznjeno mesto zapolni elektron iz višje lupine in pri tem odda rentgenski žarek (preskok je shematično prikazan z modro puščico). Valovne dolžine značilnega sevanja so natančno določene z energijami prehodov med atomskimi lupinami in so za vsako vrsto atomov drugačne.

dnega toka elektronov. Če povečamo električni tok skozi filament pri katodi, se bo filament bolj segreje, iz njega izhaja več elektronov, več jih trči v anodo in zato se izseva tudi več fotonov. Ker pa s spreminjanjem katodnega toka ne spreminjamo energije elektronov, z njim vplivamo le na količino izsevanih fotonov, ne pa tudi na obliko izsevanega spektra (slika 28.4C).

Če namesto volframove anode vzamemo molibdenovo, bo oblika spektra zavornega sevanja v grobem podobna kot pri volframu, le vrhovi značilnega sevanja bodo pri drugih energijah (28.4D). Na izsevan spekter lahko vplivamo tudi z ustreznimi filtri, ki jih postavimo pred izhodno okno cevi (slika 28.2) in ki absorbirajo le del izsevanega spektra. Z njimi poskrbimo, da iz izsevanega spektra odstranimo valovne dolžine, ki jih cev seva, a bi bile za slikanje nepriemerne. Filtri so največkrat kar tanke kovinske plošče, narejene iz istega materiala kot anoda. Na sliki 28.4D npr. vidimo, da lahko pri molibdenski anodi z uporabo molibdenskega filtra iz sevanja izločimo žarke zavornega sevanja, s čimer izsevani žarki postanejo bolj monokromatski (imajo ožji spekter). Za slikanje različnih struktur v telesu so primerne različne energije rentgenskih žarkov, zato mora radiolog za vsako vrsto slikanja izbrati ustrezno anodo in filter ter primerno nastaviti katodni tok in pospeševalno napetost.

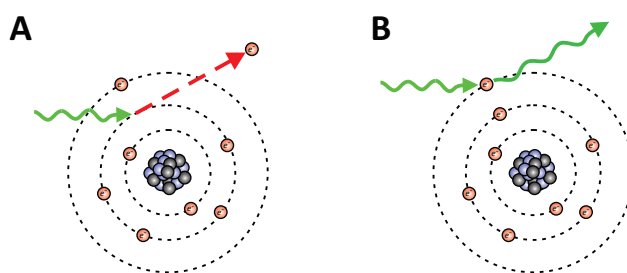


Slika 28.4: Prikaz spektra žarkov, izsevanih iz rentgenske cevi. A) Spekter volframove anode pri pospeševalni napetosti 100 kV. Zvezni del spektra je posledica zavornega sevanja, ostra vrhova pa predstavljata značilno sevanje, ki je za volfram v bližini energij 58 keV in 68 keV. Največja energija izsevanih fotonov je enaka kinetični energiji elektronov v cevi in je torej sorazmerna pospeševalni napetosti (v prikazanem primeru je 100 keV). B) Odvisnost spektra od pospeševalne napetosti. Z manjšanjem pospeševalne napetosti se manjšata energija in število izsevanih fotonov. Energije značilnega sevanja se ne spremenijo, značilno sevanje izgine šele, če se elektroni v cevi nimajo potrebne kinetične energije za izbijanje elektronov iz ustreznih notranjih atomskih lupin. C) Odvisnost spektra od katodnega toka. Od katodnega toka elektronov je odvisno le število izsevanih fotonov, ne pa oblika izsevanega spektra. D) Spekter molibdenove anode pri pospeševalni napetosti 26 kV. Značilno sevanje molibdenove anode je pri nižjih energijah (približno pri 17,5 keV in 19,6 keV), zato se take anode uporabljajo za produkcijo mehkejših žarkov, ki jih potrebujemo npr. za mamografijo. Slika prikazuje tudi, kako se spremeni spekter, če na izhod anode postavimo filter iz tanke plasti molibdena.

28.2 Interakcija s snovjo

Valovna dolžina rentgenskih žarkov je tako majhna, da se na poti skozi snov ne menijo za molekularno strukturo snovi temveč interagirajo neposredno z elektroni in jedri atomov. Oslabitev žarkov v snovi je tako odvisna le od števila in teže atomov v snovi (težji atomi imajo več protonov in več elektronov zato z rentgenskimi žarki močnejše interagirajo), ne pa od vrste molekul, v katere so ti atomi povezani.

Rentgenski žarki, ki se uporabljajo v diagnostiki, s snovjo najpogosteje interagirajo preko dveh mehanizmov (slika 28.5). Prvi mehanizem je *fotoefekt*, pri katerem rentgenski foton iz atoma izbije notranji elektron, pri čemer se absorbira celotna energija fotona. Drugi mehanizem interakcije s snovjo je sipanje, pri katerem rentgenski žarki interagirajo z zunanjimi elektroni v atomih, zaradi česar se jim spremeni smer gibanja, lahko pa izgubijo tudi nekaj svoje energije (obstajata tudi dve vrsti sipanja: sipanje pri katerem foton ne izgublja energije se imenuje Rayleighovo sipanje, če pa foton ob sipanju del svoje energije izgubi, gre za Comptonovo sipanje). Sipani rentgenski žarki se lahko sipljejo še naprej, zato je njihova pot skozi snov lahko zelo zapletena.



Slika 28.5: Shematični prikaz dveh glavnih načinov interakcije rentgenskih žarkov s snovjo. A) Fotoelektrični efekt. Energija fotona se v snovi absorbira, ko foton izbije notranji elektron iz atoma. B) Sipanje. Foton interagira z zunanjim elektronom v atomu in pri tem spremeni smer gibanja, lahko pa tudi izgubi del svoje energije (valovna dolžina se poveča). Oba mehanizma povzročata ionizacijo atomov in molekul v snovi.

Rentgenski žarki se na poti skozi tkivo torej oslabijo zaradi absorpcije in zaradi sipanja. V poglavju o splošnih lastnostih valovanja smo spoznali, da je absorpcija žarkov v snovi eksponenten proces (en. 23.6). Oslabitev zaradi sipanja je bolj zapletena, saj lahko sipani fotoni po večkratnem sipanju spet dobijo smer prvotnega žarka. Vseeno v prvem približku pogosto zapišemo, da tudi oslabitev (atenuacija) rentgenskih žarkov na poti skozi tkivo poteka

po absorpcijskem zakonu (en. 23.6):

$$j = j_0 e^{-\mu x}, \quad (28.1)$$

kjer je j_0 vpadna energijska gostota rentgenskih žarkov, x je prepotovana razdalja po tkivu, μ pa je absorpcijski koeficient snovi. Če si želimo poudariti, da pri oslabitvi žarkov ne gre za čisto absorpcijo ampak tudi za sipanje, lahko absorpcijski koeficient imenujemo tudi *atenuacijski* koeficient, mi pa bomo ostali kar pri prvotnem izrazu.

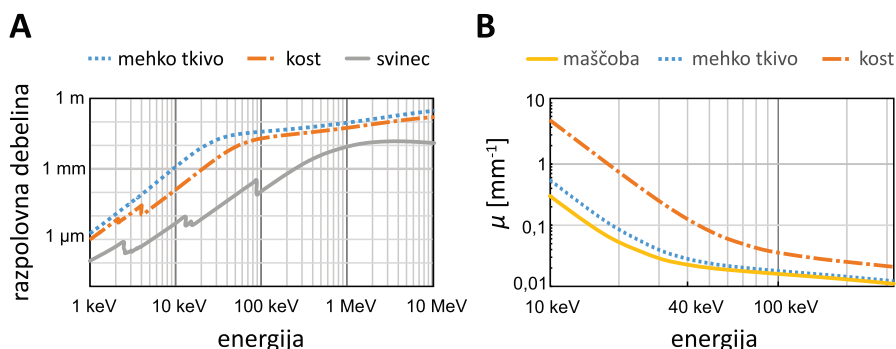
Absorpcijski koeficient za rentgenske žarke je odvisen tako od vrste snovi kot tudi od energije žarkov. Odvisnost ni enostavna, a v grobem velja, da težji atomi rentgenske žarke absorbirajo mnogo bolje kot lažji ter da rentgenski žarki skozi tkivo prodirajo tem lažje, čim večjo energijo imajo (slika 28.6). Pri energijah manjših od 40 keV velja, da je absorpcijski koeficient približno sorazmeren četrti potenci vrstnega števila atomov (Z) ter obratno sorazmeren tretji potenci energije fotonov:

$$\mu \propto \frac{Z^4}{W_\gamma^3} \quad (28.2)$$

Težke kovine kot je svinec ($Z = 82$) torej zelo dobro zaustavljajo rentgenske žarke. Tudi jod ($Z = 53$) in kalcij ($Z = 20$) rentgenske žarke absorbirajo bolje od povprečnega mehkega tkiva v katerem prevladujejo vodik ($Z = 1$), ogljik ($Z = 6$) in kisik ($Z = 8$).

Slika 28.6A prikazuje absorpcijski spekter za rentgenske žarke za tipično mehko tkivo, kost in svinec. Pri energiji 10 keV je npr. razpolovna debelina v mehkem tkivu enaka 1 mm, v kosti 0,1 mm, v svincu pa manj kot 0,01 mm (na tem mestu se lahko spomnimo primera 23.1, v katerem smo računali absorpcijo rentgenskih žarkov v svincu). Slika 28.6B prikazuje primerjavo absorpcijskega koeficienta med maščobo in mehkim tkivom. Razlika med mehкими tkivi je večja pri nižjih energijah, zato npr. za mamografijo uporabljamo rentgenske žarke z nižjimi energijami, saj je pri njih kontrast med različnimi tkivi v dojki boljši.

Pri slikanju nekaterih mehkih struktur si lahko pomagamo z uporabo *kontrastnega sredstva*, ki zelo dobro absorbira rentgenske žarke. Taka diagnostična metoda je npr. *angiografija*, pri kateri pacientu v žile vbrizgamo jodovo raztopino in ga nato hitro slikamo z rentgenom. Ker jod rentgenske žarke absorbira bistveno bolje od okoliških mehkih organov (jod ima visoko vrstno število $Z = 53$), se bo na sliki lepo izrisala oblika žil (slika 28.7).



Slika 28.6: Absorpcijski spekter za rentgenske žarke v nekaterih snoveh. A) Odvisnost razpolovne debeline v mehkem tkivu, kosti in svincu od energije rentgenskih fotonov v razponu energij od 1 keV do 1 MeV. V kosti je več težjih atomov, kot v mehkem tkivu, zato je v njej absorpcija večja (razpolovna debelina je manjša). Atomi svınca so še težji, zato je absorpcija v svincu še veliko večja. B) Absorpcijski (atenuacijski) koeficient v maščobi, mehkem tkivu in kosti v intervalu energij, ki se uporabljajo pri rentgenskem slikanju. Razlika med mehкими tkivi je večja pri manjših energijah.



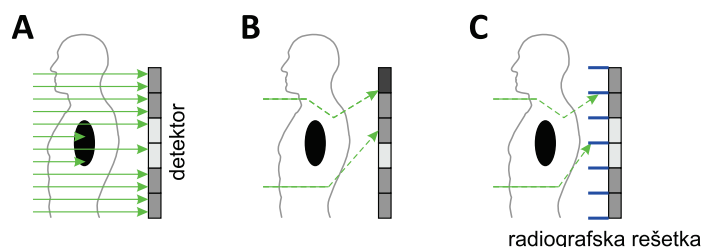
Slika 28.7: Prikaz angiografske slike žil v možganih. Pri angiografiji pacientu v žilo vbrizgamo kontrastno sredstvo in ga takoj nato slikamo z rentgenom. Kontrastno sredstvo dobro absorbira rentgenske žarke (pri angiografiji kot kontrastno sredstvo ponavadi uporabimo raztopino joda, ki ima veliko vrstno število) zato se žile jasno prikažejo na sliki. Angiografske slike ponavadi prikazujemo v obratni barvni lestvici kot klasične rentgenske slike, zato so tu žile prikazane temneje kot okoliško tkivo.

28.3 Nastanek slike

Princip nastanka rentgenske slike je bil prikazan že v uvodu: z rentgenskimi žarki posvetimo skozi preiskovanca in na drugi strani detektiramo senco, ki jo naredijo telesne strukture. V starih časih so kot detektor uporabili kar po-

seben fotografski film, v katerem rentgenski žarki ionizirajo srebrov bromid, kar je nato mogoče zaznati s pomočjo kemijske reakcije, ki poteče med razvijanjem filma. Čim več žarkov je padlo na neko točko na flimu, tem močnejša je bila reakcija in tem bolj črna je bila ta točka na filmu. Sodobni rentgenski aparati uporabljajo detektorje, ki zaznane rentgenske fotone spremenijo v električni signal in informacijo o sliki spremenijo v digitalno obliko, sliko pa si nato ogledamo na računalniku. Digitalna rentgenska slika je sestavljena iz mreže slikovnih točk (pikslov), podobno kot slike, ki jih posnamemo s kamero v prenosnem telefonu. Tipični digitalni detektor je velik približno kot dva A4 lista in ima ločljivost 2500×2000 pikslov, svetlost vsakega piksla pa je predstavljena s 16-bitnim številom (na taki sliki lahko torej prikažemo $2^{16} = 65\,536$ različnih sivih odtenkov).

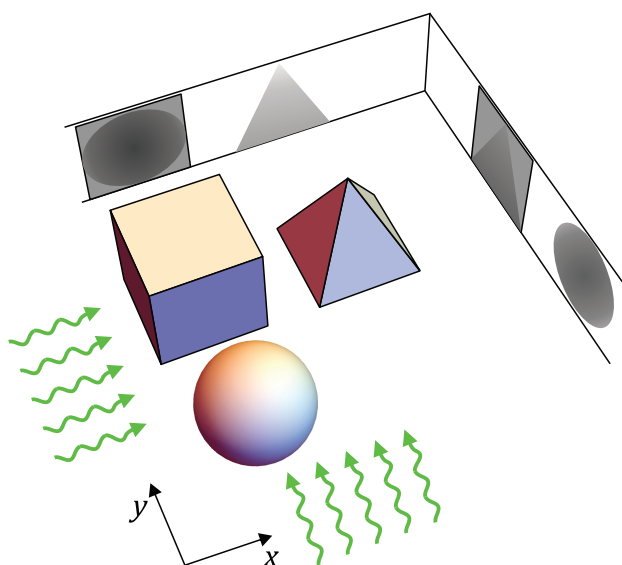
Dober detektor včasih ni dovolj, da bi dobili jasno in kontrastno rentgensko sliko. V prejšnjem razdelku smo spoznali, da se rentgenski žarki v telesu sipljejo in zaradi tega spremenijo smer. Slika 28.8 prikazuje, kako lahko sipani žarki s svoje poti močno zaidejo in zadanejo slikovne točke na drugih koncih detektorja in s tem pokvarijo kontrast na sliki. Na sliki vidimo, da sipani žarki na detektor padejo pod večjim kotom kot nesipani žarki. Njihov vpliv na sliko lahko zato deloma omilimo, če pred detektor postavimo *radiografsko rešetko*, ki je narejena iz kovine in absorbira žarke, ki se detektorju približajo pod kotom.



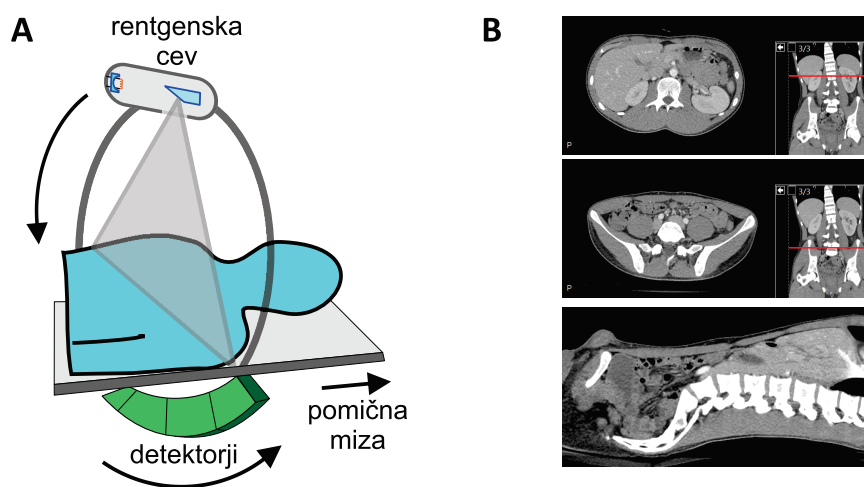
Slika 28.8: Shematični prikaz vpliva sipanja na sliko. Slikovna točka (piksel) na sliki je tem bolj temna, čim več fotonov pade nanjo. A) Prikaz poti direktnih žarkov, ki se ne sipljejo in se oslabijo le zaradi absorpcije, zaradi česar na detektorju ustvarijo dobro kontrastno sliko. B) Prikaz sipanih žarkov, ki spremenijo smer in zadanejo slikovne točke na drugih mestih, zaradi česar pokvarijo kontrast slike. Sipani žarki na detektor padejo pod večjim kotom kot direktni. C) Vpliv sipanih žarkov lahko zmanjšamo, če pred detektor postavimo radiografsko rešetko, ki narejena iz tankih kovinskih trakov in absorbira žarke, ki se detektorju približajo pod kotom.

Klasična rentgenska slika prikazuje sence oz. projekcije, ki jih na detektor-

ju naredijo telesne strukture. Zaradi tega na rentgenski sliki ni informacije o položaju posamezne strukture v telesu. Če potrebujemo 3D sliko telesa, moramo pacienta slikati iz več različnih strani ter nato iz teh projekcij izluščiti informacijo o 3D obliki (slika 28.9). Postopek, s katerim sestavimo 3D strukturo na osnovi njenih projekcij, se imenuje *tomografija* in je računsko zelo zahteven, zato dobrih 3D slik ne moremo dobiti brez pomoči hitrega računalnika. Slikovna tehnika, ki uporablja tomografijo z rentgenskim slikanjem, se imenuje CT (iz angl. *computed tomography*). Fizikalni princip nastanka slike pri CT preiskavi je torej enak kot pri rentgenu, le da pri CT preiskavi pacienta slikamo iz večih strani ter nato s pomočjo računalnika sestavimo njegovo 3D sliko (28.10). Pri CT preiskavi tako pacienta z rentgenskimi žarki presvetlimo večkrat, zato pri njej prejme bistveno večjo dozo ionizirajočega sevanja kot pri klasičnem rentgenu.



Slika 28.9: Shematični prikaz slikanja z večih strani. Pri slikanju z ene strani se na sliki izrišejo le projekcije struktur v smeri slikanja, informacije o položaju struktur vzdolž smeri slikanja pa ne dobimo. Če predmete v zgornjem primeru slikamo v smeri x , iz slike ne bomo mogli razbrati, ali je kocka za ali pred piramido. To informacijo dobimo, če predmete slikamo še v smeri y . V praksi slikamo iz veliko različnih strani, nato pa uporabimo postopek imenovan tomografija, s katerim iz posnetih projekcij s pomočjo računalnika izračunamo 3D obliko struktur.

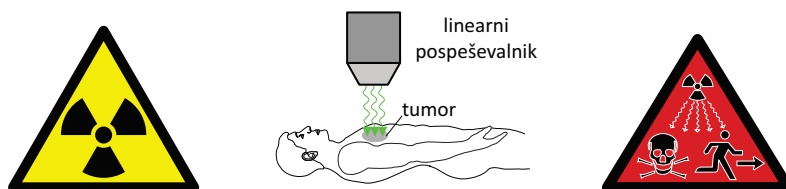


Slika 28.10: A) Shematični prikaz delovanja naprave CT. Pacient leži na pomični mizi, rentgenska cev in detektorji pa se vrtijo okrog njega. Na tak način pacienta slikamo v večih ravninah in z več strani, računalnik pa nato iz zajetih projekcij sestavi 3D sliko telesa. B) Primer CT slike. CT slike gledamo na računalniškem zaslonu, pri čemer lahko sproti izbiramo, kateri prerez telesa želimo videti. Prikazani so en sagitalni (spodaj) in dva aksialna prereza telesa (rdeče črte označujejo mesto aksialnih prerezov).

Poglavje 29

Ionizirajoča sevanja

Ionizirajoče je vsako sevanje, ki nosi dovolj energije, da lahko ionizira molekule oz. razbije medatomske vezi. Ionizirajoče sevanje zato v celicah povzroči poškodbe makromolekul in dednega zapisa, kar lahko privede do celične smrti ali do nastanka raka. Ob previdni uporabi pa lahko ionizirajoče sevanje v medicini izrabimo tudi koristno, npr. v raznih diagnostičnih metodah (rentgen, scintigrafija, PET ...) in v radioterapiji (slika 29.1). V tem poglavju bomo spoznali osnovne značilnosti interakcije ionizirajočega sevanja s snovjo in njegovega vpliva na tkiva. V naslednjem poglavju bomo nato spoznali še osnovne značilnosti nuklearne medicine.



Slika 29.1: Ionizirajoče sevanje poškoduje celice in je lahko smrtno nevarno, zato moramo izvore ionizirajočega sevanja označiti z ustreznimi označbami. Na levi je prikazana starejša, na desni pa nova oznaka prisotnosti ionizirajočega sevanja. Ob previdni uporabi lahko ionizirajoče sevanje koristno izrabimo za različne medicinske diagnostične in terapevtske postopke. Na sliki je shematsko prikazano zdravljenje raka z obsevanjem – ionizirajoče sevanje manj škoduje zdravim celicam kot rakastim, zato lahko slednje z ravno pravšnjo dozo sevanja odstranimo iz tkiva.

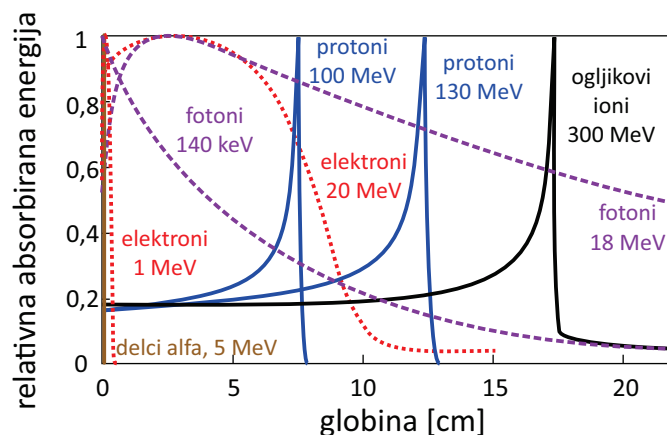
29.1 Vrste ionizirajočega sevanja

Za ionizacijo molekul je potrebno nekaj eV energije, zato pod ionizirajoče sevanje spadajo vsi žarki, ki imajo vsaj toliko energije. V poglavju o elektromagnetnem valovanju smo spoznali, da je ionizirajoče elektromagnetno sevanje tisto, ki ima valovno dolžino krajšo od ultravijolične svetlobe, tj. rentgenski žarki in žarki gama (tabela 26.1). Poleg fotonov z visoko energijo k ionizirajočem sevanju spadajo še različni hitri delci z veliko kinetično energijo, ki nastajajo pri radioaktivnem razpadu ali pa v pospeševalnikih delcev. Ionizirajoče sevanje prihaja tudi iz vesolja (to sevanje imenujemo *kozmični žarki*), vendar se to sevanje v veliki meri absorbira v atmosferi, zato ga občutimo le v Himalaji ali pri poletih z letalom. Po drugi strani velja spomniti, da vsako sevanje ni ionizirajoče: sevanje mobilov in ultrazvok npr. nista.

Spodaj navajamo kratek pregled najpogostejših vrst ionizirajočega sevanja, ki jih srečamo v medicini, slika 29.2 pa prikazuje, kako različne vrste sevanja ionizirajo snov skozi katero potujejo. Za vse vrste ionizirajočih delcev velja, da v tkivo prodrejo tem globlje, čim večjo energijo imajo.

Rentgenski žarki in žarki gama so elektromagnetno valovanje. Razlika med njimi je le v njihovem izvoru in tipičnih energijah: rentgenski žarki nastajajo v rentgenski cevi in imajo energije do približno 150 keV, gama žarki pa nastajajo pri radioaktivnih razpadih in imajo lahko energije tudi do nekaj 10 MeV. Pri prehodu skozi snov se visokoenergijski fotoni naključno absorbirajo, pri tem pa lahko ustvarjajo tudi sekundarne ionizirajoče delce (npr. elektrone, ki jih izbijejo iz atomov), ki snov ionizirajo naprej. Energija, ki jo pustijo v snovi, je zato le približno eksponentno odvisna od prepotovane poti. V praksi njihovo absorpcijo v snovi vseeno opišemo enako kot pri absorpcijskem zakonu (en. 23.6), t. j. z razpolovno debelino, $x_{1/2}$, v kateri se absorbira polovica vpadnih žarkov. V vodi je razpolovna debelina fotonov z energijo 150 keV približno 5 cm, fotonov z energijo 18 MeV pa nekaj več kot 20 cm. V tkivu je razpolovna debelina še malo manjša kot v vodi.

Delci alfa so hitra jedra helija, ki nastajajo pri radioaktivnem razpadu. Tipične energije takih delcev so nekaj MeV. Ker so relativno težki in imajo velik naboj (2+), njihova absorpcija ni le naključen proces, ampak med svojo potjo neprestano interagirajo z atomi v snovi, jih ionizirajo ter tako sproti izgubljajo svojo energijo. Delci alfa se zato v snovi slej ko prej ustavijo in njihovega prodiranja skozi snov ne moremo opisati z razpo-



Slika 29.2: Prikaz absorbirane energije za tipična ionizirajoča sevanja pri prehajanju skozi vodo. Energije so prikazane v relativnih enotah. Absorbirana energija je neposredno merilo za število ionizacij, ki jih sevanje ustvari na določeni globini, zato lahko iz prikazanih grafov razberemo, kako globoko v tkivo prodrejo, pa tudi na kateri globini povzročijo največ ionizacij. Pri vseh vrstah sevanja velja, da v snov prodrejo tem globlje, čim večjo energijo nosijo. Delci alfa (helijeva jedra) se pri svojih tipičnih energijah povsem absorbirajo že v nekaj deset mikrometrih vode. Doseg elektronov (delcev beta minus) je tipično od pol centimetra do deset centimetrov (na sliki prikazano s pikčasto črto). Protoni in ioni, ki jih ustvarimo v pospeševalniku, imajo lahko zelo veliko energijo in lahko prodrejo globoko v tkivo. Vsi težkih nabiti delci (alfa, protoni in ioni) povzročijo relativno največ ionizacij tik preden se ustavijo, zato imajo njihove krivulje na sliki tik pred koncem oster vrh (v strokovni literaturi ta vrh imenujejo *Braggov vrh*). Fotoni se v snovi absorbirajo naključno, zato število ionizacij z razdaljo pada približno eksponentno (na sliki prikazano s črtkano črto).

lovno debelino temveč kar s povprečnim dosegom. Tipični doseg delcev alfa z energijo nekaj MeV v tkivu je nekaj 10 mikrometrov in se torej ustavijo že v koži. Delci alfa največji delež energije izgubijo tik preden se ustavijo.

Hitri protoni in hitri ioni postajajo vse bolj pomembni terapevtski ionizirajoči žarki, saj jih lahko ustvarimo v pospeševalniku in pri tem kontroliramo njihovo energijo ter s tem njihov doseg, pri čemer so njihove energije od nekaj 10 MeV do nekaj 100 MeV. Pri svoji poti skozi snov se obnašajo podobno kot delci alfa in največji delež energije izgubijo tik preden se ustavijo, zato so zelo uporabni za radioterapijo, saj lahko s primerno izbiro njihove energije nastavimo globino, na kateri pustijo največ

ionizacij, ter s tem poskrbimo, da tumor obsevamo močnejše kot zdravo okoliško tkivo. V Sloveniji naprave za protonsko oz. ionsko terapijo zaenkrat še nimamo.

Delci beta minus so hitri elektroni. Nastanejo lahko pri radioaktivnem razpadu, lahko pa jih ustvarimo tudi v pospeševalniku. Ker so nabiti, tudi oni med potjo skozi snov neprestano izgubljajo energijo in se v snovi slej ko prej ustavijo. Ker pa so lažji od delcev alfa, se jim ob interakciji z atomi spreminja smer gibanja, zato meja njihovega dosega ni tako ostra, kot pri delcih alfa. V vodi je tipični doseg delcev β^- z energijo 1 MeV nekaj mm, z večanjem energije pa se doseg ustrezno večja.

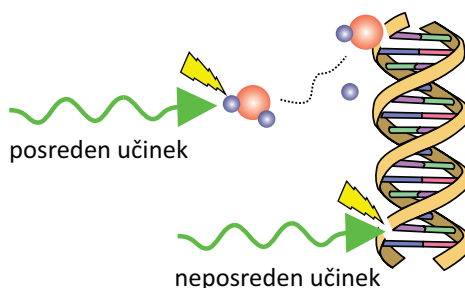
Delci beta plus so pozitroni (anti-delci elektronov – imajo enako maso kot elektroni, a pozitiven naboj). Na poti skozi tkivo hitro srečajo kak elektron, ki je njihov anti-delec, zato se z njim anihilirajo. Pri anihilaciji se vsa njuna masa spremeni v energijo dveh fotonov gama z energijo 511 keV, ki zaradi ohranitve gibalne količine odletita vsak v svojo smer. Delci beta plus se uporabljajo pri pozitronski emisijski tomografiji, ki jo bomo podrobneje opisali kasneje.

29.2 Vpliv ionizirajočega sevanja na tkivo

Po drugi svetovni vojni so zaradi prve uporabe atomske bombe vložili veliko naporov in denarja v razumevanje bioloških učinkov ionizirajočega sevanja, zato je to področje eno najbolj raziskanih. Ker pa so biološki procesi izjemno kompleksni, vseh podrobnosti kljub vsemu še danes ne poznamo.

Fizikalno-kemijski del učinka ionizirajočega sevanja na tkivo je razumljen najboljše: ionizirajoče sevanje razbija medatomske vezi in povzroča ionizacije molekul. V tkivu tako nastajajo molekule s prostimi radikali, ki so zelo reaktivni in lahko kemijsko reagirajo z makromolekulami v okolici ter jim s tem spremenijo strukturo. Makromolekule v celicah lahko tako razpadejo neposredno zaradi interakcije z ionizirajočim sevanjem, lahko pa jih poškodujejo tudi ionizirane molekule vode (slika 29.3). Neposreden učinek je še celo bolj pogost, saj je v celicah največ ravno molekul vode.

Število ionizacij v tkivu je neposredno povezano z energijo, ki mu jo preda ionizirajoče sevanje. Zelo enostavno merilo škode v tkivu je zato *absorbirana doza*, tj. absorbirana energija ionizirajočega sevanja na kilogram tkiva:



Slika 29.3: Shematični prikaz biološkega učinka ionizirajočega sevanja. Makromolekula se lahko poškoduje neposredno, tako da jo sevanje razbije, lahko pa jo poškodujejo prosti radikali, ki nastanejo ob ionizaciji sosednjih molekul (največkrat so to ionizirane molekule vode). Zelo močne poškodbe makromolekul v celici vodijo v celično smrt, že nekaj poškodb molekule DNK pa lahko povzroči mutacije in nastanek raka.

$$D_{\text{abs}} = \frac{W_{\text{abs}}}{m} \quad (29.1)$$

Enota za absorbirano dozo je grey, $1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/kg}$.

Za merjenje biološkega učinka ionizirajočega sevanja so uvedli še *ekvivalentno dozo*, pri kateri se upošteva, da imajo različne vrste sevanja različen biološki učinek. Težki nabiti delci (protoni, delci alfa in ioni) v posamezni celici naredijo več ionizacij kot elektroni in fotoni, zato celicam relativno bolj škodujejo kot elektroni in fotoni. Ekvivalentno dozo izračunamo tako, da absorbirano dozo pomnožimo z *relativnim biološkim učinkom* (*RBU*)

$$D_{\text{ekv}} = RBU \cdot D_{\text{abs}} , \quad (29.2)$$

pri čemer je *RBU* za fotone in elektrone enak 1, za protone 2, za težje ione pa od 10 do 20. Enota za ekvivalentno dozo je sievert (Sv).

Biološki vpliv ionizirajočega sevanja je bolj zapleten od fizikalno-kemijskega, saj v celici obstajajo različni mehanizmi za popravljanje škode. Če je absorbirana doza velika, škode ni več mogoče popraviti in celica odmre. Smrtna doza za tkiva je približno nekaj Sv. Za srednje velike doze lahko sklepamo, da je verjetnost za škodo kar sorazmerna prejeti dozi: večja kot je doza, več ionizacij se zgodi v tkivu in večja je verjetnost, da bo katera od teh ionizacij povzročila poškodbo makromolekul oz. mutacijo DNK. Če je po drugi strani absorbirana

doza dovolj majhna, lahko celica z malo sreče škodo v celoti popravi in živi naprej brez trajnih posledic. Žal pa ne vemo, kako majhna doza (če sploh) je povsem nenevarna¹. Najboljši način za ocenjevanje majhnih doz je, da jih primerjamo z naravnim sevanjem, ki je v naši okolici vedno prisotno zaradi naravnih radioaktivnih izotopov. Povprečna doza, ki jo v Sloveniji dobimo z naravnim sevanjem v enem letu, je približno 2,6 mSv.

Ker ne vemo, katera doza bi bila pri izpostavljanju ionizirajočem sevanju še povsem varna, uporabljamo t. i. princip ALARA (As Low As Reasonably Achievable). Pacientov po nepotrebnem torej ne izpostavljamo sevanju, če pa so koristi preiskave večje od potencialne škode, preiskavo opravimo tako, da je pacient izpostavljen čim manj. Tipične doze nekaterih preiskav so navedene v tabeli 29.1. Če ima pacient enostavni zlom roke, jo lahko seveda brez slabe vesti slikamo in sicer raje z navadnim rentgenom kot s CTjem.

29.3 Detektorji ionizirajočega sevanja

Ionizirajočega sevanja z našimi čutili ne moremo zaznati (in se ga zato včasih bojimo še bolj, kot bi bilo upravičeno), zaznamo pa ga lahko s posebnimi detektorji. V tem razdelku bomo na kratko povzeli glavne vrste detektorjev, ki jih srečamo v medicini. Vsi detektorji ionizirajočega sevanja temeljijo na detekciji posledic ionizacij, ki jih v snovi povzroči sevanje (slika 29.4).

Zgodovinsko najstarejši detektor ionizirajočega sevanja je fotografski film s srebrovo soljo, ki ga je za detekcijo rentgenskih žarkov uporabljal že Roentgen. Ionizacije v filmu povzročijo nastanek srebrovih ionov, ki nato kemijsko reagirajo s kemikalijami, ki jih uporabimo med razvijanjem in fiksiranjem filma, ter tako na filmu pustijo temno sled (slika 29.4A). Slaba stran filma je v tem, da razvijanje traja nekaj časa, zato slike ne moremo videti takoj po slikanju. V digitalni dobi se je fotografski film praktično že povsem umaknil novejšim metodam, ki omogočajo, da sliko dobimo v trenutku in v digitalni obliki.

Pri drugem tipu detektorja zaznamo vidne fotone, ki nastanejo kot posledica ionizacij v snovi (slika 29.4B). Tako deluje fluoroskopija s fluorescenčnim zaslonom, pri kateri lahko rentgensko sliko opazujemo v živo s prostim očesom (odkar poznamo škodljivost rentgenskih žarkov, fluorescenčnih zaslonov ne gledamo več s prostim očesom, ampak jih snemamo s kamero in sliko

¹Učinkov majhnih doz ne poznamo predvsem zato, ker niso mnogo večji od naravnega ozadja in jih je zato praktično nemogoče zanesljivo izmeriti. Nekateri raziskovalci so npr. celo prepričani, da so majhne doze koristne za zdravje, saj smo se jim bili primorani skozi evolucijo prilagoditi (mutacije so celo potrebni pogoj, da evolucija sploh deluje).

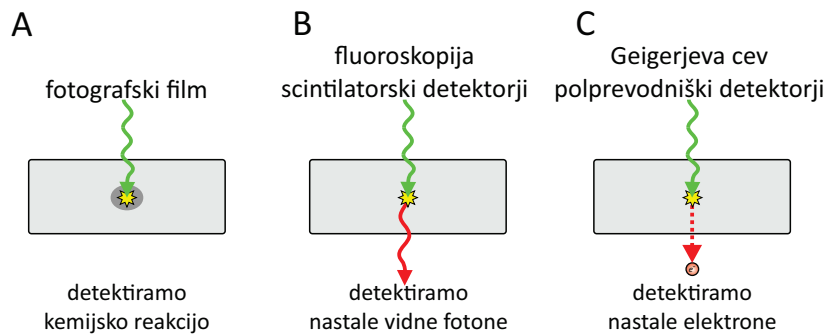
preiskava	ekvivalentna doza [mSv]
rentgen okončine	< 0,01
rentgen pljuč	0,02
CT glave	2
CT abdomna	10
scintigrafija ščitnice	1
PET glave	5
naravno sevanje v enem letu	~ 2,6

Tabela 29.1: Tipične doze ionizirajočega sevanja, ki jih pacient prejme pri nekaterih preiskavah (povzeto po [19]). Pri CT slikanju je pacient rentgenskih žarkom izpostavljen dlje časa kot pri navadnem rentgenskem slikanju, zato je tudi prejeta doza pri CTju bistveno večja. Z navadnim rentgenom bi se morali slikati približno 100 krat, da bi prejeli dozo, ki jo sicer v enem letu prejmemo zaradi naravnega sevanja naše okolice.

predvajamo operaterju, ki varno sedi v sosednji sobi). Še precej bolj občutljivi so *scintilacijski detektorji*, pri katerih sekundarni vidni fotoni nastanejo v posebnih kristalih, te fotone pa potem zaznamo z občutljivimi detektorji svetlobe (t. i. fotopomnoževalkami). Ime so dobili po latinski besedi *scintilla*, ki pomeni iskra. Te vrste detektorjev je mogoče miniaturizirati in povezati neposredno z računalnikom, zato se pogosto uporabljajo v slikovni diagnostiki.

V tretjo skupino spadajo detektorji, ki zaznajo neposredno elektrone, ki nastanejo ob ionizaciji. Najbolj znan tak detektor je Geiger-Müllerjev števec, pri katerem zaznavamo ionizacije v plinu, ki se nahaja med anodo in katodo. Ionizacija v plinu povzroči električni tok med katodo in anodo, zato jo zaznamo kot sunek električnega toka. Geiger-Müllerjev števec je pogosto povezan z zvočnikom, ki izmerjeno količino sevanja prevede v zvočni signal. V filmih o jedrskih katastrofah ponavadi uporabljajo prav Geiger-Müllerjev števec, saj

ima njegovo zlovesče prasketanje ob prisotnosti radioaktivnosti močan dramatični učinek. V zadnjih letih se vse bolj uveljavljajo tudi polprevodniški detektorji, ki delujejo podobno kot detektorji svetlobe v digitalnih kamerah.

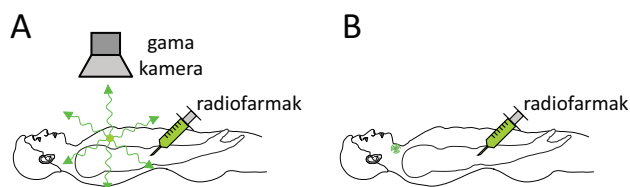


Slika 29.4: Shematični prikaz treh glavnih vrst detektorjev ionizirajočega sevanja. Vse vrste detektorjev temeljijo na zaznavi posledic ionizacij, ki jih v snovi povzroči ionizirajoče sevanje.

Poglavje 30

Osnove nuklearne medicine

Pridevnik »nuklearen« oz. »jedrski« je zaradi jedrskega orožja in radioaktivnosti v javnosti precej nepriljubljen. Vendar je radioaktivnost povsem naraven pojav, ki ga lahko poleg tega s pridom izkoriščamo v jedrskih elektrarnah za pridobivanje elektrike z majhnim ogljičnim odtisom, zelo uporaben pa je tudi v medicini (slika 30.1). Pri uporabi radioaktivnosti moramo biti seveda pazljivi, da ljudi po nepotrebnem ne izpostavimo škodljivemu ionizirajočemu sevanju, ki nastaja ob radioaktivnem jedrskem razpadu. V tem poglavju bomo najprej opisali radioaktivnost in z njo povezane vrste sevanja, nato pa še, kako to sevanje izkoriščamo pri diagnostiki in terapiji.



Slika 30.1: Shematični prikaz dveh primerov uporabe radioaktivnosti v nuklearni medicini. A) Pri diagnostičnih metodah nuklearne medicine pacientu vbrizgamo radioaktivno učinkovino (t. i. *radiofarmak*), ki se v telesu veže na točno določeno tkivo. Učinkovina oddaja žarke gama, ki jih zaznamo z gama kamero in tako »slikamo« iskano tkivo. B) Pri nuklearni terapiji pacientu v telo vnesemo radioaktivno snov, ki se prav tako veže na točno določeno tkivo in ga nato s svojim sevanjem uniči.

30.1 Jedra, izotopi in jedrska energija

Jedra atomov so sestavljena iz osnovnih delcev *nukleonov*, med katere spadata *proton*, ki ima pozitiven osnovni električni naboj $+e_0$, in *nevtron*, ki je nevtralen, njegova masa pa je podobna masi protona. Čeprav med protoni deluje odbojna električna sila, pa med obema vrstama nukleonov na kratkih razdaljah deluje tudi zelo močna jedrska sila, ki poskrbi, da se nukleoni držijo skupaj v jedru. Natančen opis jedrske sile ni enostaven in presega naše matematično znanje, zato si bodo morali radovedneži enačbe za jedrsko silo poiskati v kakšni knjigi za kvantno mehaniko. Mi bomo povedali le, da je jedrska sila tako močna, da za iztrganje nukleona iz stabilnega jedra potrebujemo energijo nekaj MeV, kar je milijonkrat več od energije, ki je potrebna, da molekulam iztrgamo elektron (spomnimo se, da je za ionizacijo molekul potrebno le nekaj eV).

V osnovnih stanjih atomov je število elektronov enako številu protonov, zato število protonov v atomskem jedru definira vrsto atoma (kemijski element). Število protonov v jedru zato imenujemo *vrstno število*, označimo pa ga z Z . Izkaže se, da imajo lahko jedra ene vrste različno število nevtronov in torej različno maso. Taka jedra oz. atome imenujemo *izotopi* izbranega kemijskega elementa. Da lahko različne izotope razlikujemo med seboj, kemijske elemente označujemo tako z njihovim vrstnim številom, kot tudi s skupnim številom nukleonov. Ker slednje opisuje maso izotopa, mu pravimo tudi atomsko masno število, označimo pa ga z A . Po dogovoru izotop elementa X z vrstnim številom Z in masnim številom A v splošnem označimo z

$${}^A_ZX.$$

Večina elementov iz periodnega sistema ima vsaj nekaj izotopov. Obstajajo npr. trije izotopi vodika: najpogostejši vodik ima v jedru le en proton (${}^1_1\text{H}$), obstajata pa še *devterij* (${}^2_1\text{H}$), ki ima v jedru en proton in en nevtron, ter *tricij* (${}^3_1\text{H}$), ki ima en proton in dva nevtrona. Vrstno število je enoznačno definirano že z oznako elementa, zato ga v praksi zapisujemo le, če ga želimo poudariti.

Za nas bo kasneje zelo pomembno dejstvo, da je kemijska aktivnost nekega elementa v prvi vrsti odvisna od njegovih elektronov oz. protonov, ne pa od števila nevtronov v jedru. Različni izotopi istega elementa lahko torej tvorijo enake kemijske spojine. Možno je npr. narediti vodo iz samih devterijev — njena molska masa je namesto 18 g/mol enaka 20 g/mol in je zato približno 10 % gostejša od navadne vode (tako vodo imenujemo *težka voda* in jo označimo z D_2O , saj devterij označujemo s simbolom D). Težka voda je kemijsko enaka navadni vodi, razlikuje pa se po vseh lastnostih, ki so povezane z maso,

ima npr. nižje lastne frekvence nihanja, pa tudi hitrost kemijskih reakcij v njej je malo drugačna.

Ko so izmerili mase različnih izotopov, so ugotovili, da njihova masa ni enaka vsoti mas njihovih protonov in nevtronov, temveč je nekaj manjša. Paradoks je pomagal razrešiti kdo drug kot Albert Einstein, ki je ugotovil, da masa ni nespremenljiva količina in je zapisal znamenito formulo za ekvivalenco mase in energije¹:

$$W = mc^2 . \quad (30.1)$$

Ta formula opisuje, da sta energija in masa le dve strani istega kovanca. Masa se lahko spremeni v energijo, energija v maso, sorazmernostna konstanta med njima pa je kvadrat svetlobne hitrosti. Pri majhnih energijah zgornje povezave ne opazimo, drugače pa je pri velikih energijah, ki jih srečamo v atomskem jedru. Jedrska vezavna energija je tako velika, da se pozna pri skupni masi vezanih protonov in nevtronov v jedru. Če hočemo jedro devterija razbiti na nevtron in proton, moramo vložiti toliko energije, da se to pozna na končni masi: razdeljena proton in nevtron imata skupno večjo maso, kot jo je imelo na začetku jedro devterija.

Mase jeder kemijskih elementov torej niso enostavne vsote mas protonov in nevtronov, ki jih sestavljajo. V kemiji so se zato dogovorili, da atomsko masno enoto definirajo kot 1/12 mase najbolj stabilnega (pogostega) izotopa ogljika $^{12}_6\text{C}$. V biologiji namesto izraza masna enota uporabljamo tudi *dalton* (Da) in velikost makromolekul izražamo v kilodaltonih. Velja

$$1 \text{ u} = 1 \text{ Da} = \frac{1}{12} m(^{12}_6\text{C}) \approx 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \approx 931,5 \text{ MeV}/c^2 . \quad (30.2)$$

V zadnjem izrazu zgornje enačbe smo masno enoto izrazili tudi z energijo v enoti MeV. Masi protona in nevtrona sta torej malo večji od masne enote: $m(p^+) \approx 1,008 \text{ u}$, masa nevtrona pa celo malenkost večja, $m(n) \approx 1,009 \text{ u}$. Iz mase enega protona ali nevtrona bi torej dobili približno 940 MeV energije. Masa elektrona je bistveno manjša: $m(e^-) \approx 0,00055 \text{ u}$, iz enega elektrona pa bi dobili 511 keV energije.

¹V popularni kulturi je formula bolj znana v svojem anglosaškemu zapisu, $E = mc^2$, saj tam energijo označujejo z E in ne z W kot pri nas.

Primer 30.1: koliko energije dobimo iz radioaktivnega razpada ^{131}I ?

Za terapevtsko zdravljenje ščitnice se pogosto uporablja izotop joda $^{131}_{53}\text{I}$, ki se pri spontani jedrski reakciji spremeni v stabilni izotop ksenona $^{131}_{54}\text{Xe}$ (pri tej reakciji se en nevtron v jedru joda spremeni v proton, zato se vrstno število poveča, masno pa se ne spremeni). Izračunajmo, koliko energije se sprosti ob tej reakciji!

V Wikipediji lahko najdemo podatka za maso obeh izotopov:

$$m(^{131}_{53}\text{I}) = 130,9061246 \text{ u} \quad (30.3)$$

$$m(^{131}_{54}\text{Xe}) = 130,9050824 \text{ u} \quad (30.4)$$

Razlika mas ksenona in joda je torej $\Delta m \approx 0,001 \text{ u}$. Z drugimi besedami, pri pretvorbi joda $^{131}_{53}\text{I}$ v ksenon $^{131}_{54}\text{Xe}$ se v obliki sevanja sprosti približno tisočinka masne enote energije oz. približno 930 keV, kar je dovolj kar za nekaj 100 ionizacij molekul!

30.2 Jedrski razpadi in radioaktivnost

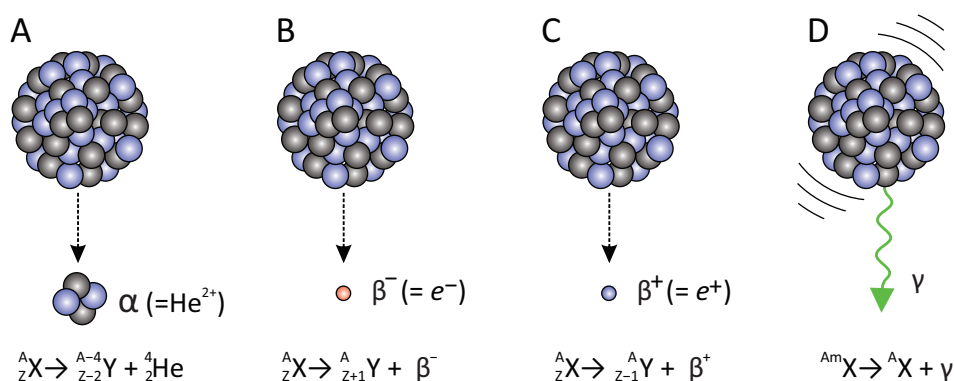
Nekateri izotopi so stabilni, drugi pa so nestabilni in spontano razpadajo oz. se spreminjajo dokler se ne spremenijo v katerega od stabilnih izotopov. Ogljik ima npr. dva stabilna izotopa (^{12}C in ^{13}C), poleg tega pa kar 13 nestabilnih (od ^8C do ^{22}C). Elementi v periodnem sistemu, ki imajo vrstno število večje od svinca ($_{82}\text{Pb}$), so vsi nestabilni. Nestabilnim izotopom pravimo tudi *radioaktivni izotopi*, saj ob razpadu oz. spreminjanju višek energije oddajo s sevanjem visokoenergijskih delcev (alfa, beta in gama), ki jih prištevamo med ionizirajoče sevanje in smo jih spoznali v prejšnjem poglavju, še enkrat pa jih povzemamo na sliki 30.2. Praktično vsi naravni elementi imajo tudi kakšen radioaktiven izotop (primer 30.2).

Primer 30.2: banani ekvivalentna doza

Radioaktivni izotopi so povsem naravni pojav, le da so v naravi relativno redkejši od stabilnih izotopov. Obstaja npr. več kot 20 izotopov kalija (od ^{31}K do ^{56}K), pri čemer so v naravi najpogostejši trije: največ kalija je v obliki dveh stabilnih izotopov ^{39}K (93,258 %) in ^{41}K (6,73 %) ter enega radioaktivnega izotopa ^{40}K (0,012 %). Če torej v trgovini z bio-hrano kupimo kalijevo sol (KCl), bo v njej hočeš nočeš tudi nekaj radioaktivnega kalija ^{40}K , zato bo sol radioaktivna. Seveda je pa je to sevanje zelo majhno in težko rečemo, da škoduje zdravju (v prejšnjem poglavju smo videli, da od naravnega sevanja dobimo dozo približno 2,6 mSv na leto).

Da bi javnost opozorili na obstoj naravne radioaktivnosti in z njo povezanega sevanja, so fiziki malo za šalo, malo pa zares definirali *banani ekvivalentno dozo*, to je dozo,

ki jo dobimo, če pojemo povprečno veliko banano. Banane so namreč malenkost bolj radioaktivne od povprečne okolice, saj je v njih veliko kalija. Meritve so pokazale, da je ena banani ekvivalentna doza (BED) enaka $0,1 \mu\text{Sv}$. Če pojemo 200 banan torej dobimo približno enako dozo kot pri enem rentgenskem slikanju (spomnimo se tabele 29.1).



Slika 30.2: Shematični prikaz štirih vrst sevanja, ki nastaja pri radioaktivnem razpadu in je pomembno v medicini. Pri vseh jedrskih reakcijah se ohranja celotno število nukleonov in pa celotni električni naboj. A) Sevanje alfa nastaja pri razpadu zelo velikih jedr, pri čemer iz jedra odleti delec alfa (helijevo jedro). Vrstno število jedra se zmanjša za 2, masno pa za 4. B) Jedra, ki imajo relativno premalo nevtronov se spremenijo s t. i. razpadom beta minus. Pri tem razpadu se en proton v jedru spremeni v nevtron, iz jedra pa odleti hitri elektron (delec beta minus). Vrstno število jedra se poveča za 1. C) Jedra, ki imajo relativno preveč nevtronov, se spremenijo s t. i. razpadom beta plus. Pri tem razpadu se en nevtron v jedru spremeni v proton, iz jedra pa odleti pozitron (delec beta plus). Pozitron je anti-delec elektrona, to pomeni da ima enako maso kot elektron, a pozitivni električni naboj. Vrstno število jedra se zmanjša za 1. Ob razpadih beta iz jedra odletita tudi osnovna delca anti-nevtrino oz. nevtrino, ki pa v medicini nista pomembna. D) Pri jedrskih reakcijah včasih nastanejo jedra, ki so v vzbujenem stanju (vzbujeno – metastabilno – stanje označimo z m ob masnem številu). Ko se taka jedra relaksirajo v osnovno stanje, višek energije oddajo v obliki fotona gama sevanja.

Radioaktivni razpad je naključen proces, kar pomeni, da za posamezno radioaktivno jedro ne moremo napovedati točno kdaj bo razpadlo, vemo le

kakšna je verjetnost, da bo razpadlo v določenem času². Za različne izotope je ta verjetnost različna, najlažje pa jo opišemo z razpolovnim časom, tj. časom, v katerem je verjetnost za razpad $1/2$. Z drugimi besedami: če imamo veliko število radioaktivnih jeder, jih v razpolovnem času razpade približno polovica. Gre torej za eksponenten proces (v določenem času se št. jeder zmanjša za določen faktor), zato lahko odvisnost števila jeder od časa opišemo z enačbama:

$$N(t) = N_0 2^{-t/t_{1/2}} = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (30.5)$$

pri čemer je N_0 začetno število jeder. Konstanta λ v zapisu z naravno osnovo se imenuje *razpadna konstanta*. Zapis z osnovo 2 in naravno osnovo sta povsem ekvivalentna, zato lahko uporabimo tistega, ki je v dani situaciji bolj praktičen. Med razpolovnim časom in razpadno konstanto velja znana zveza $\lambda = \ln 2 / t_{1/2}$, ki smo jo izpeljali že v analognem primeru zapisa eksponentne odvisnosti pri absorpcijskem zakonu (primer 1.6).

Pomembna informacija o radioaktivnih vzorcih je njihova *aktivnost*, ki opisuje, kako močno sevajo. Sevanje izvira iz jedrskih razpadov, zato lahko aktivnost vzorca definiramo kar kot število razpadov, ki se v njem zgodijo vsako sekundo. Uganemo lahko, da je aktivnost vzorca tem večja, čim več radioaktivnih jeder vzorec vsebuje in čim hitreje ta jedra razpadajo (čim krajši je razpolovni čas oz. čim večja je razpadna konstanta). Izračunamo jo lahko s pomočjo ugotovitve, da se v določenem času število radioaktivnih jeder v vzorcu zmanjša ravno za število razpadov v vzorcu. Aktivnost lahko torej izračunamo kot minus odvoda števila jeder v vzorcu (en. 30.5) po času

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}, \quad (30.6)$$

oziroma

$$A(t) = \lambda N(t). \quad (30.7)$$

²Prisotnost naključja v kvantnem svetu je eden od najbolj nenavadnih fenomenov v sodobni znanosti. Še Albert Einstein ni mogel verjeti, da ima Narava v svoje procese vgrajena naključja, in je verjel, da »bog ne kocka.« Skupaj z nekaterimi kolegi je bil prepričan, da bi naključni procesi v Naravi lahko privedli do paradoksov kot je npr. Schroedingerjeva mačka, ki je hkrati živa in mrtva. Kljub temu pa do danes ni nikomur uspelo pokazati drugače, zato obnašanja Narave ne znamo razložiti brez naključnih dogodkov v kvantnem svetu, na katere z zunanjimi dejavniki ne moremo vplivati. Po drugi strani so nekateri mnenja, da nam lahko ravno kvantna mehanika s svojimi naključji vrne svobodno voljo, ki smo jo izgubili s Newtonovskim determinizmom.

Aktivnost vzorca je torej kar enaka produktu razpadne konstante in števila radioaktivnih jeder v njem. Enota SI za aktivnost je becquerel oz. razpad na sekundo, pri čemer je $1 \text{ Bq} = 1/\text{s}$. V starejši literaturi se uporablja tudi enota curie (Ci), ki je bila definirana glede na aktivnost 1 mg čistega radija ^{226}Ra ; velja $1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$. Uporaba računanja z razpolovnim časom in aktivnostjo v praksi je prikazana v primeru 30.3.

Primer 30.3: računanje aktivnosti pri radioterapiji

Poglejmo si uporabo pojmov aktivnost in razpolovni čas pri radioterapiji. Bolno ščitnico je včasih najbolje odstraniti z radioaktivnim jodom ^{131}I . Postopek poteka tako, da pacient zaužije radioaktivni jod, ki se nato nabere v ščitnici in jo s svojim sevanjem uniči. Po posegu se mora pacient še nekaj časa izogibati tesnejšim stikom z drugimi ljudmi (še posebej z otroki in nosečnicami), saj bi bili lahko le-ti po nepotrebnem obsevani. V karanteni mora biti toliko časa, da aktivnost joda v telesu pade pod zahtevano vrednost (količina joda v telesu se zmanjšuje zaradi njegovega razpadanja in izločanja iz telesa). Razpolovni čas za ^{131}I je približno 8 dni.

1. Za začetek izračunajmo, koliko gramov radioaktivnega joda mora zaužiti pacient, če mora biti aktivnost zaužitega joda 3 GBq?

Spomnimo se zveze med aktivnostjo, razpadno konstanto in številom radioaktivnih jeder v vzorcu (en. 30.7). Razpadno konstanto lahko izračunamo iz razpolovnega časa, število jeder in njihova mase pa sta povezana preko molske mase, ki jo razberemo iz atomskega masnega števila, $M(^{131}\text{I}) = 131 \text{ g/mol}$. Maso joda z zahtevano aktivnostjo lahko torej izračunamo kot

$$m = Mn = M \frac{N_0}{N_A} = \frac{MA_0}{N_A \lambda} = \frac{MA_0 t_{1/2}}{N_A \ln 2} = \quad (30.8)$$

$$= \frac{131 \text{ g}}{\text{mol}} \cdot \frac{3 \cdot 10^9}{\text{s}} \cdot \frac{8 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} \cdot \text{mol}}{6,02 \cdot 10^{23} \cdot \ln 2} = 0,65 \mu\text{g} \quad (30.9)$$

Pri tem smo morali razpolovni čas izraziti v sekundah.

2. Sedaj izračunajmo še, koliko časa moramo počakati, da aktivnost zaužitega joda pade na 300 MBq.

Iz enačb 30.5 in 30.7 lahko razberemo, da tudi aktivnost pada eksponentno s časom, enako kot št. radioaktivnih jeder:

$$A(t) = A_0 2^{-t/t_{1/2}}.$$

Izračunati moramo torej čas, v katerem bo aktivnost le še desetina začetne:

$$0,1A_0 = A_0 2^{-t/t_{1/2}} \Rightarrow \ln 0,1 = -t/t_{1/2} \ln 2 \Rightarrow t = \frac{-\ln 0,1}{\ln 2} t_{1/2} \approx 3,3 t_{1/2} \approx 27 \text{ d}$$

Aktivnost bo torej za faktor 10 padla po nekaj več kot treh razpolovnih časih oz. po približno enem mesecu. Če bi hoteli, da aktivnost pade za faktor 1000 bi morali tako počakati kar tri mesece. V praksi se na srečo količina radioaktivnega joda v telesu ne zmanjšuje le zaradi radioaktivnega razpada ampak tudi zaradi izločanja iz telesa,

zato pada hitreje od zgornje ocene. Tipično lahko pacient bolnišnico zapusti v nekaj dneh po posegu, ne da bi s tem predstavljal večjo nevarnost za okolje. Po drugi strani se mora pacient zavedati, da bodo njegov pot, urin in blato še nekaj časa po posegu radioaktivni.

30.3 Uporaba radioaktivnosti v terapiji in slikovni diagnostiki

Slikovne tehnike, kot so rentgen, CT, MR in ultrazvok, so odlične za vizualizacijo anatomskih podrobnosti v telesu, vendar pa je nekatere bolezenske spremembe tkiv z njimi težje zaznati in oceniti. Tu medicini na pomoč priskoči nuklearna diagnostika. Osnovni princip nuklearnih diagnostičnih metod je bil prikazan na sliki 30.1A: v pacienta vbrizgamo radioaktivno učinkovino, ki se nato veže na določeno mesto, npr. na tkivo z bolezenskimi znaki. Taki učinkovini pravimo tudi *radiofarmak* ali pa *radioaktivno sledilo*. Radiofarmak oddaja žarke gama, ki jih zaznamo z *gama kamero* in tako določimo mesto iskanega tkiva v telesu in njegovo obliko. Gama kamera je zelo občutljiva, zato lahko uporabno sliko dobimo že z majhno količino radiofarmaka. Prejeta doza ionizirajočega sevanja ob taki preiskavi je tako primerljiva z dozo, prejeta pri CT slikanju.

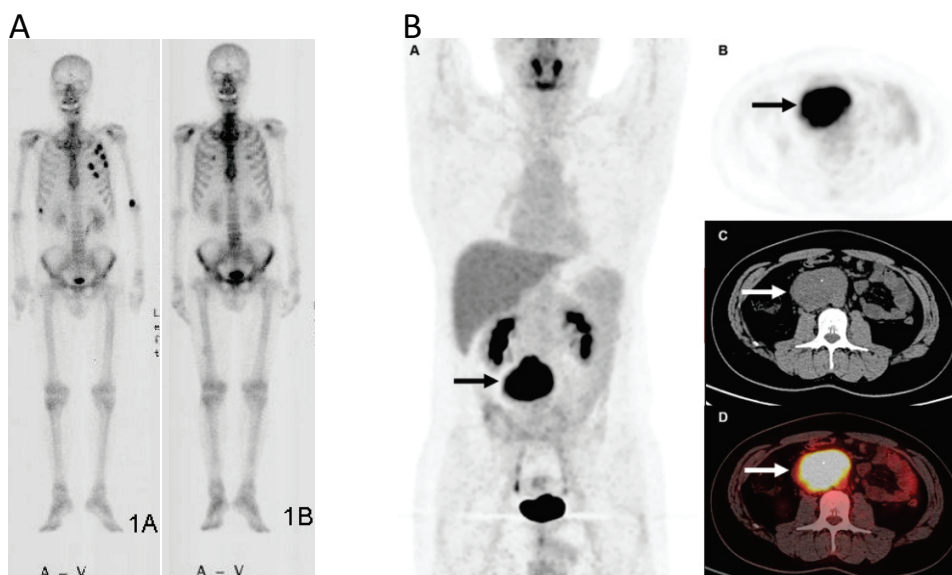
Radiofarmak je biološko aktivna spojina (npr. protitelo, ki se vežejo na maligno rakasto tvorbo), pri kateri so nekateri normalno stabilni atomi nadomeščeni z ustreznimi radioaktivnimi izotopi. Ker se radioaktivni izotopi s kemijskega stališča obnašajo enako kot stabilni, se tudi radiofarmak v telesu obnaša enako kot naravna spojina. Radiofarmake izdelujejo v posebnih laboratorijih, kjer radioaktivne izotope ustvarijo s pomočjo pospeševalnikov in jedrskih reakcij.

Radiofarmaki, ki jih uporabljamo v diagnostiki, morajo imeti dve ključni lastnosti:

- Radiofarmaki za diagnostiko morajo oddajati žarke gama, ne pa žarkov alfa ali beta minus. Prodornost slednjih je namreč premajhna, da bi lahko prišli iz telesa, zato bi pacientu le škodovali, diagnostične vrednosti pa ne bi imeli.
- Radiofarmaki se morajo v pacientu zadržati čim manj časa, saj si ne želimo, da bi pacient še dolgo po preiskavi seval žarke gama in s tem škodoval sebi in svoji okolici. Zato moramo uporabljati izotope s čim krajšim

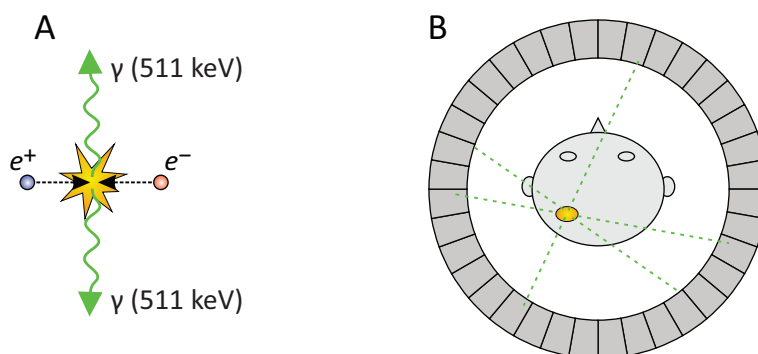
razpolovnim časom in jih vgraditi v biološko aktivne učinkovine, ki se čim hitreje izločajo iz telesa.

Osnovno metodo nuklearne diagnostike smo omenili že v uvodu (slika 30.1A). Metoda se strokovno imenuje *scintigrafija*, saj delovanje gama kamere temelji na scintilacijskih detektorjih, ki smo jih omenili v prejšnjem poglavju (slika 29.4). Z osnovno scintigrafijo dobimo 2D sliko telesa (slika 30.3A), če pa potrebujemo 3D sliko telesa, moramo – podobno kot pri CT – preiskovanca slikati z več strani in nato 3D sliko sestaviti s pomočjo računalnika. V nuklearni medicini se taka metoda imenuje SPECT (single-photon emission computed tomography). Eden najpogostejše uporabljenih izotopov za scintigrafijo je tehnečij ^{99m}Tc , ki oddaja gama žarke z energijo 140 keV, njegov razpolovni čas pa je le 6 ur. Oznaka m v ^{99m}Tc označuje, da gre za vzbujeni (meta-stabilni) tehnečij, ki se v stabilni ^{99}Tc relaksira z oddajo fotona gama.



Slika 30.3: Primera nuklearne slikovne diagnostike. A) Primer scintigrafije skeleta z radiofarmakom ^{99m}Tc -HMDP (hidroksimetilen-difosfonat), ki se preferenčno veže na lezije, ki jih na kosteh povzročajo metastaze kolorektalnega karcinoma. Na levi strani je slika posneta pred kemoterapijo, na desni pa po njej. Na desni sliki so vidne zmanjšane metastaze na rokah in rebrih. B) Primer kombinirane presikave PET in CT pri diagnozi paraganglioma. CT poda sliko z dobro anatomsko resolucijo, PET pa informacijo, kje se kopiči biološko aktivni radiofarmak (v primeru na sliki je to ^{18}F -fluoredeoksiglukoza, ki se nabira na mestih s povečano metabolno aktivnostjo).

Posebna podvrsta scintigrafije je *pozitronska emisijska tomografija* (PET). Pri njej pacientu vbrizgamo radiofarmak, ki oddaja delce beta plus – pozitronne. Pozitron v tkivu hitro trči v svoj anti-delec elektron in se z njim anihilira, pri čemer se masi elektrona in pozitrona spremenita v čisto energijo v obliki dveh fotonov gama z energijo 511 keV (slika 30.4). Nastala fotona gama zaradi ohranitve gibalne količine odletita v nasprotnih smereh. Pri PET so detektorji razporejeni v krogu okoli pacienta zato se ob vsaki anihilaciji sprožita dva nasprotno-ležeča detektorja. Mesto izvora sevanja v telesu lahko tako natančno določimo. Radioaktivni izotopi za PET morajo oddajati beta plus delce. V medicini se najpogosteje uporabljata izotop fluora ^{18}F z razpolovnim časom 110 minut in izotop galija ^{68}Ga z razpolovnim časom 68 minut. Fluor se uporablja v fluorodeoksiglukozi, ki v telesu označuje mesta s povečano metabolno aktivnostjo, galij pa v npr. različnih peptidih, ki se vežejo na nevroendokrine tumorje, ki jih z drugimi metodami težko diagnosticiramo.



Slika 30.4: Shematični prikaz delovanja pozitronske emisijske tomografije (PET). A) Pri tej metodi uporabljamo radiofarmake, ki razpadajo z beta plus razpadom in torej oddajajo pozitronne. Oddani pozitron (e^+) bo v tkivu hitro srečal elektron (e^-), ki je njegov anti-delec, zato se bo z njim anihiliral. Pri anihilaciji se vsa masa elektrona in pozitrona spremeni v dva fotonov gama z energijo 511 keV, ki zaradi ohranitve gibalne količine odletita v nasprotnih smereh. B) V napravi za PET so detektorji za fotone gama nameščeni v krogu okoli pacienta. Vsako anihilacijo tako zaznamo z dvema detektorjema hkrati, pri čemer vemo, da je bil izvor nekje na veznici med njima. V tarčnem tkivu nastaja veliko parov fotonov gama, ki letijo v vse smeri, zato lahko s pomočjo veznic med pari hkratno vzbujenih detektorjev brez težav določimo mesto izvora.

Metode nuklearne diagnostike pogosto kombiniramo tudi s klasičnim CT, saj na ta način dobimo dvojno informacijo: CT nam da dobro anatomsko sliko

telesu, SPECT ali PET pa še informacijo o biološki aktivnosti v telesu (slika 30.3B).

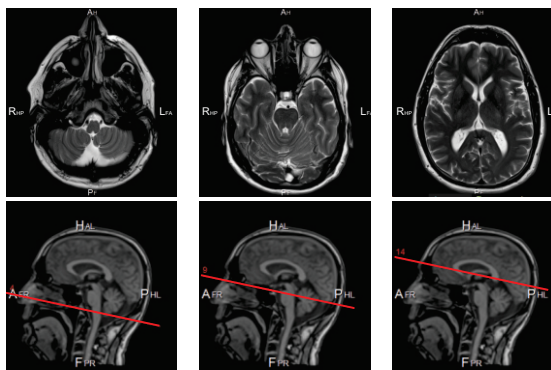
Za konec nekaj besed namenimo še terapiji z ionizirajočim sevanjem, ki je bila shematično predstavljena na sliki 30.1B. Pri radio-diagnostičnih metodah poskušamo celicam v telesu škodovati čim manj, pri radio-terapevtskih metodah pa je ravno obratno, saj si z njimi želimo odstraniti določeno tkivo, npr. rakasto tkivo ali pa bolno ščitnico pri hipertiroidizmu (premočnem delovanju ščitnice). Terapevtski radiofarmaki se morajo zato preferenčno vezati na bolno tkivo in morajo po možnosti oddajati beta minus sevanje z ne preveliko energijo. Tako sevanje namreč prodre le nekaj mm daleč, zato uniči le tkivo v neposredni bližini, oddaljenemu tkivu pa ne škoduje. Za radioterapevtsko zdravljenje hipertiroidizma in raka ščitnice se npr. pogosto uporablja ^{131}I (primer 30.3), ki pri razpadu večino energije odda v obliki beta minus delcev z energijo manjšo od 1 MeV. V pacienta lahko radioaktivno snov vgradimo tudi kirurško, takšna metoda se imenuje *brahiterapija*. Bolno tkivo lahko seveda obsevamo tudi od zunaj, pri čemer uporabljamo zunanje izvore ionizirajočega sevanja, npr. linearne pospeševalnike (slika 29.1).

Poglavje 31

Slikanje z magnetno resonanco

Slikanje z magnetno resonanco¹ (MR) je poleg ultrazvoka, rentgena in računalniške tomografije (CT) najbolj razširjena slikovna diagnostična metoda. Podobno kot CT tudi slikanje z MR ustvari 3D sliko struktur v telesu (slika 31.1), prednost MR pa je predvsem v tem, da dobi dober kontrast tudi med številnimi mehкими tkivi in pa da preiskovanca ne izpostavi ionizirajočemu sevanju. Pomanjkljivosti metode sta njena relativno visoka cena in dolg čas slikanja, med katerim mora preiskovanec mirovati v MR napravi. Na srečo se z napredkom tehnologije ti dve slabosti izboljšujeta, zato lahko pričakujemo, da bo slikanje z MR v prihodnosti vedno bolj dostopno.

Slika 31.1: Primer magnetno-resonančne slike glave. Z MR ustvarimo 3D sliko telesa, ki si jo lahko nato v različnih prerezih ogledamo na računalniku. Na MR slikah je dober kontrast tudi med različnimi mehкими tkivi, npr. med različnimi deli možganov.



V tem poglavju bomo opisali osnovni princip slikanja z MR in ob tem spoznali, da je mehanizem nastanka MR slike popolnoma drugačen kot pri rent-

¹Magnetno resonanco so na začetku imenovali *jedrska* oz. *nuklearna magnetna resonanca* (NMR), vendar so pridevnik »jedrska« in »nuklearna« kasneje začeli opuščati, saj ima v javnosti ta pridevnik negativen prizvok.

genu ali ultrazvoku.

31.1 Osnovni princip slikanja z MR

Slikanje z magnetno resonanco temelji na dejstvu, da imajo jedra nekaterih atomov magnetni dipol, ki je tesno povezan z njihovo kvantno lastnostjo spina. Jedra so torej majhni trajni magnetki oz. nekakšni majhni kvantni kompasi. Poglobljeno razumevanje delovanja magnetne resonance zahteva znanje kvantne mehanike in presega naše okvire, zato si bomo za razumevanje osnovnega principa slikanja z magnetno resonanco pomagali z dvema analogijama. Prva bo analogija med jedrskim dipolom in iglo kompasa, druga analogija pa med jedrskim dipolom in elektronom v atomu, ki je nam najbolj poznani kvantni objekt.

Ko jedrske magnetne dipole postavimo v zunanje magnetno polje, se obnašajo kot majhni kompasi in se v ravnovesju v povprečju orientirajo v smer polja. Podobno kot lahko iglo kompasa v Zemljinem magnetnem polju z silo odklonimo iz ravnovesne lege, lahko iz ravnovesja vzbudimo tudi jedrske magnetne dipole. Kot pa je navada v kvantnem svetu (spomnimo se vzbujanja elektronov v atomih), lahko jedrske magnetne dipole v vzbujeno stanje vzbudimo le s fotoni z natančno določeno energijo tj. z elektromagnetnim valovanjem z natančno določeno frekvenco. To frekvenco imenujemo *resonančna frekvenca* in po njej je metoda tudi dobila svoje ime (v literaturi se resonančna frekvenca imenuje tudi *Larmorjeva frekvenca*). Izkaže se, da je resonančna frekvenca za jedrske magnetne dipole odvisna od gostote magnetnega polja po naslednji enačbi:

$$\nu = \frac{\gamma B_0}{2\pi}, \quad (31.1)$$

kjer je B_0 gostota magnetnega polja, v katerem se nahaja jedro, γ pa je t. i. *giromagnetno razmerje*, ki opisuje, kako močan magnetni dipol je jedro.

Za slikanje z MR uporabljamo jedra vodika, saj so ta jedra med vsemi najmočnejši magnetni dopoli, hkrati pa so v naših telesih tudi najbolj številčna. V primeru 31.1 pokažemo, da so resonančne frekvence vodikovih jeder pri MR enake frekvencam radijskih valov. Fotoni radijskih valov imajo energijo, ki je daleč nižja od energije, ki je potrebna za ionizacijo (spomnimo se tabele 26.1 v poglavju o elektromagnetnem valovanju, v kateri so navedene energije različnih vrst fotonov). Preiskovanec med slikanjem z MR torej ni izpostavljen

ionizirajočem sevanju.

Primer 31.1: MR preiskovanja ne izpostavi ionizirajočemu sevanju

Med slikanjem z MR je preiskovanec izpostavljen elektromagnetnemu sevanju, ki ima resonančno frekvenco jedrskih magnetnih dipolov. Izračunajmo to frekvenco za vodikova jedra in ocenimo, ali gre v tem primeru za ionizirajoče sevanje!

Iz enačbe 31.1 vidimo, da je resonančna frekvenca jedrskih magnetnih dipolov odvisna od njihovega giromagnetnega razmerja (γ), ki pove, kako močni magnetki so jedra, ter od gostote magnetnega polja, v katerem se nahajajo. Spodnja tabela prikazuje giromagnetna razmerja za nekatere pogoste vrste jeder:

jedro	^1H	^{31}P	^{23}Na
γ [MHz/T]	267,5	108,3	70,7

Tipična gostota magnetnega polja v napravah za slikanje z magnetno resonanco je od 1 T do 3 T (v najnovejših napravah pa še nekaj več), kar je približno 50.000 krat več od gostote magnetnega polja zemlje. Frekvenco izračunajmo za vodikova jedra, ki so v magnetnem polju z gostoto 2,097527 T. Iz enačbe za Larmorjevo frekvenco (en. 31.1) sledi:

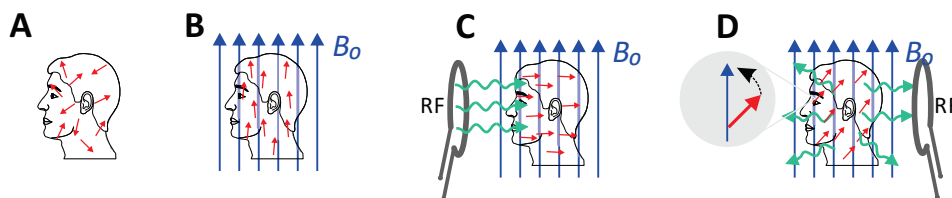
$$\nu = \frac{\gamma B_0}{2\pi} = \frac{267,5 \text{ MHz} \cdot 2,097527 \text{ T}}{\text{T} \cdot 2\pi} = 89,3 \text{ MHz} ,$$

kar je, zanimivo, ravno enako frekvenci Radia Študent v Ljubljani! Slikanje z MR ni torej nič bolj nevarno od poslušanja Radia Študent.

Če iglo kompasa iz ravnovesne smeri odmaknemo in izpustimo (in tako iglo »vzbudimo«), bo igla zanihala, njeno nihanje pa bo s časoma zamrlo (se »relaksiralo«) in igla bo spet dosegla ravnovesje ter kazala proti severu. Podobno je z magnetnimi dipoli jeder – po vzbujanju z zunanjimi radijskimi valovi se bodo jedrski magnetni dipoli relaksirali nazaj proti ravnovesju, pri tem pa bodo tudi sami oddajali radijske valove z resonančno frekvenco. Relaksacija magnetnih dipolov pa je malo drugačna od relaksacije elektronskih stanj v atomih, ki se lahko relaksirajo spontano, brez sodelovanja atomov v bližini (spomnimo se fluorescence, pri kateri relaksacija poteče praktično v trenutku). Relaksacija magnetnih dipolov jeder lahko traja tudi do nekaj 100 ms, poleg tega pa je relaksacija enega jedra zelo odvisna od interakcije z drugimi jedrskimi magnetnimi dipoli v bližini. Relaksacija jeder v nekem tkivu je zato zelo odvisna od njegove kemijske sestave in, kot bomo videli v naslednjem razdelku, je ravno to ključna lastnost magnetne resonance, ki nam omogoča razlikovanje med različnimi tkivi.

Sedaj imamo dovolj informacij, da lahko opišemo osnovni princip slika-

nja z magnetno resonanco (slika 31.2). V napravi za slikanje z magnetno resonanco je močno magnetno polje, ki ga ustvarimo s pomočjo velike tuljave (spomnimo se primera ??). Ko preiskovanca postavimo v to magnetno polje, se magnetni dipoli jeder v povprečju obrnejo v njegovo smer (slika 31.2B). Nato s pomočjo radiofrekvenčnih valov jedra vzbudimo (slika 31.2C). Ko se jedra relaksirajo in vračajo nazaj v ravnovesje, tudi sama oddajajo radijske valove z resonančno frekvenco. Obnašanje jeder med relaksacijo je odvisno od sestave tkiva, kar nam pomaga, da na osnovi radijskih valov, ki prihajajo iz tkiv rekonstruiramo sliko organov v notranjosti telesa (slika 31.2D). Več o tem bomo spoznali v naslednjih dveh razdelkih.



Slika 31.2: Shematični prikaz postopka slikanja z magnetno resonanco. A) Jedra vodikovih atomov imajo magnetne dipole, ki so v odsotnosti zunanjega magnetnega polja orientirani naključno. B) Ko preiskovanca postavimo v močno magnetno polje, se magnetni dipoli jeder v povprečju usmerijo proti smeri zunanjega polja. C) **Vzbuja-nje**. Z radijskimi valovi (RF - radijska frekvenca), ki imajo resonančno frekvenco, jedra vzbudimo v vzbujeno stanje. D) **Relaksacija**. Jedra se iz vzbujenega stanja relaksirajo nazaj proti ravnovesju in pri tem oddajajo radijske valove z resonančno frekvenco. Na osnovi teh signalov lahko sestavimo sliko telesa.

31.2 Relaksacijski časi in nastanek kontrasta med tkivi

Magnetno resonančna slika nastane na osnovi radijskih valov, ki jih med relaksacijo oddajajo vodikova jedra v tkivih. Signal iz tkiva je v splošnem odvisen od gostote vodika v njem (večja kot je gostota, močnejši je signal), hkrati pa na njegovo jakost vpliva tudi hitrost relaksacije. Poleg tega lahko signal iz tkiva detektiramo le, če ga sinhrono (v fazi) oddaja zelo veliko število sosednjih jeder, saj je signal iz enega samega jedra prešibak.

Natančnejša analiza, ki presega okvire tega učbenika, razkrije, da gre pri relaksaciji jedrskih magnetnih dipolov pravzaprav za dva eksponentna pro-

cesa. Prvi proces je preprosto vračanje sistema proti ravnovesju, pri čemer jedra oddajajo v okolico energijo, ki so jo prejela z vzbujanjem. Značilni čas te relaksacije imenujemo *spinsko-mrežni* relaksacijski čas in ga označimo s T_1 . Drugi proces, zaradi katerega se zmanjšuje signal iz jeder, je povezan z njihovo medsebojno interakcijo, zaradi katere signali iz sosednjih jeder izgubijo medsebojno sinhronost. Značilni čas tega procesa imenujemo *spinsko-spinski* relaksacijski čas in ga označimo s T_2 . Ponavadi se sinhronost sosednjih jeder izgubi hitreje, kot se sistem vrne v ravnovesje, zato je T_2 krajši od T_1 . Različna tkiva imajo različno kemijsko sestavo, zato imajo vodikova jedra v njih različno soseščino, kar privede to tega, da se hitrost relaksacije med različnimi vrstami tkiva razlikuje. Tipični relaksacijski časi T_2 so od nekaj 10 ms do 100 ms, relaksacijski časi pa T_1 pa od nekaj 100 ms do 1000 ms (relaksacijski časi za nekatera tkiva so prikazani v tabeli 31.1).

tkivo	T_2 [ms]	T_1 [ms]
siva možganovina	101	921
bela možganovina	92	787
možganska tekočina	1500	3000
jetra	43	493

Tabela 31.1: Relaksacijski časi v nekaterih tkivih pri gostoti magnetnega polja 1,5 T povzeto po ([20]).

Tkiva se torej med seboj razlikujejo po gostoti vodika in po hitrosti relaksacije jedrskih dipolov po vzbujanju. Spretni radiologi znajo z uporabo različnih tehnik slikanja izkoristiti katero koli od teh razlik med tkivi (ali pa vse hkrati), tako da na sliki med različnimi tkivi dobijo dober kontrast. Mi si bomo približje pogledali le eno od najosnovnejših tehnik, ki jo imenujemo slikanje s spinskim odmevom (angl. spin-echo). Ta tehnika izrablja razlike v spinsko-spinskih relaksacijskih časih T_2 .

Signal, ki ga po vzbujanju oddajajo jedra, lahko zaznamo le, če ga jedra oddajajo sinhrono (v fazi). Pri tehniki slikanja s spinskim odmevom hkrati vzbudimo vsa jedra v telesu, nato pa po kratkem časovnem zamiku zabele-

žimo radiofrekvenčne »odmeve« iz telesa. Zaradi interakcij med sosednjimi jedri se bo med relaksacijo izgubljala njihova sinhronost, zato bo jakost odmeva iz tkiva pojemala eksponentno s časom, pri čemer bo značilni čas tega pojemanja enak spinsko-spinskem relaksacijskem času:

$$I_{SE} \propto e^{-T_{SE}/T_2}, \quad (31.2)$$

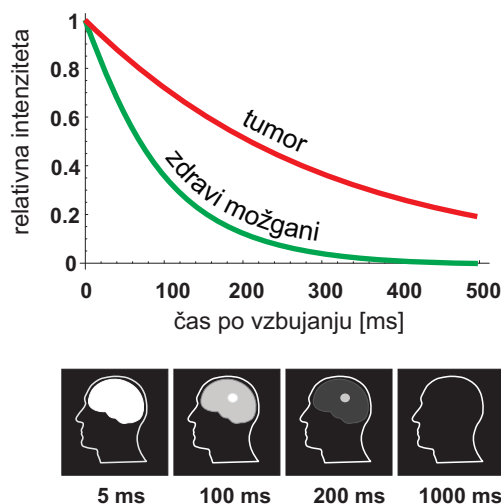
kjer je I_{SE} jakost zaznanega odmeva iz določenega tkiva (SE označuje spin-echo), T_{SE} je časovni zamik po vzburjanju, pri katerem detektiramo odmev, T_2 pa je spinsko-spinski relaksacijski čas v tem tkivu. Ker se tkiva relaksirajo različno hitro, bo tudi jakost zaznanega odmeva iz različnih tkiv različna – na sliki bodo bolj svetla tista tkiva, ki so bila ob času detekcije odmeva bolj vzburjena (slika 31.3). Za dober kontrast med dvema tkivi moramo zato odmev iz telesa zabeležiti ob ravno pravem času in sicer takem, da bo eno tkivo že zrelaksirano, drugo pa še ne in bo prvo na sliki temno, drugo pa svetlo.

Če bi po vzburjanju odmeve zabeležili prehitro, bi bila vsa tkiva na sliki svetla, saj bi vsa še zelo vzburjena in bi zato oddala močan odmev. Če bi odmeve po drugi strani zabeležili prepozno, bi bila vsa tkiva na sliki temna, saj bi bila jedra v vseh tkivih že zrelaksirana in iz njih sploh ne bi dobili nobenega odmeva. Kontrast na sliki bi bil v obeh primerih slab. Pokazati je mogoče, da najboljši kontrast dobimo, če slikamo ob času, ki je na sredini med T_2 enega in T_2 drugega tkiva.

S tehniko slikanja s spinskim odmevom lahko torej dobimo dober kontrast le med tkivi, katerih T_2 se zelo razlikuje. Če imata dve tkivi zelo podoben T_2 , ju s to tehniko ne moremo dobro razlikovati. V takem primeru moramo uporabiti katero od drugih tehnik slikanja z MR, ki pa jih tu ne bomo imeli časa opisati.

31.3 Gradient magnetnega polja in nastanek prostorske slike telesa

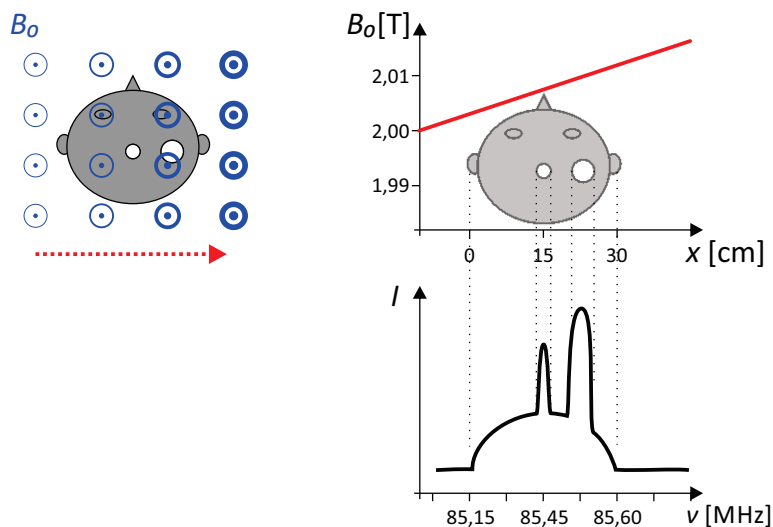
V prejšnjem razdelku smo spoznali, kako lahko razlikujemo radijske signale iz različnih tkiv in tako med tkivi na sliki dobimo dober kontrast. Nič pa še nismo povedali, kako ugotovimo, kje v telesu se določeno tkivo nahaja. Ker tkiva zaznamo na osnovi radijskih valov, katerih valovne dolžine so več m (tabela 26.1), zaradi velikega uklona ne moremo ugotoviti, iz katere točke v telesu je prišel določen radijski val. Za rekonstrukcijo prostorske slike tkiv v telesu moramo zato uporabiti zanimiv trik.



Slika 31.3: Shematični prikaz nastanka kontrasta med različnimi tkivi pri tehniki slikanja s spinskim odmevom. Zaradi različnega kemijskega okolja se jedra v različnih tkivih po vzburjanju relaksirajo različno hitro (zgornji primer je izračunan za primer, ko se jedra v tumorju relaksirajo počasneje kot v zdravem tkivu, za tumor je $T_2 = 300$ ms, za zdrav tkivo pa $T_2 = 100$ ms). Intenziteta na magnetno-resonančni sliki je sorazmerna intenziteti radijskih valov, ki ji zaznamo iz posameznega tkiva. Za dober kontrast moramo signale zabeležiti v ravno pravem trenutku, da bo eno tkivo še vzburjeno in zato na sliki belo, drugo pa že zrelaksirano in zato na sliki temno. Če jih zabeležimo prekmalu, bodo vsa tkiva še zelo vzburjena in zato na sliki enako svetla, če pa jih zabeležimo prepozno, bodo vsa tkiva že povsem zrelaksirana in zato na sliki enako temna.

Spomnimo se, da tkiva oddajajo radijske valove, katerih frekvenca je enaka resonančni frekvenci magnetnih dipolov jeder, le-ta pa je sorazmerna gostoti magnetnega polja, v katerem se nahajajo (en. 31.1). Poglejmo si, kaj se zgodi, če telo postavimo v magnetno polje, katerega gostota linearno narašča v smeri x , tj. če vklopimo *gradient magnetnega polja* (slika 31.4). V tem primeru bodo tkiva, ki so v manjšem polju, oddajala radijske valove z nižjimi frekvencami kot tkiva, ki so v močnejšem polju. Če ob detekciji signala iz telesa izmerimo tudi njegovo frekvenco, lahko iz nje ugotovimo, iz katere koordinate x je prišel kateri signal - informacija o položaju izvora radijskega vala je shranjena v njegovi frekvenci! Če torej določimo spekter signala, ki ga jedra oddajajo med relaksacijo, lahko v njem razpoznamo tudi prostorsko sliko.

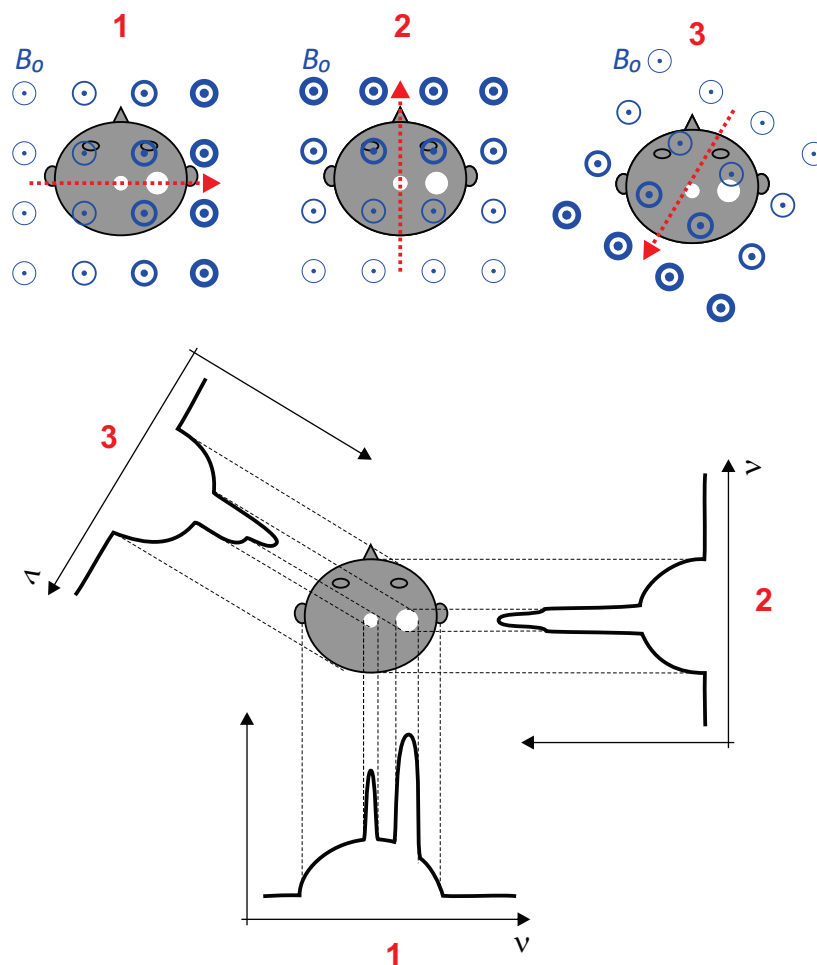
Za rekonstrukcijo lepe prostorske slike zadostuje že majhen gradient ma-



Slika 31.4: Shematični prikaz vloge gradienta magnetnega polja pri nastanku prostorske slike. V napravi vklopimo gradient magnetnega polja, zaradi česar se gostota magnetnega polja v napravi v eni smeri malo spreminja (na sliki se spreminja v smeri x in sicer od 2 T do 2,01 T, smer gradienta je označena z rdečo pikčasto puščico). Zaradi gradienta magnetnega polja imajo jedra na različnih koordinatah x različne resonančne frekvence in zato tudi med relaksacijo oddajajo radijske valove z različnimi frekvencami. Ob prisotnosti gradienta se zato v spektru zaznanega signala skriva neposredna informacija o položaju posameznih jeder - višja kot je frekvenca nekega signala, pri večji koordinati x je ta signal izviral.

gnetnega polja, npr., da se od ene do druge strani telesa gostota magnetnega polja spremeni le za približno 1 % osnovnega polja. V napravi za slikanje z MR gradient magnetnega polja ustvarimo z dodatnimi manjšimi tuljavami (imenujemo jih gradientne tuljave), s katerimi lahko gradient usmerimo v poljubni smeri. Z vključenim gradientom v eni smeri dobimo informacije o položaju le v tisti smeri, tj. projekcijo slike v tisti smeri. Podobno kot pri CT moramo zato tudi pri MR preiskovanja slikati zaporedoma z gradienti v različnih smereh in nato iz teh projekcij s pomočjo računalnika sestaviti 3D sliko telesa (slika 31.5).

Ob koncu se moramo vprašati, ali slikanje z MR škoduje preiskovancu. Videli smo že, da preiskovanec med slikanjem z MR ni izpostavljen ionizirajočemu sevanju in s tem povezanim tveganjem za razvoj raka. Vseeno pa je preiskovanec izpostavljen zelo velikemu magnetnemu polju. Pri slikanju z MR moramo zato paziti, da preiskovanec na sebi ali v sebi nima snovi, ki se v po-



Slika 31.5: Shematični prikaz nastanka prostorske slike. Ob uporabi gradienta v eni smeri dobimo projekcijo slike tkiv na tisto smer. Če preiskovanca slikamo večkrat, pri čemer je gradient polja vsakič orientiran drugače, dobimo serijo projekcij v različnih smereh. Iz teh projekcij lahko s pomočjo računalnika sestavimo sliko celotne ravnine.

lju namagnetijo, npr. železa, saj bi na take snovi delovale ogromne sile oz. navori in bi lahko preiskovanca poškodovali. Iz preventivnih razlogov mora zato preiskovanec pred slikanjem z MR odložiti vse potencialno nevarne kovinske predmete, npr. nakit in uro. Iz poglavja o elektriki in magnetizmu se tudi spomnimo, da magnetno polje na gibajoče naboje deluje s silo in da lahko spreminjajoče se polje v snovi inducira električne tokove. V napravi za MR je polje tako veliko, da ti pojavi niso zanemarljivi, zato ne moremo trditi, da

slikanje nima nobenega vpliva na preiskovanca. Vseeno dolgoletne izkušnje kažejo, da slikanje z MR ne pušča trajnih posledic. Slikanje povzroča največ težav med samo preiskavo, saj mora preiskovanec dolgo časa negibno ležati v majhnem prostoru v napravi, poleg tega pa je vklapljanje gradientnih tuljav zelo glasno in neprijetno.

Dodatek A

Pogoste predpone

faktor	predpona	simbol	faktor	predpona	simbol
10^1	deka	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hekto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	mega	M	10^{-6}	mikro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	piko	p
			10^{-15}	femto	f

Tabela A.1: Pogoste predpone.

Grška abeceda

alfa	α	A	eta	η	H	ni	ν	N	tau	τ	T
beta	β	B	theta	θ, ϑ	Θ	ksi	ξ	Ξ	ipsilon	υ	Υ
gama	γ	Γ	jota	ι	I	omikron	$\omicron$	O	fi	ϕ, φ	Φ
delta	δ	Δ	kapa	κ	K	pi	π	Π	hi	χ	X
epsilon	ϵ	E	lambda	λ	Λ	ro	ρ	P	psi	ψ	Ψ
zeta	ζ	Z	mi	μ	M	sigma	σ	Σ	omega	ω	Ω

Tabela A.2: Grška abeceda. Pri mali črki fi sta možna dva zapisa, ki ju ne smemo zamenjevati.

Odводи in integrali

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
C (konstanta)	0	C (konstanta)	$x C$
x	1	x	$\frac{1}{2}x^2$
x^n	$n x^{n-1}$	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
e^x	e^x	e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\ln x$	$1/x$	$1/x$	$\ln x$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$C f(x)$	$C f'(x)$	$C f(x)$	$C \int f(x) dx$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	$f(x) + g(x)$	$\int f(x) dx + \int g(x) dx$
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$		
$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$		

Tabela A.3: Osnovna pravila za računanje odvodov in nedoločenih integralov. Pri nedoločenih integralih je rezultat določen le do konstante natančno, ki pa smo jo v zgornjem zapisu izpustili, saj pri se pri računanju določenih integralov pokrajša.

Literatura

- [1] Vira slik:
Galileo: National Maritime Museum, Greenwich, London, UK;
Harvey: National Portrait Gallery, London, UK.
- [2] Podolskiy, Dmitriy I., et al. "Analysis of cancer genomes reveals basic features of human aging and its role in cancer development." *Nature communications* 7 (2016): 12157.
- [3] Atkins, Peter, Julio De Paula, and James Keeler. *Atkins' physical chemistry*. Oxford university press, 2018.
- [4] The importance of quantitative systemic thinking in medicine
- [5] Wilson, Alan M., et al. "Locomotion dynamics of hunting in wild cheetahs." *Nature* 498.7453 (2013): 185.
- [6] Franklin, Kirsten, Paul Muir, Terry Scott, and Paul Yates. *Introduction to biological physics for the health and life sciences*. Wiley, 2019.
- [7] Yamada, Hiroshi, and F. Gaynor Evans. "Strength of biological materials." (1970).
- [8] Herman, Irving P. *Physics of the human body*. Springer, 2016.
- [9] Szczepanek-Parulska, Ewelina, et al. "Comparison of diagnostic value of conventional ultrasonography and shear wave elastography in the prediction of thyroid lesions malignancy." *PloS one* 8.11 (2013): e81532.
- [10] Več avtorjev: *Praktikum iz biofizike*. MF.
- [11] Anusavice, Kenneth J., Chiayi Shen, in H. Ralph Rawls, ur. *Phillips' science of dental materials*. Elsevier Health Sciences, 2012.

- [12] <https://water.usgs.gov/software/DOTABLES/>
- [13] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_thermal_conductivities
- [14] Miglietta, Francesca, et al. "Mirror-Image Artifact of Early Pregnancy on Transvaginal Sonography." *Journal of Ultrasound in Medicine* 31.11 (2012): 1858-1859.
- [15] Tang, M-X., et al. "Quantitative contrast-enhanced ultrasound imaging: a review of sources of variability." *Interface focus* 1.4 (2011): 520-539.
- [16] Hendee, William R., and E. Russell Ritenour. *Medical imaging physics*. John Wiley & Sons, 2003.
- [17] Case courtesy of Dr Ian Bickle, Radiopaedia.org, rID: 41375
- [18] Case courtesy of Dr Henry Knipe, Radiopaedia.org, rID: 37789
- [19] Mazrani, W., et al. "The radiation burden of radiological investigations." *Archives of disease in childhood* 92.12 (2007): 1127-1131.
- [20] Jevtič V., Matela J. in Šurlan M. (ur). *Diagnostična in intervencijska radiologija – splošni del*. Založba Pivec, 2014.